Aula 8: Forças gravitacionais diferenciais - Marés e precessão.

Maria de Fátima Oliveira Saraiva, Kepler de Oliveira Filho e Alexei Machado Müller.

Lua cheia nascendo sobre o mar.

Introdução

Aqueles de vocês que já passaram algum tempo na praia provavelmente perceberam o fenômeno das marés, e talvez tenham notado que acontecem duas marés altas por dia.
Qual a causa desse fenômeno? E por que acontece duas vezes ao dia? Estará realmente associado às fases da Lua, como dizem? Na aula de hoje vamos procurar entender o mecanismo de formação das marés: as forças gravitacionais diferenciais. Também vamos discutir outro fenômeno importante associado às forças gravitacionais diferenciais: o movimento de precessão da Terra.

Bom estudo!

Objetivos da aula

- Entender o que são forças gravitacionais diferenciais, os fatores determinantes para seu aparecimento e qual o seu efeito nos corpos que as sofrem;
- Explicar os fenômenos das marés e da precessão do eixo da Terra em termos de forças gravitacionais diferenciais;
- Explicar a relação entre as fases da Lua e as variações das marés na Terra.

Se a Lua não existisse, teríamos marés na Terra?

Forças Gravitacionais Diferenciais

Corpos com simetria esférica agem, gravitacionalmente, como massas pontuais, para as quais as influências gravitacionais são facilmente calculadas. Na natureza, no entanto, os corpos não são perfeitamente esféricos. A principal contribuição ao achatamento dos planetas é a sua *rotação*. Outra contribuição é proporcionada pelas forças gravitacionais diferenciais que corpos vizinhos exercem uns nos outros. Essas forças diferenciais resultam em fenômenos como *marés* e *precessão*.

As forças gravitacionais diferenciais são forças que surgem dentro de um corpo extenso imerso no campo gravitacional de outro, mais distante. São também chamadas forças de maré.

Por que surgem essas forças? Bom, sabemos que a força que atua em um corpo imerso no campo gravitacional de outro é inversamente proporcional ao quadrado da sua distância ao outro corpo. Para um corpo pontual, a sua distância ao outro é uma só, mas o que acontece quando o corpo não é pontual?

Em corpos extensos (não pontuais), diferentes pontos do corpo estão a diferentes distâncias do outro corpo. Consequentemente, as forças gravitacionais em diferentes pontos são diferentes, e as diferenças entre elas originam as forças gravitacionais diferenciais. Em cada ponto, a força gravitacional diferencial é igual à diferença entre a força gravitacional no ponto e a força gravitacional que atua no corpo como um todo (aplicada no centro de massa).

A figura 08.01 ilustra as forças gravitacionais em três pontos de um corpo extenso, de diâmetro $2\Delta r$, cujo centro de massa (CM) está a uma distância r de outro, que tem massa M. A força gravitacional no centro de massa é proporcional a $1/r^2$, a força gravitacional no ponto 1 ($\mathbf{F_1}$) é proporcional a $1/(r-\Delta r)^2$, e a força gravitacional no ponto 2

Força gravitacional diferencial

É a variação da força gravitacional em um ponto do corpo em relação à força gravitacional aplicada no centro de massa.

(F_2) é proporcional $1/(r+\Delta r)^2$.

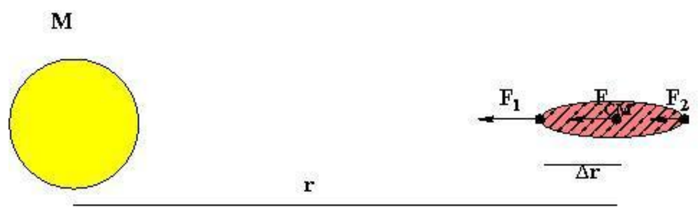

Figura 08.01: Forças gravitacionais em três pontos de um corpo extenso cujo centro de massa está a uma distância r de outro corpo. $F_1 < F_{CM} < F_2$.

A força gravitacional **diferencial** em cada um desses pontos é a diferença entre a força gravitacional no ponto e a força gravitacional no centro de massa. No ponto 1, a força diferencial (ΔF_1)tem valor $\Delta F_1 = F_1 - F_{CM}$, e é dirigida para o corpo M, no ponto 2 a força diferencial tem valor $\Delta F_2 = F_2 - F_{CM}$ e aponta em sentido contrário, pois F_2 *tem intensidade maior do que* F_{CM}, logo o sentido da resultante é oposto ao de F_{CM}, Consequentemente, as forças ΔF_1 *e* ΔF_2 tendem a alongar o corpo que as sofre, ou mesmo rompê-lo.

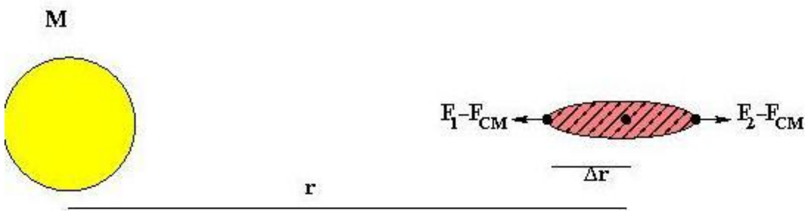

Figura 08.02: Forças gravitacionais diferenciais que surgem nos pontos extremos do corpo extenso: a força gravitacional diferencial em cada ponto é a diferença vetorial entre a força gravitacional no ponto e a força gravitacional no centro de massa.

Dedução da força gravitacional diferencial

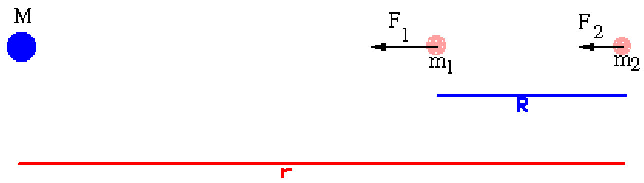

Figura 01.08.03: Esquema para ilustrar a dedução da força diferencial.

Considere duas partículas de massas m1 e m2, separadas por uma distância R e imersas no campo gravitacional de outro corpo de massa M, que está a uma distância r de m_2 (ver figura 08.03). A diferença entre as forças gravitacionais que as duas sofrem, ou seja, a força gravitacional diferencial (ΔF) de uma em relação à outra será:

$$\Delta F = F_2 - F_1 \ ,$$

onde:

$$F_1 = \frac{GMm_1}{(r-R)^2},$$

e

$$F_2 = \frac{GMm_2}{r^2}.$$

Então:

$$F_1 - F_2 = GM\left[\frac{m_1}{(r-R)^2} - \frac{m_2}{r^2}\right].$$

Fazendo $m_1 = m_2 = m$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} F_1 - F_2 &= GMm\left[\frac{r^2 - (r-R)^2}{r^2(r-R)^2}\right] \\ &= GMm\left(\frac{2rR - R^2}{r^4 - 2Rr^3 + r^2R^2}\right) \\ &= GMmR\left[\frac{2r - R}{r^4\left(1 - \frac{2R}{r} + \frac{R^2}{r^2}\right)}\right], \end{aligned}$$

