A força exercida por um projétil de *paintball* e o Teorema Π de Buckingham

a c tort

Recentemente, um problema sobre a intensidade da força exercida por um projétil sobre o corpo humano foi proposto ao CREF e neste *forum*. Uma solução aproximada, mas que permite ter uma noção da ordem de grandeza, foi apresentada por nosso colega, Prof. Fernando Lang. Ocorreu-me que problema é também um excelente exemplo da utilidade da análise dimensional, especificamente, do *Teorema* Π *de Buckingham*[1]. Ei-lo.

Seja m, a massa do projétil, D, o seu diâmetro, v o módulo da sua velocidade imediatamente antes do impacto, τ a duração da colisão e F, a força média sobre o alvo inicialmente em repouso (módulo). Portanto, a lista de variáveis relevantes é F, m, D, v e τ. A lista das dimensões primárias, isto é: das dimensões que aparecem em todas as variáveis relevantes se lê: massa M, comprimento L e tempo T. De acordo com o Teorema Π de Buckingham teremos $5-3=2$, grupos de variáveis adimensionais que denotaremos por Π_1 e Π_2. A idéia é expressar um grupo de variáveis adimensionais em função do outro, por exemplo,

$$\Pi_1 = f\left(\Pi_2\right).$$

Como variáveis recorrentes escolheremos: m, D e v. Seguindo o protocolo selecionamos uma das variáveis restantes, digamos F, para combinar com as variáveis recorrentes:

$$\Pi_1 = m^{\alpha}\, D^{\beta}\, v^{\gamma}\, F^{\delta},$$

logo,

$$[\Pi_1] = [M]^{\alpha}\, [L]^{\beta}\, [LT^{-1}]^{\gamma}\, [MLT^{-2}]^{\delta}.$$

Segue que

$$\alpha + \delta = 0; \quad \beta + \gamma + \delta = 0; \quad \gamma + 2\delta = 0.$$

Assim, $\alpha = -\delta$, $\beta = \delta$, e $\gamma = -2\delta$. Portanto,

$$\Pi_1 = m^{-\delta} D^{\delta} v^{-2\delta} F^{\delta} = \left(\frac{FD}{mv^2}\right)^{\delta}.$$

Fazendo $\delta = 1$ teremos,

$$\Pi_1 = \left(\frac{FD}{mv^2}\right).$$

Agora escolhemos τ e escrevemos

$$\Pi_2 = m^{\alpha}\, D^{\beta}\, v^{\gamma}\, \tau^{\delta},$$

logo,

[1] E. Buckingham "On Physically Similar Systems: Illustrations of the Use of Dimensional Equations." Phys. Rev. **4**, 345-376, 1914.

$$[\Pi_2] = [M]^{\alpha}\,[L]^{\beta}\,[LT^{-1}]^{\gamma}\,[T]^{\delta}.$$

Segue que

$$\alpha = 0; \quad \beta + \gamma = 0; \quad -\gamma + \delta = 0.$$

Portanto, $\alpha = 0$, $\beta = -\gamma$, e $\gamma = \delta$. Portanto,

$$\Pi_2 = m^0\,D^{-\delta}\,v^{\delta}\,\tau^{\delta} = \left(\frac{v\tau}{D}\right)^{\delta}.$$

Como antes fazemos $\delta = 1$ e rescrevemos

$$\Pi_2 = m^0\,D^{-\delta}\,v^{\delta}\,\tau^{\delta} = \left(\frac{v\tau}{D}\right).$$

Agora escrevemos

$$\frac{FD}{mv^2} = f\left(\frac{v\tau}{D}\right),$$

ou ainda

$$F = \frac{mv^2}{D}\,f\left(\frac{v\tau}{D}\right).$$

Para ter uma idéia da ordem de grandeza de F, fazemos $f(v\tau/D) \sim 1$, então

$$F \approx \frac{m\,v^2}{D} = \frac{mv}{D/v}.$$

Note que D/v é um tempo característico do problema, mas não deve ser confundido com a duração da colisão. A massa do projétil vale aproximadamente $3 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}$, e o módulo da velocidade de saída do projétil do cano da arma é de uns $80\,\mathrm{m/s}$. O diâmetro do projétil é da ordem de $2\,\mathrm{cm}$. Segue então que

$$F \approx \frac{3 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}\,\left(8 \times 10^{1}\,\mathrm{m/s}\right)^2}{2 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} \approx 960\,\mathrm{N} \quad \text{(próximo ao valor obtido pelo Prof. Lang).}$$

Neste ponto a análise dimensional deixa de ser-nos útil, pois a forma da função f deve ser determinada a partir dos experimentos.

O método e o resultado final apresentados aqui valem para colisões unidimensionais de modo geral, os projéteis de *paintball* são um exemplo particular. A generalidade está contida na forma explícita da função $f\left(\frac{v\tau}{D}\right)$ a qual, como dissemos antes, deve ser determinada empiricamente. Sem a determinação desta função o problema fica incompleto.