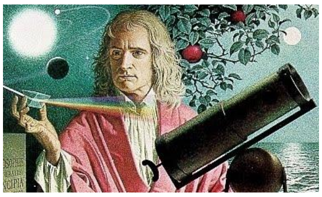
Aula 7: Newton e as generalizações das Leis de Kepler - Gravitação

Maria de Fátima Oliveira Saraiva, Kepler de Souza Oliveira Filho & Alexei Machado Müller

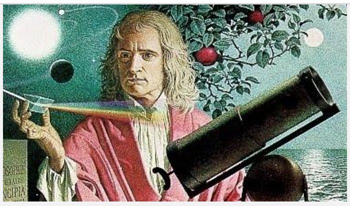


Isaac Newton (1643-1727).

Introdução

Prezados alunos, em nossa sétima aula, vamos estudar como Newton deu um embasamento teórico às leis de Kepler, mostrando que elas resultam de princípios físicos universais. Também vamos ver importantes aplicações das leis de Kepler na forma generalizada por Newton.

Bom estudo!



Objetivos

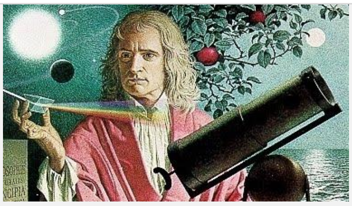
- descrever a lei da Gravitação Universal de Newton e explicar como ela fundamenta as leis de Kepler;
- explicar como a 3ª Lei de Kepler na formulação de Newton permite determinar as massas de corpos astronômicos;
- verificar que a energia do sistema determina o tipo de órbita que ele segue e permite calcular a velocidade em qualquer ponto da órbita;
- aplicar esses conceitos na resolução de problemas.

Como é possível "pesar" os astros?

Isaac Newton

Figura 07.01: Isaac Newton (1643-1727).

As leis de Kepler, na forma como ele as escreveu, eram leis empíricas, sem respaldo teórico. Kepler explicava como os planetas se moviam, mas não explicava porque se moviam assim. Embora reconhecesse que algum tipo de força devia manter os planetas em suas órbitas, ele não logrou encontrar uma explicação satisfatória para que tipo de força seria. Coube a Newton explicar as propriedades da força fundamental dominando os movimentos dos corpos astronômicos – a gravidade.



Gravitação Universal

Obviamente a Terra exerce uma atração sobre os objetos que estão sobre sua superfície. Newton se deu conta de que esta força se estendia até a Lua e produzia a aceleração centrípeta necessária para manter a Lua em órbita. O mesmo acontece com o Sol e os planetas. Então Newton formulou a hipótese da existência de uma força de atração universal entre os corpos em qualquer parte do Universo.

A força centrípeta que o Sol exerce sobre um planeta de massa ***m***, que se move com velocidade de módulo ***v*** a uma distância ***r*** do Sol, é dada por:

$$F = m.\frac{v^2}{r},$$

Assumindo neste instante uma órbita circular, que mais tarde será generalizada para qualquer tipo de órbita, o período ***P*** do planeta é dado por:

$$P = \frac{2\pi r}{v} \rightarrow v = \frac{2\pi r}{P}.$$

Pela 3ª Lei de Kepler,

$$P^2 = K r^3,$$

onde a constante ***K*** depende das unidades de ***P*** e ***r***.

Temos então que:

$$v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{K r^3} = \frac{4\pi^2}{K r} \Rightarrow v^2 \alpha \frac{1}{r}.$$

Seja ***m*** a massa do planeta e ***M*** a massa do Sol. Substituindo-se esta velocidade na expressão da força centrípeta exercida pelo Sol (***F***) no planeta, a força pode então ser escrita como:

$$F \alpha \frac{m}{r^2},$$

E, de acordo com a 3ª Lei de Newton, o planeta exerce uma força de mesma intensidade e de sentido oposto sobre o Sol, de massa M, de modo que também podemos dizer que:

$$F \alpha \frac{M}{r^2}.$$

Newton deduziu então que:

$$F = \frac{GMm}{r^2}.$$

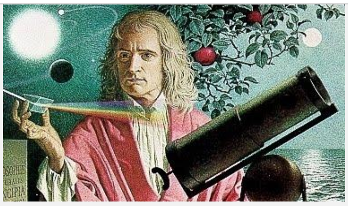
onde **G** é uma constante de proporcionalidade que depende do sistema de unidades adotado. Tanto o Sol quanto o planeta que se move em torno dele experimentam a mesma força, mas o Sol permanece aproximadamente no centro do Sistema Solar porque a massa do Sol é aproximadamente mil vezes o valor da massa de todos os planetas somados.

Newton então concluiu que para que a atração universal seja correta, deve existir uma força atrativa entre pares de objetos em qualquer região do universo, e esta **força deve ser proporcional a suas massas e inversamente proporcional ao quadrado de suas distâncias.**

Newton mostrou que
A mesma força que provoca a queda dos corpos na Terra faz com que a Lua gire em torno da Terra e os planetas em torno do Sol;
as mesmas leis que determinam os movimentos dos corpos na Terra também governam os movimentos dos corpos celestes.

A força de atração gravitacional:

- é atrativa;
- é diretamente proporcional ao produto das massas dos corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.



Leis de Kepler generalizadas

Newton combinou suas leis do movimento e da gravitação universal para deduzir as três leis de Kepler.

1ª Lei de Kepler:

A dedução da primeira lei exige cálculo vetorial, então não vamos deduzi-la aqui. Vamos aceitar que Newton provou que a lei das órbitas elípticas dos planetas é uma consequência do tipo de força $\left(F\alpha\, 1/r^2\right)$ que atua entre os planetas e o Sol. Essa força gera uma aceleração que faz os planetas se moverem em órbitas elípticas.