Expressão da força gravitacional diferencial:

$$\Delta F = \frac{2GMm}{r^3}R$$

$$para\ r >> R,\ 2r - R \cong 2r,\ e\left(1 - \frac{2R}{r} + \frac{R^2}{r}\right) \cong 1.$$

Portanto, a expressão da força diferencial fica:

$$\boxed{\Delta F = \frac{2GMm}{r^3}R.}$$

Podemos chegar a esse mesmo resultado tomando a derivada da Lei de Gravitação Universal:

$$F = -\frac{GMm}{r^2},$$

então:

$$\frac{dF}{dr} = \frac{2GMm}{r^3},$$

ou

$$dF = \frac{2GMm}{r^3}dr.$$

Esta é a expressão da força gravitacional diferencial *dF* devido a uma variação *dr* na distância entre os corpos. É basicamente a mesma expressão deduzida para ΔF, com a diferença de que aqui temos *dr* onde ali tínhamos *R*. Isso nos diz, portanto, que *dr,* nesta expressão, é a separação entre os pontos para os quais estamos calculando a força diferencial.

Marés

Maré provocada pela Lua:

A atração gravitacional percebida pelo lado da Terra mais próximo da Lua é maior do que a percebida no centro da Terra.

As marés na Terra constituem um fenômeno resultante da atração gravitacional exercida pela Lua sobre a Terra e, em menor escala, da atração gravitacional exercida pelo Sol sobre a Terra. A ideia básica da maré provocada pela Lua, por exemplo, é que a atração gravitacional sentida por cada ponto da Terra devido à Lua depende da distância do ponto à Lua. Portanto a atração gravitacional sentida no lado da Terra que está mais próximo da Lua é *maior* do que a sentida no centro da Terra, e a atração gravitacional sentida no lado da Terra que está mais distante da Lua é *menor* do que a sentida no centro da Terra (ver figura 08.04). Assim, em relação ao centro da Terra, um lado está sendo puxado para a Lua e o outro lado está sendo puxado no sentido contrário.

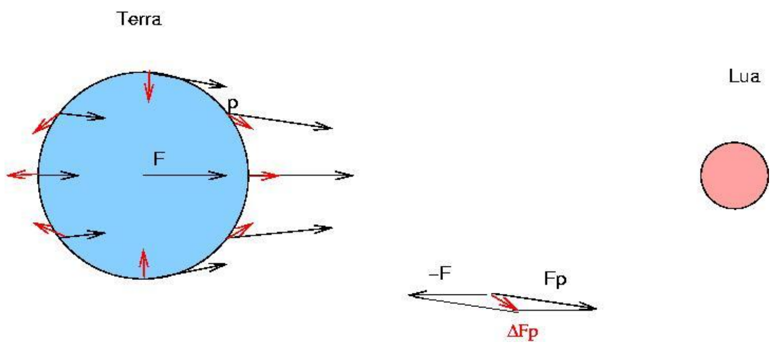

Figura 08.04: Forças de maré na Terra devido ao campo gravitacional da Lua. As setas pretas indicam o "puxão gravitacional" em diferentes pontos da Terra proporcionado pela interação com a Lua. As setas vermelhas indicam as forças diferenciais que aparecem em cada ponto. O detalhe mostra como a força diferencial em um certo ponto é calculada pela diferença (vetorial) entre a força gravitacional no ponto (**Fp**) e a força gravitacional no centro de massa do corpo (**F**).

Em relação ao centro da Terra, um lado está sendo puxado no sentido da Lua e o outro lado está sendo puxado no sentido contrário.
A água se a acumula nesses dois lados opostos da Terra.

As partes sólidas da Terra resistem mais à deformação, que se manifesta mais claramente nas grandes porções líquidas. Como a água flui muito facilmente, ela se "aglomera" em dois lados opostos da Terra, que fica com um bojo de água no lado mais próximo da Lua e outro no lado mais distante.

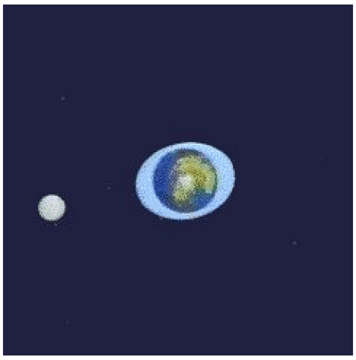

Figura 01.08.05: Simulação das marés devido à Lua. Figura da Terra e da Lua fora de escala.

Enquanto a Terra gira no seu movimento diário, o bojo de água continua sempre apontando aproximadamente na direção da Lua. Em um certo momento, um certo ponto da Terra estará com a Lua aproximadamente no zênite, e terá maré alta. Aproximadamente seis horas mais tarde (na verdade, *6h12min*), a rotação da Terra terá levado esse ponto a 90° da Lua, e ali terá maré baixa. Dali a mais seis horas e doze minutos, o mesmo ponto estará a 180° da Lua, e terá maré alta novamente. Portanto, as marés altas acontecem duas vezes a

Como a influência da Lua nas marés da Terra é maior do que a influência do Sol, as marés seguem o dia lunar (tempo decorrido entre duas passagens sucessivas da Lua pelo meridiano do lugar) que tem duração de 24 *h* 48 *min*. Portanto, duas marés altas no mesmo ponto da Terra acontecem a cada 12 *h* 2 *min* (desprezando fatores locais).

cada 24 *h* 48 *min* (*que é a duração do dia lunar)*, separadas de aproximadamente 12 *h* 24 *min*, no mesmo ponto da Terra.

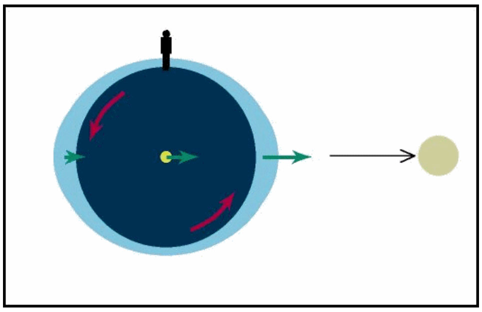

Figura 01.08.06 : Simulação do movimento da Lua em torno da Terra e as alterações da Maré. Figura fora de escala.

Se a Terra fosse totalmente coberta de água, a máxima altura da maré seria 1 m. Como a Terra não é completamente coberta de água, vários aspectos resultantes da distribuição das massas continentais contribuem para que a altura e a hora da maré variem de lugar a outro. Em algumas baías e estuários as marés chegam a atingir 10 m de altura.

Expressão da força de maré

Considere a atração gravitacional $\mathbf{F_P}$, sentida por uma partícula em um ponto *P* na superfície da Terra, situado a uma distância *r* da Lua. Seja *d* a distância centro a centro entre Terra e Lua, e *R* o raio da Terra.

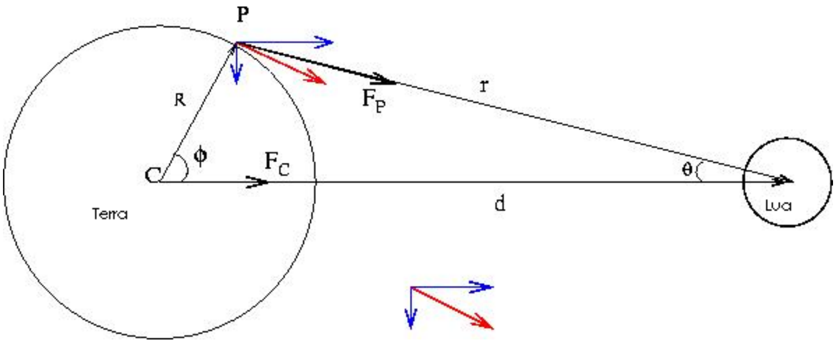

Figura 08.07: Forças gravitacionais em dois pontos da Terra (círculo da esquerda) devidas à Lua (círculo da direita). No centro da Terra (C), que está uma distância d do centro da Lua, a força é ***Fc***; no ponto P, que está a uma distância r da Lua, a força é ***Fp***. A seta em vermelho indica a força gravitacional diferencial no ponto P, calculada como a diferença vetorial entre ***Fp*** e ***Fc***. As setas azuis indicam as componentes da força gravitacional diferencial na direção de d e perpendicular a ela.

A força diferencial ***ΔF*** no ponto ***P*** em relação à força gravitacional que atua no centro de massa (***Fc***), é:

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_p - \mathbf{F}_C \,.$$

Como a distância da Lua ao ponto P é muito maior do que o raio da Terra (r >> *R*), o ângulo θ é muito pequeno e a direção da força $\mathbf{F}_p$ é quase paralela à direção da força $\mathbf{F}_C$. Portanto, pode-se representar essas forças com as direções aproximadas mostradas na figura 08.08.

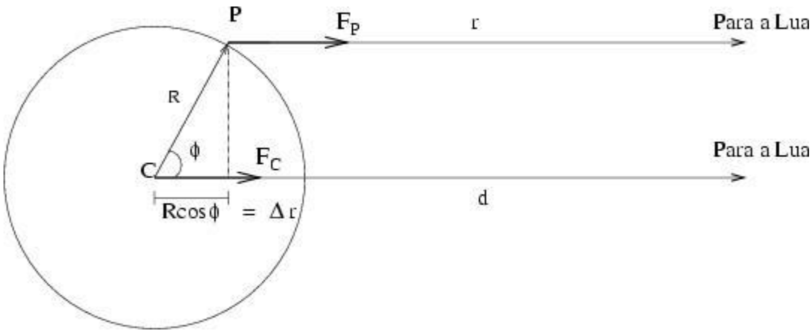

Figura 08.08: Como a distância (r) de um ponto qualquer da superfície da Terra ao centro da Lua é muito maior do que o raio da Terra (R), podemos considerar que, para qualquer ponto da Terra, a direção de r se mantém a mesma, de forma que, em qualquer ponto, a diferença entre r e d é $\Delta r = R\cos(\phi)$, onde ϕ é o ângulo, no centro da Terra, entre a direção do ponto e a direção da Lua.

Nessa configuração, $\boldsymbol{\Delta F}$ tem a mesma direção de $\boldsymbol{F_C}$ e sentido igual ou contrário ao de $\boldsymbol{F_C}$ dependendo de se o ponto P está no lado da Terra mais próximo da Lua (caso em que $\boldsymbol{F_p}$ terá intensidade maior do que $\boldsymbol{F_C}$) ou mais distante (caso em que $\boldsymbol{F_p}$ terá intensidade menor do que $\boldsymbol{F_C}$). Como $\boldsymbol{F_P}$ e $\boldsymbol{F_C}$ são paralelas, o módulo de $\boldsymbol{\Delta F}$ é igual à diferença entre os módulos de $\boldsymbol{F_P}$ e $\boldsymbol{F_C}$ (ou seja, $\Delta F = F_P - F_C$) e sua expressão é totalmente análoga à deduzida anteriormente para a força gravitacional diferencial entre duas partículas deduzida na pag. 4:

$$\Delta F = (2GMm/d^3)\,\Delta r$$

onde M é a massa do corpo que provoca a maré (a Lua no nosso exemplo), m é a massa da partícula teste, d é a distância média dos pontos onde se está medindo a maré ao corpo provocador da maré, isto é, a distância média entre M e m, e Δr é a variação na distância para diferentes pontos do corpo. (RcosΦ na figura 08.08). Podemos então escrever a força de maré como :

$$\Delta F = (2GMm/d^3)\,R\cos\Phi$$

Considerando que a força gravitacional média da Lua sobre a Terra está aplicada no centro da Terra, a variação máxima nessa força acontece para os pontos que estão sobre a superfície da Terra, na direção da linha que une os centros da Terra e da Lua (Φ = 0).. A diferença de distância entre esses pontos e o centro da Terra é o próprio raio da Terra, *R*, e, chamando de *d* a distância entre Terra e Lua, a máxima *força de maré por unidade de massa* na Terra, devida à Lua, é

$$\boxed{\frac{\Delta F}{m} = 2G\frac{M}{d^3}R.}$$

A mesma expressão pode ser usada para calcular a força de maré em outros corpos que não a Terra e provocadas por outro corpo que não a Lua.

Como, em geral, não estamos interessados em calcular o valor absoluto da força de maré, mas apenas em fazer *comparações* entre seus efeitos, é muito útil lembrar a expressão *qualitativa* da força de maré:

$$\boxed{\Delta F \sim \frac{M}{d^3}R}$$

Expressão qualitativa da força de maré:

$$\Delta F \sim \frac{M}{d^3}R$$

M é a massa do corpo que **provoca a maré**
R é o raio do corpo que **sofre a maré**
d é a distância centro a centro entre os dois

Maré:

A maré provocada pelo Sol tem um efeito inferior a menos da metade do efeito provocado pela Lua.

Comparação das marés produzidas na Terra pela Lua e pelo Sol

Para comparar as intensidades das marés produzidas pelo Sol com as produzidas pela Lua em um certo ponto da Terra, calculamos a razão entre elas usando a expressão qualitativa da força de maré. Como

$$\Delta F_{S\to T} \sim (M_S/d_{T\text{-}S}^3)R_T \quad e \quad \Delta F_{L\to T} \sim (M_L/d_{T\text{-}L}^3)R_T,$$

dividindo uma expressão pela outra o termo R_T se cancela e obtemos:

$$\Delta F_{S\to T} / \Delta F_{L\to T} = (M_S/M_L)(d_L/d_S)^3 =$$

$$=(2 \times 10^{30}\,kg/7{,}35 \times 10^{22}\,kg)(3{,}84\times10^5\,Km/1{,}496 \times 10^8\,km)^3 = 0{,}46$$

Portanto, embora a massa do Sol seja muito maior do que a da Lua,como o Sol está muito mais distante, a maré provocada por ele tem menos da metade do efeito da provocada pela Lua.

Os efeitos das duas marés combinam-se vetorialmente, de forma que a intensidade da maré resultante depende da elongação da Lua.