No caso mais geral:

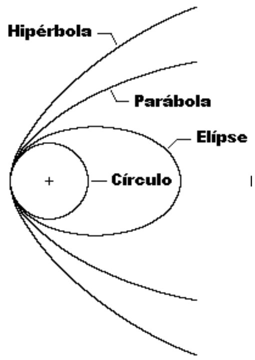
As únicas órbitas possíveis para um corpo interagindo gravitacionalmente com outro são as secções cônicas: círculo, elipse, parábola ou hipérbole (Fig. 07.02)

Se o corpo tiver movimento periódico, como os planetas, sua trajetória será circular ou elíptica; se o movimento for não periódico, como é o caso de alguns cometas e asteróides, a trajetória será parabólica ou hiperbólica.

O fator decisivo que define o tipo de órbita é a **energia total** do sistema (o zero da energia potencial gravitacional é tomado no infinito).

- energia < 0 → órbita elíptica ou circular
- energia = 0 → órbita parabólica
- energia > 0 → órbita hiperbólica

A força gravitacional faz com que os planetas se movam em órbitas elípticas.



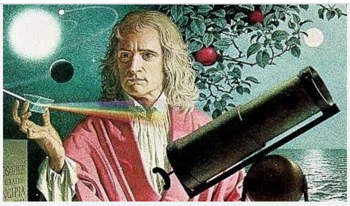
$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\,\cos\theta}$$

Figura 07.02: Seções cônicas e equação da elipse.

Os tipos de órbitas possíveis são: elíptica, circular (fechadas) parabólica e hiperbólica (abertas).

Todas as seções cônicas podem ser descritas pela equação da elipse, dependendo dos valores que seus elementos podem assumir:

- Um **círculo** pode ser pensado como uma elipse com excentricidade nula e semieixo maior igual ao semieixo menor: **e = 0 e a = b**;
- Uma **parábola** pode ser pensada como uma elipse com excentricidade igual a 1 e semieixo maior infinitamente grande: **e = 1 e a = ∞;**
- Uma **hipérbole** pode ser pensada como uma elipse com excentricidade maior do que 1 e semieixo maior negativo**: e > 1 e a < 0**.



Lembre-se:

Para fins de apresentação neste texto, as grandezas vetoriais estão representadas em negrito.

2ª Lei de Kepler:

No movimento orbital o momentum angular permanece constante, sendo em cada ponto igual à área varrida pelo raio que une o planeta ao Sol numa unidade de tempo.

2ª Lei de Kepler:

A dedução da segunda lei parte da definição de momentum angular:

(1)<u>Definição de momentum angular</u>:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\mathbf{x}\mathbf{p}$$

onde as grandezas vetoriais estão representadas em **negrito** e o produto vetorial (×) é tal que o vetor resultante é perpendicular ao plano definido pelos dois vetores envolvidos na operação, e tem módulo igual ao produto dos módulos dos dois vetores pelo seno do ângulo entre eles.

Ou seja, se o ângulo entre **r** e **v** é α, então:

$$L = r\, m\, v\, \mathrm{sen}\, \alpha.$$

Se **r** e **v** são paralelos, $\mathbf{r}\,\mathbf{x}\mathbf{v} = 0$

(2) <u>Prova de que o momentum angular de um planeta em relação ao Sol é constante:</u>

$d\mathbf{L}/dt = d(\mathbf{r}\mathbf{x}\mathbf{p})/dt = (d\mathbf{r}/dt\times\mathbf{p} + \mathbf{r}\times(d\mathbf{p}/dt) = \mathbf{v}\times\mathbf{p} + \mathbf{r}\times(d\mathbf{p}/dt) = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$.

Se **F** tem a mesma direção de **r**, como é o caso da força gravitacional, então $\mathbf{r}\times\mathbf{F} = 0 \Rightarrow d\mathbf{L}/dt = 0 \Rightarrow \mathbf{L}$ é constante.

(3) <u>Prova de que o módulo do momentum angular do planeta é igual à área varrida pela linha reta que o liga ao Sol</u>

Considerando a Figura 07.03:

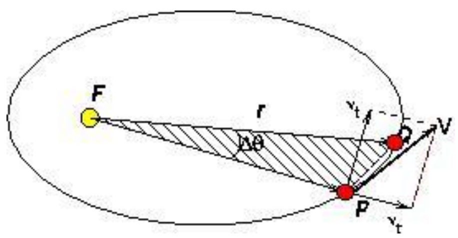


Figura 07.03: A área descrita pela linha reta (r) unindo o ponto P a F, quando ele se desloca até Q, é aproximadamente (para um intervalo de tempo pequeno) igual à área de um triângulo de base $r\Delta\theta$ e altura r.

$$\Delta A = 1/2\, r\, \Delta\theta.$$

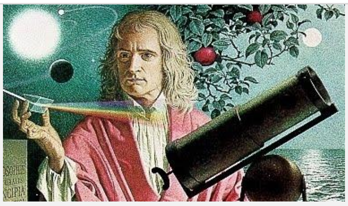
Em um tempo Δt:

$$\Delta A/\Delta t = 1/2\, r^2\Delta\theta/\Delta t.$$

O *momentum angular* (**L**) é definido como:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times m\mathbf{v} \;\rightarrow\; L = r\, m v_t.$$

onde chamamos v_t à componente de **v** na direção perpendicular a **r**. Para um intervalo de tempo Δt pequeno, o pedaço da órbita percorrido durante esse tempo, que é igual ao arco $r\,\Delta\theta$, pode ser aproximado pelo segmento de reta $v_t\,\Delta t$ ou seja, $v_t = r\,\Delta\theta/\Delta t$, *de maneira que*



$$L = m\, r^2\, \Delta\theta/\Delta t.$$

Comparando a expressão de $\Delta A/\Delta t$ com a expressão de L, vemos que:

$$\Delta A/\Delta t = 1/2\; L/m,$$

Como o momentum angular e a massa são constantes, $\Delta A/\Delta t$ é constante.