Na Lua Nova e na Lua Cheia, as duas forças se somam e produzem as marés cheias mais altas e marés baixas mais baixas (são chamadas marés de sizígia, ou marés "vivas"). Na Lua Quarto Crescente ou Quarto Minguante os efeitos da maré são atenuados (marés de quadratura ou marés "mortas").

Na Lua Nova e Lua Cheia, as duas forças se somam e produzem as marés cheias mais altas e marés vazias mais baixas.

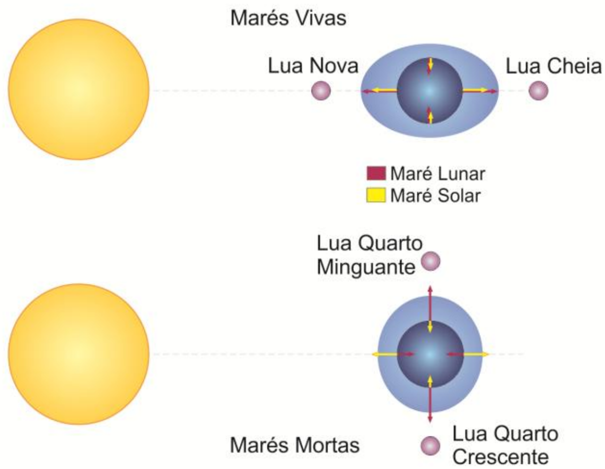

Figura 08.09: Quando a Lua está em conjunção (Lua Nova) ou oposição (Lua Cheia), as forças de maré da Lua (setinhas vermelhas) e do Sol (setinhas amarelas) estão no mesmo sentido, de forma que a maraé resultante é mais intensa (marés vivas). Quando a Lua está em quadratura (Quarto Crescente ou Quarto Minguante), as forças de maré da Lua e do Sol estão em sentidos contrários, e a maré resultante é atenuada (marés mortas).

Altura do bojo de maré na Terra

Seja a_L a aceleração gravitacional de uma partícula de massa m na superfície da Terra, causada pela Lua, elevando-a uma altura h_L.

Se considerarmos que a energia potencial gravitacional ($= m\,g\,h_L$) causada pelo deslocamento h_L devido à força de maré da Lua sobre uma massa m tem que ser equilibrado pelo trabalho ($= \Delta F_L\, R_T$) realizado pela força de maré devido à Lua (maré lunar)no ponto onde se encontra a massa m temos:

$$m\, g\, h_L = = (2\, G\, m\, M_L\, R_T /\, d^3_{T-L})\, R_{T,}$$

$$h_L = \ 2\, (G/g)\ \ M_L\, (R_T^2 /d^3_{T-L}).$$

Sendo g a aceleração gravitacional na superfície da Terra:

$$g = G\, M_T\, /\, R_T^2$$

Obtemos:

$$h_L = \ \ 2\, (M_L/M_T\,)\ \mathrm{x}\ (R_T^4/d^3{}_{T\text{-}L}) = 0{,}72\ m$$

e, similarmente para a maré do Sol:

$$h_S = \ 2\, (M_S/M_T\,)\ \mathrm{x}\ (R_T^4/d^3{}_{T\text{-}S}) = 0{,}32\ m$$

Altura do bojo de maré na Terra:

Devido à Lua:
h_L = 0,72 m.

Devido ao Sol:
h_S=0,32 m.

As marés, a rotação sincronizada da Lua e a evolução do sistema Terra-Lua

A força de maré causada em uma partícula na Lua, pela Terra, é dada por:

$$dF_{(T\to L)} = \frac{2GM_{Terra}m_{partícula}}{d^3_{L-T}} R_{Lua},$$

e a força de maré causada em uma partícula na Terra, pela Lua, é dada por:

$$dF_{(L\to T)} = \frac{2GM_{Lua}m_{partícula}}{d^3_{L-T}} R_{Terra},$$

$$dF_{(T\to L)} = \frac{M_{Tera}}{M_{Lua}} \frac{R_{Lua}}{R_{Terra}} dF_{(L\to T)} \approx 20\, dF_{(L\to T)}\,.$$

Lembre-se:

A força de maré na Lua provocada pela Terra é aproximadamente 20 vezes a força de maré na Terra provocada pela Lua.

Ou seja, a força de maré na Lua provocada pela Terra é aproximadamente 20 vezes a força de maré na Terra provocada pela Lua.

Acredita-se que, no passado, o período de rotação da Lua era menor do que o seu período de translação em torno da Terra. Ao girar, ela tentava arrastar consigo os bojos de maré, que sempre ficavam alinhados na direção da Terra.

Assim, **havia um movimento relativo entre as diferentes partes da Lua, o qual gerava atrito, que por sua vez tendia a frear a rotação.** Devido a esse atrito a Lua foi perdendo energia de rotação até ficar com a *rotação sincronizada*, estado em que o período sideral é exatamente igual ao período de revolução.

O giro da Terra sob os bojos de maré gera um atrito no movimento da Terra que aumenta a duração do dia em 0,002 s por século.

A força que "empurra" a Lua para fora é a gravidade exercida pelo bojo de maré mais próximo da Lua, que fica sempre um pouco "adiantado" em relação à Lua porque é arrastado junto com a Terra no movimento de rotação. A massa de água do bojo acelera a Lua, que ganha velocidade tangencial, se afastando da Terra.

Não é só a Lua que tem rotação sincronizada: os dois satélites de Marte, Fobos e Deimos, cinco luas de Júpiter (incluindo os quatro satélites galileanos), nove luas de Urano, a lua Tritão, de Netuno, Plutão e Caronte, todos têm rotação sincronizada. A maré de Júpiter sobre Io, que está aproximadamente à mesma distância de Júpiter que a Lua está da Terra, causa vulcanismo acentuado em Io, já que Júpiter tem massa 318 maior que a da Terra. A dissipação das forças de maré em Io causam o vulcanismo, e a órbita é mantida excêntrica por ressonância com Europa e Ganímedes, causando deslocamentos verticais de até 100 metros.

Na órbita circular e sincronizada não existe movimento relativo. A distorção ainda ocorre, mas há equilíbrio que não envolve qualquer movimento relativo por qualquer parte da matéria.

No estado atual de evolução do sistema Terra-Lua, a Terra ainda tem que girar sob os bojos de maré, que ficam sempre apontados para a Lua. **O atrito gerado faz com que a rotação da Terra diminua, aumentando o dia em 0,002 segundos por século.**

Se o momentum angular de rotação da Terra diminui por fricção, então a Lua tem que aumentar seu momentum angular orbital ($\vec{L}$), movendo-se para mais longe da Terra.

Vamos ver porque isso acontece.

$$\vec{L}_{total} = \vec{L}^{rotação}_{Terra} + \vec{L}^{rotação}_{Lua} + \vec{L}^{translação}_{Terra-Lua}$$

O momentum angular de translação da Lua é dado por:

$$\vec{L} = m.\vec{r} \times \vec{v},$$

onde r é o raio da órbita e v a velocidade orbital. Como:

$$v = 2\pi r/P,$$

e o período P

$$P^2 = Kr^3,$$

então:

$$v = \frac{2\pi r}{K^{1/2} r^{3/2}} = \frac{2\pi}{K^{1/2}} r^{-1/2},$$

$$L = m\frac{2\pi}{K^{1/2}} r . r^{-1/2} = m\frac{2\pi}{K^{1/2}} r^{1/2},$$

ou seja, **aumentando o raio da órbita r, aumenta o momentum angular orbital, compensando a redução do momentum angular de rotação (spin)**.

A força que "empurra" a Lua para fora é a gravidade exercida pelo bojo de maré mais próximo da Lua, que fica sempre um pouco "adiantado" em relação à Lua porque é arrastado junto com a Terra no movimento de rotação. A massa de água do bojo acelera a Lua, que ganha velocidade tangencial, se afastando da Terra (fig. 08.10).

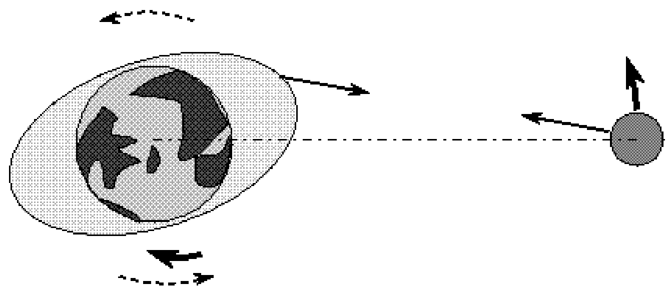

figura 08.10: O bojo de maré mais próximo da Lua não aponta exatamente para ela, mas sim para um ponto um pouco mais adiante dela, pois é arrastado pela Terra no seu movimento de rotação (indicado pelas setas pespontadas). A força gravitacional entre o bojo e a Lua (setas entre bojo e Lua), tende a alinhar o bojo com a Lua, ao mesmo tempo em que acelera a Lua. O resultado é que a Terra freia sua rotação e a Lua ganha velocidade tangencial, aumentando o raio de sua órbita (setas em negrito).

No futuro distante, daqui a cerca de 15 bilhões de anos, a sincronização da órbita da Terra com a Lua implicará em que o dia e o mês terão a mesma duração, que será igual a aproximadamente 35 dias atuais! No passado, a Terra devia girar mais rapidamente, e, portanto, o dia devia ser mais curto. De fato, **estudos paleontológicos indicam que 100 milhões de anos atrás o ano tinha 400 dias, o dia tinha 21 horas**, e as marés eram muito mais intensas, pois a Lua estava mais próxima. Atualmente a Lua está se afastando aproximadamente 3 cm por ano, que pode ser medido com a reflexão de feixes de laser no espelho deixado pelos astronautas na Lua. A evidência vem de certas criaturas marinhas cujas conchas têm bandas de crescimento diários e mensais, permitindo que os cientistas contem os números de bandas em um ciclo mensal em fósseis de idades diferentes.

Limite de Roche

Uma consequência das forças de maré é que um satélite em geral não pode chegar muito perto de seu planeta sem se romper. **O limite de Roche é a distância mínima do centro do planeta que um satélite fluido pode chegar sem se tornar instável frente a rompimento por maré.**

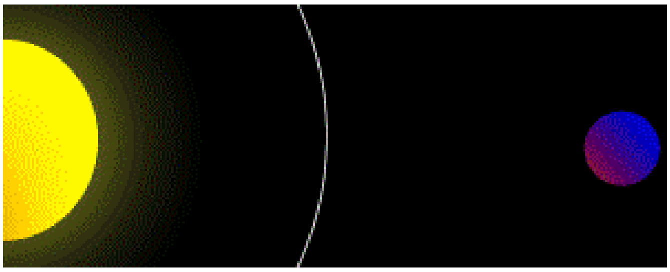

Figura 08.11: A curva branca representa o limite de Roche do planeta à esquerda. Se o satélite se aproximar do planeta além da linha branca ele será rompido pelas forças de maré.

Limite de Roche:

É a menor distância do centro do planeta que um satélite fluido pode chegar sem ficar instável frente a rompimento por maré.

Limite de Roche

$$d=2,44\left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3}R.$$

R = raio do planeta

ρ_M = densidade do planeta
ρ_m = densidade do satélite fluido

Em 1850, o astrônomo francês Edouard Roche (1820-1883) demonstrou que, para um *satélite fluido, mantido apenas por sua auto-gravidade*, de densidade média ρ_m, orbitando em torno de um planeta de densidade média ρ_M e raio *R*, a distância mínima do planeta em que o satélite pode orbitar estavelmente é

$$d=2,44\left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3}R.$$

Se o planeta e o satélite têm densidades iguais, o limite de Roche é 2,44 vezes o raio do planeta.

Uma derivação simples do limite se obtém considerando duas partículas de massas *m* iguais, e se tocando, isto é, separadas somente por uma distância *dr*. A força gravitacional entre as partículas é dada por:

$$F_G=\frac{Gmm}{(dr)^2},$$

e a força de maré de um corpo de massa *M*, e a uma distância *d*, sobre elas será:

$$F_M=\frac{2GMmdr}{d^3}.$$

Para as duas partículas permanecerem juntas, a força gravitacional entre elas tem que balançar a força de maré, logo

$$\frac{Gmm}{(dr)^2}=\frac{2GMmdr}{d^3},$$

e

$$d=(2M/m)^{1/3}dr.$$

Seja

$$\rho_M=\frac{M}{4/3\pi R^3},$$

e

$$\rho_m=\frac{2m}{8/3\pi(dr/2)^3},$$

então,

$$d=(16)^{1/3}\left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3} \text{ e } R=2,51\left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right).$$

O valor da constante numérica, 2,51 ao invés de 2,44, é porque não levamos em conta que as partículas formam um fluido (têm força de van der Waals atuando entre as partículas, além da força gravitacional).

Em 1974, Hans R. Aggarwald e Vern R. Oberbeck estudaram o caso de ruptura por maré de corpos esferoidais sólidos, rochosos ou gelados, mantidos coesos por forças de tensão intrínsecas de seu material. Encontraram que, para diâmetros maiores do que 40 km, a distância mínima que eles podem chegar de seu planeta sem quebrar é:

$$d = 1{,}38\left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3} R.$$

Exemplo:

Qual a menor distância que a Lua pode chegar da Terra sem se romper?

Usando

$$d = 1{,}38\left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3} R.$$

e, considerando que:

M_{Terra} = 5,97 x 10^{24} *kg;*

R_{Terra} = 6.370 *km;*

M_{Lua} = 7,35 x 10^{22} *kg,* e

R_{Lua} = 1.738 km,

obtemos:

$$\rho_{Terra} = \frac{M_{Terra}}{4/3\pi R^3_{Terra}} = 5\,514 kg/m^3,$$

$$\rho_{Lua} = \frac{M_{Lua}}{4/3\pi R^3_{Lua}} = 3342 kg/m^3.$$

Portanto,

$$d = 1{,}38\left(\frac{5\,514 kg/m^3}{3342 kg/m^3}\right)^{1/3} 6370 = 7527 km.$$

Naturalmente, os satélites ou corpos impactantes podem ser quebrados por outras causas, como por tensões aerodinâmicas, dependendo da densidade da atmosfera do planeta.