$\Delta A/\Delta t$ é chamada velocidade "areal" (ou "areolar") do planeta, que é igual à área varrida pelo raio vetor que une o planeta ao Sol por intervalo de tempo.

Vemos que a lei das áreas de Kepler é uma consequência direta da lei de conservação do momentum angular: o momentum angular dos planetas em relação ao Sol é constante, portanto sua velocidade areal é constante.

Considerando um intervalo de tempo infinitesimal, e adotando:

$$h = L/m$$

(momentum angular por unidade de massa), temos:

$$dA/dt = h/2$$

Integrando essa equação em um período orbital completo temos:

$$\int dA = h/2 \int dt,$$

ou

$$A = h/2\; P.$$

Como a área da elipse é

$$A = \pi ab,$$

o momentum angular por unidade de massa é:

$$h = 2\pi ab/P.$$

3ª lei de Kepler na forma de Newton:

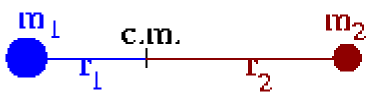


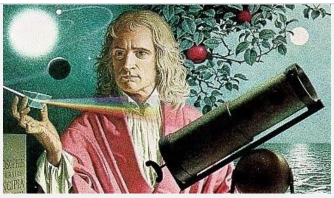
Figura 07.04: Dois corpos com massas m_1 e m_2, afastados de uma distância r_1 e r_2, respectivamente, do centro de massa (c.m.) do sistema.

Suponha dois corpos de massas m_1 e m_2, afastados do **centro de massa** por uma distância r_1 e r_2. A atração gravitacional entre eles depende da distância total entre eles e é dada por:

$$F_G = \frac{G m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2}.$$

Se eles estiverem em órbitas circulares com velocidades de módulo v_1 e v_2, a aceleração centrípeta, **dirigida ao centro de massa**, é dada por:

$$F_1 = \frac{m_1 v_1^2}{r_1},$$



3ª Lei de Kepler:

Modificada por Newton: $M.P^2/a^3$ = constante.

e

$$F_2 = \frac{m_2 v_2^2}{r_2}.$$

Como estamos assumindo órbitas circulares e, por definição de centro de massa, **os períodos têm que ser os mesmos**, ou o centro de massa se moveria, temos:

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{P} \Rightarrow v_1^2 = \frac{4\pi^2 r_1^2}{P^2},$$

e, similarmente, para m_2. Para que os corpos permaneçam em órbitas, as forças precisam ter módulos idênticos:

$$F_1 = F_2 = F_G = \frac{G m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{m_1 v_1^2}{r_1} = \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{P^2},$$

e

$$\frac{G m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{m_2 v_2^2}{r_2} = \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{P^2}.$$

Eliminando-se m_1 na primeira e m_2 na segunda e somando-se, obtemos:

$$\frac{G(m_1 + m_2)}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{4\pi^2 (r_1 + r_2)}{P^2},$$

ou:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} (r_1 + r_2)^3.$$

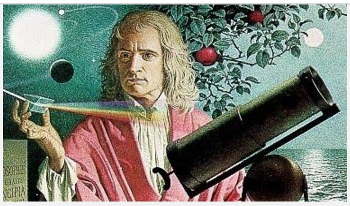
Identificando-se $a=(r_1+r_2)$ como a separação entre os corpos, e comparando com a 3ª Lei de Kepler, obtemos:

$$K = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}.$$

Isso nos diz que a "constante" K, definida como a razão P^2/a^3, só é constante realmente se $(m_1 + m_2)$ permanece constante. Isso é o que acontece no caso dos planetas do sistema solar; **como todos os planetas têm massa muito menor do que a massa do Sol,** já que o maior planeta, Júpiter, tem quase um milésimo da massa do Sol, **a soma da massa do Sol com a massa do planeta é sempre aproximadamente a mesma**, independente do planeta. Por essa razão Kepler, ao formular sua 3ª lei, não percebeu a dependência com a massa.

Mas, se considerarmos sistemas onde os corpos principais são diferentes, então as razões P^2/a^3 serão diferentes. Por exemplo, todos os satélites de Júpiter têm praticamente a mesma razão $P^2/a^3 = K_J$, que, portanto podemos considerar constante entre eles, mas essa constante é diferente da razão $P^2/a^3 = K_{\odot}$ comum aos planetas do sistema solar.

Para qualquer conjunto de sistemas interagindo gravitacionalmente, podemos escrever:



$$M_1K_1 = M_2K_2 = \ldots = M_nK_n = 4\pi^2/G,$$

onde M= massa do sistema e $K = P^2/a^3$.

Determinação de massas

3ª Lei de Kepler na forma de Newton permite determinar massas de corpos astronômicos.

A terceira lei de Kepler na forma derivada por Newton, permite determinar massas de corpos astronômicos, desde que esse corpo tenha outro orbitando-o, de maneira que se possa medir o período do sistema e a separação entre os dois corpos.

$$M + m = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{a^3}{P^2}.$$

A massa medida será sempre a massa do sistema (soma da massa dos dois corpos), mas se um deles for muito mais massivo do que o outro, pode-se considerar que a massa medida é a massa do corpo de maior massa (quando $M+m \sim M$).