Enfim, os limites reais de aproximação mínima para os corpos serem estáveis frente a forças de maré dependem do tamanho e tensão interna dos corpos. Satélites sólidos podem chegar mais perto do planeta do que satélites fluidos porque as forças de tensão interna das rochas que o constituem o mantêm estável. Corpos menores do que 40 km podem chegar ainda mais perto do planeta sem quebrar por forças de maré desde que eles sejam pequenos e duros o suficiente.

Por exemplo, os anéis de Saturno estão dentro do limite de Roche de Saturno, o que significa que as pequenas partículas que formam o anel têm forças coesivas maiores do que as forças de maré. Entretanto, à medida que aumenta o tamanho da partícula, suas forças coesivas ficam menos importantes comparadas com as forças de maré, e essa é uma provável explicação para o fato dessas partículas nunca terem se juntado para formar um satélite. É possível que os anéis de Saturno sejam resultado de um satélite ou cometa que se aproximou demais do planeta e se quebrou devido às forças de maré.

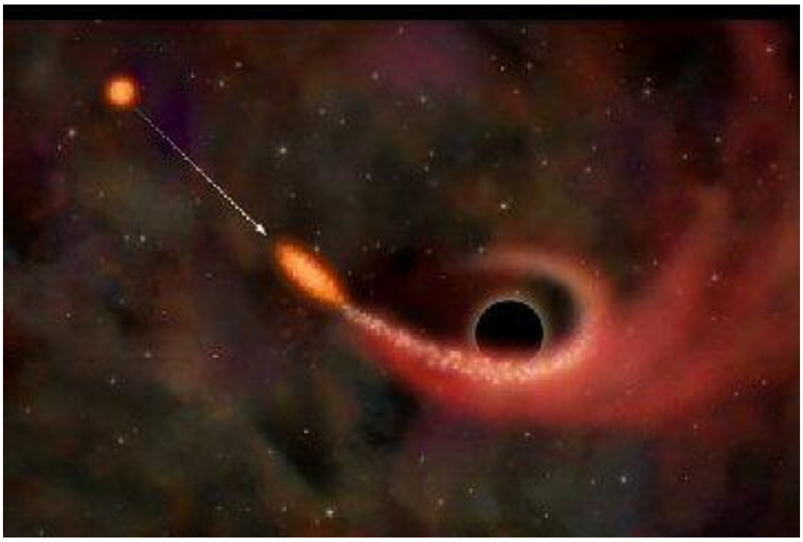

Figura 08.12: Simulação da disrupção da estrela RX J1242-11, observada pelos satélites Chandra (NASA), XMM-Newton (ESA), e ROSAT (Alemanda).

Precessão do eixo da Terra

Outro efeito das forças diferenciais do Sol e da Lua na Terra, além das marés, é o movimento de *precessão* da Terra.

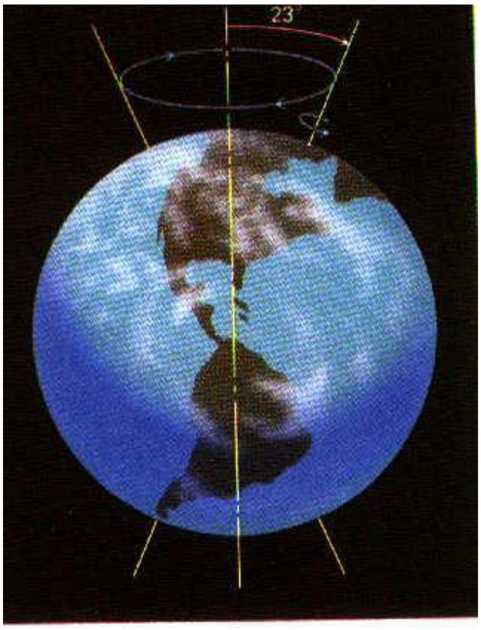

Figura 08.13 : O eixo de rotação da Terra está inclinado de 23°27´ em relação ao eixo da eclíptica (eixo central na figura), e precessiona em torno deste, descrevendo um círculo de raio angular igual a 23°27´.

Precessão do eixo da Terra:

As forças gravitacionais diferenciais da Lua e do Sol produzem um torque que tende a alinhar o eixo de rotação da Terra com o eixo da eclíptica, mas como esse torque é perpendicular ao momentum angular de rotação da Terra, seu efeito é mudar a direção do eixo de rotação, sem alterar sua inclinação.

O que causa a precessão?

A Terra não é perfeitamente esférica, mas sim achatada nos polos e bojuda no equador. Seu diâmetro equatorial é cerca de 40 km maior do que o diâmetro polar. Além disso, o plano do equador terrestre e, portanto, o plano do bojo equatorial, está inclinado 23° 26' 21,418" em relação ao plano da eclíptica, que por sua vez está inclinado 5° 8' em relação ao plano da órbita da Lua.

Por causa disso, as forças diferenciais (que ficam mais importantes nos dois bojos da Terra) tendem não apenas a achatá-la ainda mais, mas também tendem a "endireitar" o seu eixo, alinhando-o com o eixo da eclíptica (veja a Fig. 08.14).

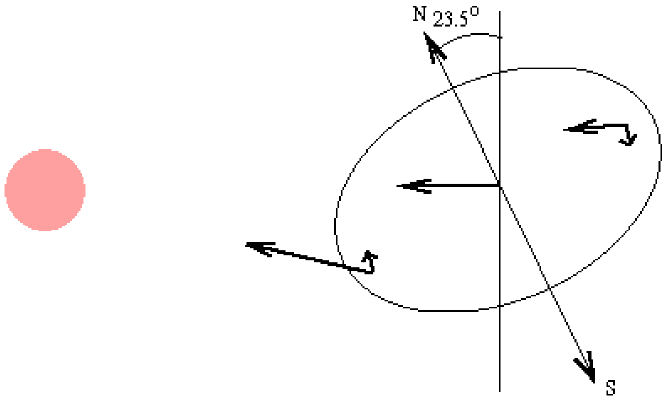

Figura 08.14: Forças gravitacionais atuando no centro e nos dois bojos equatoriais da Terra (aqui extremamente exagerados). Devido à inclinação do eixo de rotação da Terra, as forças de maré (representadas pelas setas pequeninas nos bojos) formam um par conjugado que tende a alinhar o eixo de rotação (eixo N-S, na figura) com o eixo da eclíplica (eixo vertical da figura).

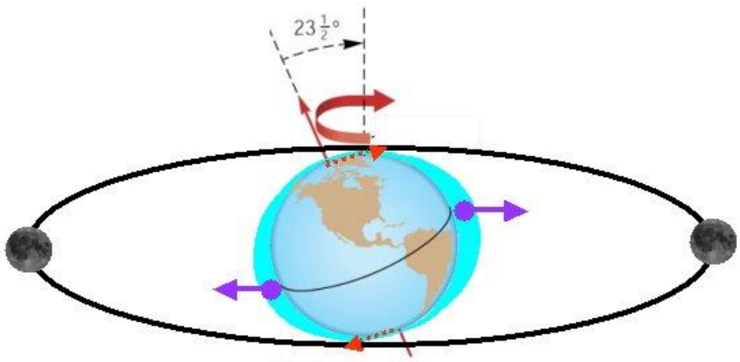

Figura 08.15: Ilustração de como a Terra está girando, o eixo da Terra não se alinha com o eixo da eclíptica, mas *precessiona* em torno dele, da mesma forma que um pião posto a girar precessiona em torno do eixo vertical ao solo.