G = constante de gravitação universal

No SI (m,kg,s):

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

No "sistema astronômico"(UA,$M_{sol,}$ ano):

$G = 4\pi^2\ UA^3/(M_{Sol}\ ano^2)$

No sistema internacional de unidades, em que a massa é medida em quilogramas, a distância em metros e o período em segundos,

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N\,m^2/kg^2 = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m3/(kg{\cdot}s^2).$$

Mas, em Astronomia, muitas vezes é mais conveniente adotar outras unidades que não as do sistema internacional. Por exemplo, em se tratando de sistemas nos quais o corpo maior é uma estrela, costuma-se determinar sua massa em unidades de massa do Sol, ou massas solares (massa do Sol = $M_\odot$), seus períodos em anos e as distâncias entre si em unidades astronômicas. Já em sistemas em que o corpo maior é um planeta, é conveniente expressar sua massa em unidades de massas da Terra (massa da Terra = $M_\oplus$), seu período em meses siderais e suas distâncias relativas em termos da distância entre Terra e Lua. Nesses sistemas particulares, oa terceira lei de Kepler pode ser escrita como

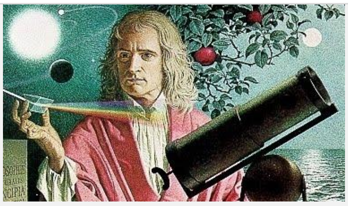
$$M + m = \frac{a^3}{P^2},$$

a qual é especialmente útil para a determinação de massas de corpos astronômicos.

Note que ao usarmos a terceira lei de Kepler nesaa forma, estamos assumindo que o valor numérico de G é $4\pi^2$, e portanto não podemos usar as unidades do sistema internacional, e sim temos que usar um "sistema de unidades astronômico", em que a unidade de massa é massa do Sol, a unidade de tempo é o ano e a unidade de comprimento é a unidade astronômica.

A expressão também é válida se expressamos as massas em massas terrestres, o período em meses siderais (27,33 dias) e o semieixo maior (a) em termos da distância Terra-Lua.

Por exemplo, caso se observe o período orbital e a distância de um satélite a seu planeta, pode-se calcular a massa combinada do planeta e do satélite, em massas solares ou massas terrestres. Como a massa do satélite é muito pequena comparada com a massa do planeta, a massa calculada $(m+M)$ é essencialmente a massa do planeta (M).



Da mesma forma, observando-se o tamanho da órbita de uma estrela dupla, e o seu período orbital, podem-se deduzir as massas das estrelas no sistema binário. De fato, pode-se usar a terceira lei de Kepler na forma revisada por Newton para estimar a massa de qualquer objeto astronômico, desde que esse objeto esteja em interação gravitacional com outro cujo movimento resultante dessa interação seja detectável.

Exemplos de uso da 3ª Lei de Kepler

Exemplo 1

Determinar a massa do Sol considerando o movimento da Terra em torno dele.

Sabemos que a Terra orbita o Sol em 1 ano. Podemos usar a relação

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}.(r_1+r_2)^3,$$

e lembrar que $a = r_1 + r_2 = 1\ UA = 1{,}5 \times 10^{11}\ m$.

Reescrevendo:

$$(m_1+m_2) = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2}.$$

Como $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}$ e P = 1 ano = $3{,}16 \times 10^7\ s$, obtemos

$$m_{Sol} + m_{Terra} = \frac{4(3{,}14)^2 \text{x} \left(1{,}5\text{x}10^{11} m\right)^3}{6{,}67\text{x}10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2} \text{x} (3{,}16\text{x}10^7 s)^2} = 2\text{x}10^{30} kg.$$

Exemplo 2:

Deimos, o menor dos dois satélites de Marte, tem período sideral de 1,262 dias e uma distância média ao centro de Marte de 23.500 *km*. Qual a massa de Marte?

Podemos resolver este problema de diversas maneiras. Aqui vamos mostrar algumas delas.

a) Calculando a massa de Marte diretamente em massas terrestres. (Vamos usar a notação: Marte = Ma; Deimos = *D*; Terra = ⊕ e Lua = *L*).

I - Uma maneira de resolver o problema é comparando os parâmetros da órbita de Deimos em torno de Marte com os parâmetros da órbita da Lua em torno da Terra, sem introduzir o valor da constante.

Desprezando a massa de Deimos e da Lua frente às massas de seus respectivos planetas, podemos escrever:

$M_{Ma}K_{Ma} = M_{\oplus}K_{\oplus}$, sendo $K_{Ma} = (P_D)^2/(a_D)^3$

e $K_{\oplus} = (P_L)^2/(a_L)^3$

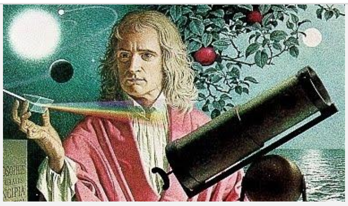
Então:

$$\frac{M_{Ma}}{M_{\oplus}} = \frac{(P_L)^2/(a_L)^3}{(P_D)^2/(a_D)^3} = \left(\frac{P_L}{P_D}\right)^2 \left(\frac{a_D}{a_L}\right)^3,$$

Sabendo que:

P_L = 27, 32 dias,

P_D = 1, 262 dias,



Temos:

$$\frac{M_{Ma}}{M_\oplus}=\left(\frac{27,32\,dias}{1,262\,dias}\right)^2\left(\frac{23\,500\,km}{384\,000\,km}\right)^3=0,1,$$

$$M_{Ma}=0,1M_\oplus.$$

II. Podemos chegar ao mesmo resultado usando a expressão formal da 3ª Lei de Kepler (equação 1.3), escrevendo as distâncias em termos da distância Terra-Lua, as massas em massas terrestres, e os períodos em termos do período da Lua, ou seja, usando o sistema de unidades [distância T-L (d_{TL}), massa terrestre ($M_\oplus$), mês sideral (mês)]:

Fazendo as transformações de unidades:

P_D = (*1, 262/27, 32*) meses = *4, 62*×*10*$^{-2}$ meses,

a_D = (*23 500/384 000*) d_{TL} = *6, 1*×*10*$^{-2}$ d_{TL},

$$G=4\pi^2(d_{TL})^3/(M_\oplus meses^2)\rightarrow$$
$$\frac{4\pi^2}{G}=1(M_\oplus\, meses^2)/(d_{TL})^3.$$

Temos:

$$M_{Ma}=\frac{(6,1x10^{-2})^3}{(4,62x10^{-2})^2}M_\oplus\rightarrow M_{Ma}=0,1M_\oplus.$$

2. Calculando diretamente a massa de Marte em massas solares($M_\odot$)

a. Comparando o movimento de Deimos em torno de Marte com o movimento da Terra em torno do Sol:

$$M_{Ma}.K_{Ma}=M_\odot.K_\odot$$

onde $K_\odot=(P_\odot)^2/\left(a_\odot\right)^3$, e $K_{Ma}=(P_D)^2/(a_D)^3$.

Então:

$$\frac{M_{Ma}}{M_\odot}=\frac{(P_\oplus)^2/(a_\oplus)^3}{(P_D)^2/(a_D)^3}=\left(\frac{P_\oplus}{P_D}\right)^2\left(\frac{a_D}{a_\oplus}\right)^3.$$

Sabendo que:

$P_\oplus$ = 365, 25 dias,

P_D = 1, 262 dias,

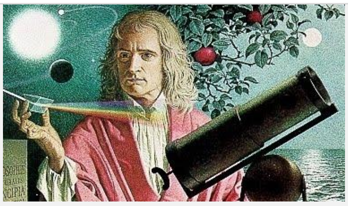
$a_\oplus$ = 1, 5×10^8 km = 1 *UA* e

a_D = 2, 35×10^4 *km.*

Temos:

$$\frac{M_{Ma}}{M_\odot}=\left(\frac{365,25\,dias}{1,262\,dias}\right)^2\left(\frac{2,35x10^4\,km}{1,5x10^8\,km}\right)^3=3,2x10^{-7}.$$

$$M_{Ma}=3,2x10^{-7}M_\odot.$$



II - Usando a 3.a lei de Kepler na forma modificada por Newton e adotando o sistema de unidades [UA, $M_\odot$, ano].

$$M_{ma}+m_D \cong M_{Ma}=\frac{4\pi^2}{G}\frac{a_D{}^3}{P_D{}^2}.$$

Fazendo a transformação de unidades:

P_D = (1, 262/365, 25) anos = 3, 46×10^{-3} anos;

a_D = (2, 35×10^4/1, 5×10^8) UA = 1, 57×10^{-4} UA;

$$G=4\pi^2\, UA^3 / M_\odot\, ano^2 \rightarrow 4\pi^2 / G = 1(M_\odot\, ano^2)/UA^3.$$

Temos:

$$M_{Ma}=\frac{\left(1{,}57x10^{-4}\right)^3}{(3{,}46x10^{-3})^2}M_\odot \rightarrow M_{Ma}=3{,}2x10^{-7}M_\odot.$$

III - Calculando diretamente a massa de Marte em quilogramas, ou seja, usando o Sistema Internacional [m, kg, s]

$$M_{Ma}+m_D \cong M_{Ma}=\frac{4\pi^2}{G}\frac{(a_d)^3}{(P_D)^2}.$$

Escrevendo todos os dados em unidades do Sistema Internacional:

P_D = 1,262 dias = 1,09×10^5 s,

a_D = 23.500 km = 2,35×10^5 m,

G = 6,67×10^{-11} $m^3/(kg\ s^2)$.

Temos:

$$M_{Ma}=\frac{4\pi^2}{6{,}67x10^{-11}}\frac{kg\,s^2}{m^3}\frac{(2{,}35x10^5\,m)^3}{(1{,}09x10^5\,s)^2}\Rightarrow M_{Ma}=6{,}4x10^{23}\,kg.$$

Exemplo 3: Duas estrelas idênticas ao Sol giram uma em torno da outra a uma distância de 0,1 UA. Qual o período de revolução das estrelas?

$$2M_\odot=\frac{(0{,}1UA)^3}{P^2}\Rightarrow P=\sqrt{\frac{0{,}001}{2}}=0{,}22\,anos.$$

Equação da Energia

Vamos considerar um sistema de dois corpos interagindo gravitacionalmente, onde

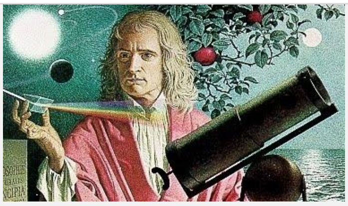
m_1 e m_2 = massas dos corpos;
v_1 e v_2 = módulos de suas velocidades;
r = distância entre os corpos.

Conservação da energia no movimento orbital

Chamando W o trabalho realizado pela força gravitacional sobre um corpo que se move entre dois pontos A e B:

$$W_{AB}=\int_A^B \mathbf{F}.d\,\mathbf{x},$$

onde $d\mathbf{x}$ é um elemento infinitesimal da trajetória.



Para calcular o valor dessa equação, observamos que:

$$\mathbf{F}.d\mathbf{x} = m \,.\, d\mathbf{v}/dt \,\mathbf{.}\, \mathbf{v}dt = m(\mathbf{v}.d\mathbf{v}) = d(mv^2/2)$$

A equação do trabalho fica:

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \,.\, d\,\mathbf{x} = \int_A^B d\,(mv^2/2) = (mv^2/2)_B - (mv^2/2)_A =$$

$$EC_B - EC_A$$

onde EC = energia cinética.

Por outro lado, como a força que está atuando é a força gravitacional entre dois corpos m_1 e m_2, temos que:

$$\mathbf{F}.d\mathbf{x} = -\,G\,m_1\,m_2/r^2\,dr = d(G\,m_1\,m_2/r)$$

e a equação do trabalho fica:

$$W = (G\,m_1\,m_2/r)_B - (G\,m_1\,m_2/r)_A = EP_A - EP_B$$

onde

$$EP = \text{energia potencial} = Gm_1\,m_2/r$$

Combinando as duas equações do trabalho encontradas:

$$EC_B - EC_A = EP_A - EP_B$$

ou

$$EC_B + EP_B = EC_A + EP_A$$

e chamando $E = EC + EP$ = Energia total do sistema

$$E_A = E_B = \text{constante.}$$

Sabendo que a energia total se conserva nesse sistema,

$$\text{Energia total} = 1/2(m_1v_1^2) + 1/2(m_2v_2^2) - Gm_1m_2/r = \text{constante.}$$

Da conservação do momentum linear total:

$m_1v_1 = m_2v_2$ (onde consideramos momentum linear total = 0).

Então:

$$v_1 = m_2v_2/m_1 \text{ e } v_2 = m_1v_1/m_2 \qquad \textbf{(1)}$$

Definindo uma velocidade relativa $\mathbf{v}$ como:

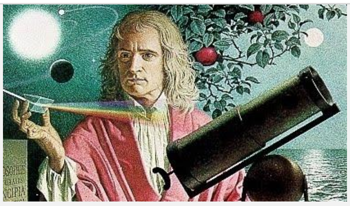
$$\mathbf{v} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}.$$

Como $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ têm mesma direção e sentidos contrários, o módulo de $\mathbf{v}$ é dado por $v = v_1 + v_2$:

$$v_1 = v - v_2 \text{ e } v_2 = v - v_1 \qquad \textbf{(2)}$$

Substituindo **(2)** em **(1)** podemos escrever:

$$v_1 = [m_2/(m_1+m_2)]v \text{ e } v_2 = [m_1/(m_1+m_2)]v.$$



Energia total:

no movimento orbital é constante.

Velocidade na órbita circular:

é dada por:

$v_{circ} = (GM/r)^{1/2}$.

Substituindo na equação da energia total:

$$Energia\ total = m_1m_2/(m_1+m_2)[v^2/2 - G(m_1+m_2)/r]$$

Calculando o valor da energia total no periélio, onde

$$r = a(1-e) \text{ e } v^2 = 4\pi^2a^2/P^2[(1+e)/(1-e)]$$

e, lembrando que

$$P^2 = [4\pi^2/G(m_1+m_2)]a^3,$$

encontramos que a energia total vale:

$$E = -Gm_1m_2/2a.$$

E a equação da energia, ou **equação da velocidade**, fica:

$$v^2 = G(m_1+m_2)\left[(2/r)-(1/a)\right].$$

Velocidade Circular

Na órbita circular $a \equiv r$, e substituindo na equação da velocidade temos:

$$v^2_{circ} = G\ (m1+m2)[2/r - 1/r] = G\ (m1+m2)/r \Rightarrow$$

$$v_{circ} = \sqrt{G(m_1+m_2)/r}.$$

Para uma órbita circular, vemos que a **energia total é negativa**, já que:

$$E = -Gm_1m_2/2r < 0.$$

Velocidade de Escape

Da equação de velocidade se pode deduzir facilmente a **velocidade de escape** do sistema, que representa a velocidade mínima para que o corpo escape da atração gravitacional do sistema.

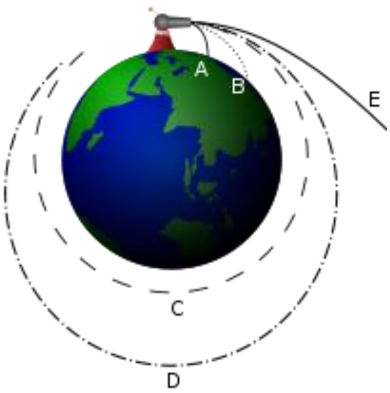
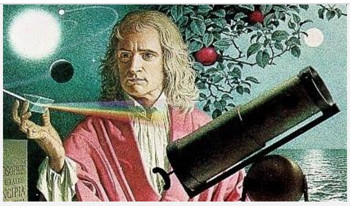


Figura 07.05: ilustração das trajetórias descritas por um projétil lançado paralelamente à superfície da Terra. Aumentando gradativamente a velocidade de lançamento termos órbitas elipticas com pericentro no interior da Terra (trajetórias A e B), órbita circular (C), órbitas elípticas com pericentro no ponto de lançamento (trajetória D) e as órbitas abertas (E), cujo limite é a órbita parabólica, correspondente ao lançamento com velocidade igual à velocidade de escape. Fonte da figura: Wikipedia.



Velocidade na órbita parabólica (velocidade de escape):

$V_{esc} = (2GM/r)^{1/2}$.

Por definição, um corpo lançado com velocidade igual à velocidade de escape vai "parar" no infinito ($v = 0$ em $r = \infty$), tendo energia total nula ($E= 0$). Já vimos que se a energia total do sistema é nula a órbita é parabólica, e que uma parábola pode ser considerada uma elipse com $a = \infty$.

Substituindo esse valor de a na equação da velocidade temos:

$$v^2_{esc} = G\,(m1+m2)[2/r - 1/\infty] = 2G(m1+m2)/r \Rightarrow$$

$$v_{esc} = \sqrt{2G(m_1 + m_2)/r}$$

Para uma órbita hiperbólica, a energia total é positiva; a energia cinética é tão grande que a partícula pode escapar do sistema e se afastar dele. A parábola é o caso limite entre a órbita fechada (elipse) e a órbita aberta (hipérbole). Halley, usando o método de Newton, encontrou que vários cometas têm órbitas que podem ser consideradas parabólicas.