No caso do pião (Fig. 08.16), o seu peso gera um torque $\vec{N}$:

$$\vec{N} = \vec{r} \times m.\vec{g},$$

onde $\vec{r}$ é o vetor posição do centro de massa do pião em relação ao ponto de contato com o solo, e $m\vec{g}$ é a força peso. Portanto o torque $\vec{N}$ é paralelo ao solo, perpendicular à força peso, e perpendicular ao momemtum angular de rotação do pião. Em módulo, seu valor é $N = mgr\ sen\ (\theta)$, sendo θ o ângulo de inclinação do eixo do pião em relação à vertical ao solo.

O efeito desse torque é variar o momentum angular $\vec{L}$ do pião. Essa variação é expressa por

$$d\vec{L} = \vec{N}dt,$$

ou seja, tem a mesma direção de $\vec{N}$.

Como $\vec{L}$ e $\vec{N}$ são perpendiculares, o torque não altera o módulo de $\vec{L}$, mas apenas sua direção, fazendo-o precessionar em torno do eixo perpendicular ao solo.

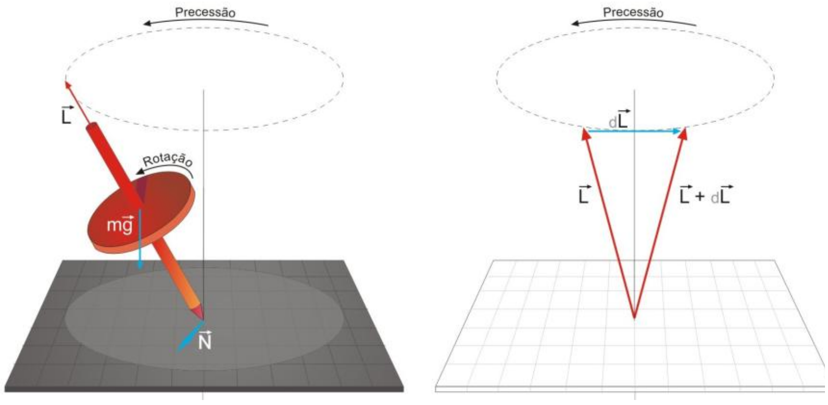

Figura 08.16: Um pião de peso ***mg*** e momentum angular de rotação ***L***; o peso provoca um torque ***N***, perpendicular a ***L***, que causa uma variação *d**L*** direcionada perpendicularmente a ***L***, mudando a direção de ***L*** sem alterar seu módulo.

Em virtude do movimento de precessão do eixo de rotação da Terra os pólos celestes não ocupam uma posição fixa no céu.

No caso da Terra, as forças gravitacionais diferenciais da Lua e do Sol produzem um torque que tende a alinhar o eixo de rotação da Terra com o eixo da eclíptica, mas como esse torque é perpendicular ao momentum angular de rotação da Terra, seu efeito é mudar a direção do eixo de rotação, sem alterar sua inclinação.

Portanto, os polos celestes não ocupam uma posição fixa no céu: cada polo celeste se move lentamente em torno do respectivo polo da eclíptica, descrevendo uma circunferência em torno dele com raio de 23,5°. O tempo necessário para descrever uma volta completa é 25 770 anos. Atualmente o Polo Celeste Norte está nas proximidades da estrela Polar, na constelação da Ursa Menor, mas isso não será sempre assim. Daqui a cerca de 13 000 anos ele estará nas proximidades da estrela Vega, na constelação de Lira.

Caminho aparente do Polo Norte Celeste no céu

Figura 08. 17: Caminho do polo norte celeste (círculo) em torno do polo da eclíptica (x no centro do círculo), devido ao movimento de precessão do eixo da Terra. O raio angular desse círculo é igual à obliquidade da eclíptica – 23°27'. Atualmente o polo norte celeste está em Polaris (estrela Polar), daqui a 13000 anos estará perto da estrela Vega. (A abreviatura AD ao lado do ano é usada em inglês para indicar os anos da era cristã).

Apesar de o movimento de precessão ser tão lento (apenas 50,290966" por ano), ele foi percebido já pelo astrônomo grego Hiparco, no ano 129 a.C., ao comparar suas observações da posição da estrela Spica (α Virginis) com observações feitas por Timocharis de Alexandria em 273 a.C. Timocharis tinha medido que Spica estava a 172° do ponto vernal, mas Hiparco media somente 174°. Ele concluiu que o ponto vernal havia se movido 2 graus em 144 anos.

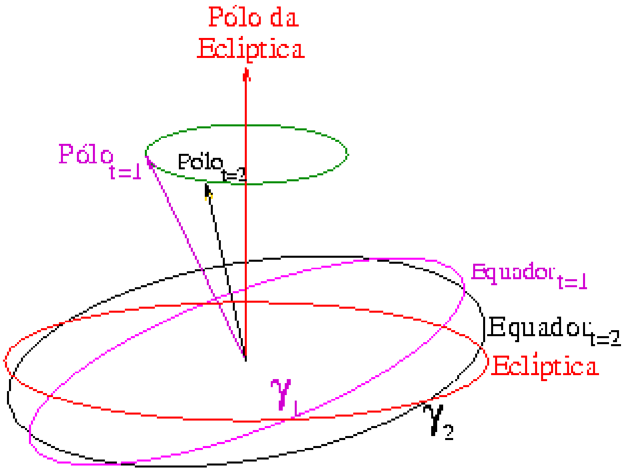

Figura 08.18: Círculo e eixo vermelho: a eclíptica e seu eixo. Círculo e eixo rosa: equador e eixo de rotação em uma época 1. Círculo e eixo preto: equador e eixo de rotação numa época 2. Nota-se o deslocamento do ponto Áries (representado pela letra grega gama (γ) ao longo da eclíptica entre as duas épocas.