Exemplos

1. O semieixo do planetóide 1.982 *RA* é de 1,568 *UA* e sua distância ao Sol em 8 de outubro de 1982 era de 1,17 *UA*. Qual era sua velocidade?

Como

$$v^2 = G(m_1 + m_2)\left[(2/r) - (1/a)\right],$$

$G = 6,67\times10^{-11}\ m^3\,kg^{-1}$, $m_{Sol} >> m_{planetoide}$, $m_{Sol} = 1{,}9891\times10^{30}\,kg$, $a = 1{,}568\ UA$, $r = 1{,}17\ UA$ e $1\ UA = 150\times10^9\,m$,

temos:

$$v = 31.000\ m/s = 31\ km/s.$$

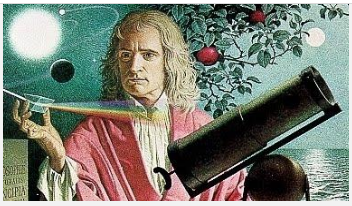
2) Qual é a altura de um satélite geoestacionário? Se o satélite é geoestacionário, isto é, permanece posicionado sobre um mesmo local da Terra, então seu período orbital tem que ser igual a um dia sideral (23 *h* 56*min*) = 86 160 segundos. Usando a Terceira Lei de Kepler,

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_T + m_s)},$$

com $M_T = 5,98 \times 10^{24}\ kg$, $m_s << M_T$ e $G = 6,67 \times 10^{-11}\ N\cdot m^2/kg^2$, temos:

$$a = \left[\frac{P^2 G M_T}{4\pi^2}\right]^{1/3} = 42.172\,km.$$

Como o raio da Terra é R_T = 6.370 *km*, então a altura será (a - R_T)= 42.172 *km* – 6.370 *km* = 35.800 *km*.



3) Se quisermos enviar um satélite até a Lua ou qualquer outro planeta, precisamos primeiro vencer o campo gravitacional da Terra. Qual é a velocidade necessária para um satélite artificial escapar do campo gravitacional da Terra?

Como a massa do satélite pode ser desprezada em relação à massa da Terra:

$$v_{esc}^{\otimes} = \sqrt{\frac{2GM_{\otimes}}{R_{\otimes}}} = \sqrt{\frac{2x6,67x10^{-11}Nm^2/kg^2x5,95x10^{24}kg}{6370.000m}} = 11,2km/s.$$

4) A órbita de menor energia para lançamento de uma nave a Marte, conhecida como transferência de Hohmann, é aquela que tem uma distância no periélio de 1UA (semieixo maior da órbita da Terra) e uma distância de afélio de 1,52 *UA* (semieixo maior da órbita de Marte). Qual é o tempo de viagem para uma nave interplanetária seguindo essa órbita?

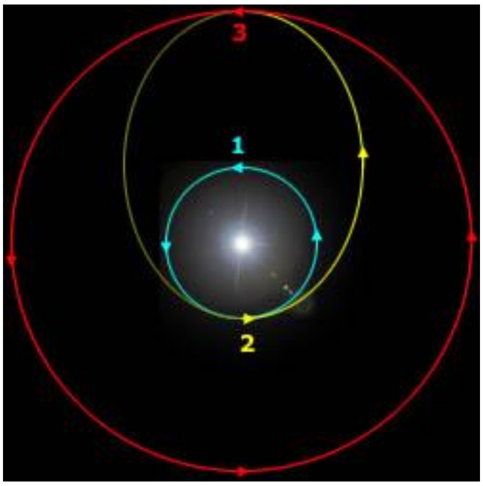


Figura 07.07: A órbita de menor energia para transferência de órbita entre a Terra e um planeta externo é uma órbita elíptica com foco no Sol, periélio na órbita da Terra (ponto 2) e afélio na órbita do outro planeta (ponto 3). Fonte da figura: wikipedia.

O semieixo maior da órbita da nave é

$$a = \frac{r_p + r_A}{2} = 1,26\ UA,$$

e, portanto seu período é:

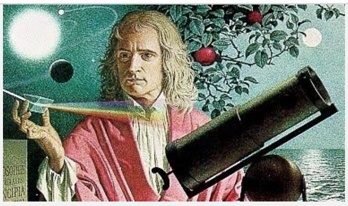
$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_{\odot} + m_n)}.a^3 \rightarrow P = 1,41 anos.$$

O tempo de viagem será a metade do período orbital, portanto, de *8,5 meses*. Qual a velocidade de lançamento? Chamando μ = G(M+m), a equação da velocidade pode ser escrita como:

$$v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)},$$

e *r = 1 UA*. Logo *v = 33 km/s*. Considerando-se que a Terra orbita o Sol com velocidade de:

$$v = \left(\frac{2\pi.1UA}{1ano}\right) = 30km/s.$$



Só precisamos lançar a nave com 30 *km/s*, na mesma direção e sentido da órbita da Terra. Note que o lançamento da nave tem que ser bem programado para que Marte esteja na posição da órbita que a nave chegará.

5) Qual o raio de horizonte de um buraco negro com massa igual à massa do Sol?

O horizonte de eventos de um buraco negro é a região, em volta da singularidade, da qual nada escapa, nem mesmo a luz. O raio dessa região é também chamado Raio de Schwarzchild, por ter sido derivado por Karl Schwarzschild, em 1916.