Caminho aparente do Polo Sul Celeste no céu

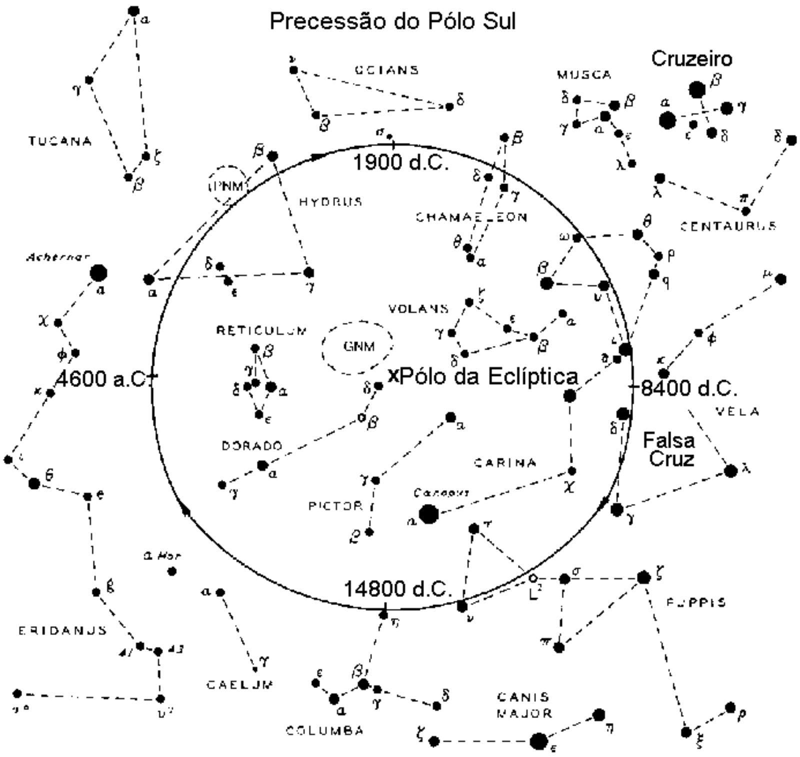

Figura 08.19 Caminho do polo sul celeste (círculo) entre as estrelas, devido ao movimento de precessão da Terra. Atualmente o polo sul celeste está entre a as constelações do Octante e do Camaleão. No ano 8400 vai estar na constelação da Vela (Falsa Cruz).

A precessão não tem nenhum efeito importante sobre as estações, uma vez que o eixo da Terra mantém sua inclinação de 23,5º em relação ao eixo da eclíptica enquanto precessiona em torno dele.

O Sol leva 20 min para se mover 50" na eclíptica (na verdade a Terra leva 20 min para se mover 50" na sua órbita). Por causa disso, o ano tropical, que é medido em relação aos equinócios, é 20 min mais curto do que o ano sideral, medido em relação às estrelas.

A precessão não tem nenhum efeito importante sobre as estações, uma vez que o eixo da Terra mantém sua inclinação de 23,5º em relação ao eixo da eclíptica enquanto precessiona em torno dele. Como o ano do nosso calendário é baseado nos equinócios, a primavera continua iniciando em setembro no hemisfério sul, e em março no hemisfério norte. A única coisa que muda são as estrelas visíveis no céu durante a noite em diferentes épocas do ano. Por exemplo, atualmente Órion é uma constelação característica de dezembro, e o Escorpião é uma constelação característica de junho. Daqui a 13 000 anos será o oposto.

Resumo

Forças gravitacionais diferenciais:

Um corpo extenso (não pontual) colocado no campo gravitacional de outro sofre forças gravitacionais de diferentes intensidades em diferentes pontos, originando as forças gravitacionais diferenciais. A força gravitacional diferencial ΔF é diretamente proporcional à massa do corpo originador do campo gravitacional (M), diretamente proporcional ao raio do corpo extenso (R) e inversamente proporcional ao cubo da distância entre o corpo originador do campo e o corpo extenso imerso nele:

$$\Delta F \sim MR/d^3$$

Marés na Terra:

São originadas pelas forças gravitacionais diferenciais da Lua e do Sol na Terra, sendo que a da Lua tem o dobro da intensidade da do Sol.

A atração gravitacional percebida pelo lado da Terra mais próximo da Lua é maior do que a percebida no centro da Terra. Em relação ao centro da Terra, um lado está sendo puxado no sentido da Lua e o outro lado está sendo puxado no sentido contrário. A água se a acumula nesses dois lados opostos da Terra.

O ciclo das marés segue o dia lunar, que tem duração de 24h 48min. Como os bojos de maré se formam simultaneamente em dois pontos diametralmente opostos da Terra, no mesmo ponto acontecem duas marés altas por dia, separadas de 12h24min.

Na Lua Nova e na Lua Cheia, as marés provocadas pela Lua e pelo Sol atuam na mesma direção e, portanto, se somam, produzindo as marés cheias mais altas e marés vazias mais baixas. Quando a Lua está em Quarto Crescente ou Quarto Minguante as diferenças entre a maré cheia e a maré vazia são pequenas.

As forças de maré entre Terra e Lua levaram à sincronização da rotação da Lua e estão causando a diminuição da velocidade de rotação da Terra, com o consequente afastamento da Lua.

Limite de Roche

É a menor distância ao centro do planeta que um satélite pode chegar sem ficar instável frente a rompimento por maré. Essa distância mínima vale aproximadamente 2,4 vezes o raio do planeta.

Precessão do Eixo da Terra

Decorrente das forças diferenciais do Sol e de Lua. As forças gravitacionais diferenciais da Lua e do Sol produzem um torque que tende a alinhar o eixo de rotação da Terra com o eixo da eclíptica, mas como esse torque é perpendicular ao momentum angular de rotação da Terra, seu efeito é mudar a direção do eixo de rotação, sem alterar sua inclinação.

Em virtude do movimento de precessão do eixo de rotação da Terra os polos celestes não ocupam uma posição fixa no céu.

A precessão não tem nenhum efeito importante sobre as estações, uma vez que o eixo da Terra mantém sua inclinação de 23,5º em relação ao eixo da eclíptica enquanto precessiona em torno dele.

Exercícios de fixação

As seguintes questões são para vocês fixarem os conteúdos trabalhados nesta aula. Devem ser respondidas por vocês individualmente antes do questionário de avaliação, não valem nota nem serão entregues.

Bom trabalho!

1. O que são forças gravitacionais diferenciais? O que origina o “diferencial” na força gravitacional diferencial?

2. Certifique-se que você entende o significado de cada termo do lado direito da expressão da força de maré

3. Sobre as marés oceânicas na Terra:

a) Qual a causa das marés na Terra?

b) Por que existem duas marés altas por dia, e não apenas uma?

c) Qual o intervalo de tempo entre duas mares altas?

d) As fases da Lua influenciam as marés? Como?

4. Como seriam as marés na Terra, comparadas com as reais, se:

a) a Lua estivesse mais perto?

b) a Terra fosse maior?

c) a Lua fosse menos massiva?

d) a Lua fosse maior, mas de mesma massa?

5. Qual a relação entre a rotação sincronizada da Lua e as marés?

6. Calcule a razão entre a força de maré na Lua, causada pela Terra, e compare com a força de maré na Terra, causada pela Lua. Qual é a maior? Quantas vezes é maior?

7. O que é limite de Roche?

8. Considere um planeta e seu satélite, com massas M e m respectivamente. Mantidas constantes as massas dos dois, como varia o limite de Roche desse planeta em relação a esse satélite se:

a) dobrar o raio do planeta?

b) dobrar o raio do satélite?

9. Qual a relação entre as forças diferenciais gravitacionais e o movimento de precessão da Terra? Como é esse movimento de precessão? Qual o seu período? A precessão muda as estações do ano? Explique.

10. Qual o efeito da precessão na posição das estrelas? Por que o ponto Áries tem esse nome se ele se localiza na constelação de peixes?