A ideia básica nessa derivação é, na borda dessa região, a velocidade de escape é igual à velocidade da luz (c). Então,

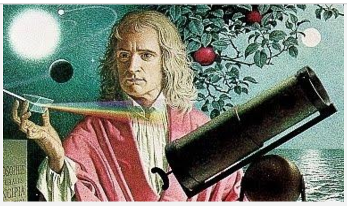
$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{R}} = c,$$

e o Raio de Schwarszchild, ou raio do horizonte de eventos, fica:

$$R_{Schw} = \frac{2GM}{c^2},$$

$$R_{Schw\,\odot} = \frac{2GM_{\odot}}{c^2}.$$

Através dessa equação encontramos que um buraco negro de massa igual à massa do Sol tem um raio de horizonte de aproximadamente 3 *km*.



Resumo

Newton mostrou que a mesma força que provoca a queda dos corpos na Terra faz com que a Lua gire em torno da Terra e os planetas em torno do Sol; as mesmas leis que determinam os movimentos dos corpos na Terra também governam os movimentos dos corpos celestes.

A **lei da gravitação universal** afirma que dois corpos quaisquer se atraem com uma força diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.

$$F = \frac{GMm}{r^2}.$$

A força gravitacional causa o movimento elipsoidal dos planetas (1ª Lei de Kepler); corpos que não têm órbitas fechadas terão órbitas parabólicas ou hiperbólicas.

O fator que determina o tipo de órbita é a energia do sistema. Se a energia total é negativa a órbita é fechada (elíptica ou circular); se a energia total é positiva a órbita é aberta (parabólica); se a energia total é nula o corpo tem velocidade de escape e a órbita é parabólica.

No movimento orbital o momentum angular permanece constante, sendo em cada ponto igual à área varrida pelo raio que une o planeta ao sol numa unidade de tempo. Portanto, a 2ª Lei de Kepler decorre naturalmente da conservação do momentum angular.

Newton mostrou que a 3.a Lei de Kepler não é válida universalmente na forma original, mas se torna universal se for incluída a massa total do sistema (M). Ou seja:

$$M.P^2/a^3 = \text{constante (sempre)},$$

mas

$$P^3/a^3 = \text{constante se } M = \text{constante}.$$

A constante é $4\pi^2$/G, e seu valor depende das unidades de G.

A 3ª Lei de Kepler na forma de Newton nos permite determinar massas de corpos astronômicos.

A energia total no movimento orbital é constante:

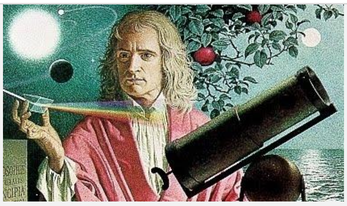
$$1/2(m_1 v_1^2) + 1/2(m_2 v_2^2) - Gm_1 m_2/r = -Gm1m2/2a.$$

De onde se deduz que, em qualquer ponto da órbita, a velocidade vale:

$$v^2 = G(m_1 + m_2)\left[2/r - 1/a\right].$$

Na órbita circular a = r e temos v = $(GM/r)^{1/2}$

Na órbita parabólica a = infinito e temos a velocidade de escape $v_{esc} = (2GM/r)^{1/2}$.



A seguir temos as questões de fixação, procure resolvê-las e comente as tuas respostas no fórum da aula.

Bom trabalho!

Questões de fixação

1. Escreva, em suas próprias palavras, as três leis de Kepler na forma generalizada.

2. Que tipo de curva corresponde a uma seção cônica com:

a) $0 < e < 1$?

b) $e = 1$?

c) $e = 0$?

d) $a = \infty$?

e) $1 < a < \infty$?

3. Que princípio físico está por trás da segunda lei de Kepler? Prove que dA/dt = constante no movimento orbital de um planeta em torno do Sol.

4. Qual a diferença principal entre a 3ª Lei de Kepler na forma original e na forma derivada por Newton? Qual a principal aplicação da 1ª Lei de Kepler na forma derivada por Newton?

5. Podemos escrever a terceira lei de Kepler na forma: *(M+m).K = constante*, onde $K = P^2/a^3$. Quanto vale essa constante? Em que sistemas de unidade ela se reduz a 1?

6. Mostre como a 3ª lei de Kepler pode ser deduzida a partir da lei da Gravitação Universal e do conceito de aceleração centrípeta. Suponha órbita circular. Em que sistemas de unidades essa constante se reduz a 1?

7. Sendo K(Sol) a razão entre P^2 e a^3 para o movimento de qualquer planeta em torno do Sol, quanto vale K(Sol), em *dias²/km³*? e em *anos²/UA³*? (Use os valores de "P" e "a" da Terra, que deves saber de cor).

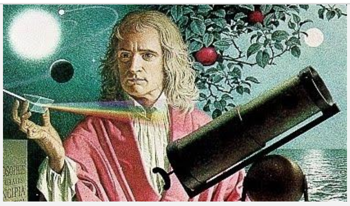
8. Mostre que a energia total no movimento orbital vale $-G(M+m)/2a$, e que se a energia total no movimento orbital for negativa, nula e positiva, teremos, respectivamente, elipse, parábola e hipérbole.

9. A partir da equação da velocidade, deduza a equação da velocidade circular e da velocidade de escape.

10. Um satélite é lançado a 300 km de altura da superfície da Terra, com velocidade paralela á superfície.
a) Qual o valor de sua velocidade para descrever uma órbita circular?

b) E para descrever uma órbita parabólica?

c) E para descrever uma órbita elíptica com excentricidade 0,05 e perigeu no ponto de lançamento?



11. Considere um cometa com uma distância no afélio de 5×10^4 *UA* e uma excentricidade orbital de 0,995.

a) Qual é a distância do cometa ao sol no periélio?

b) Qual o seu período orbital?

c) Quais suas velocidades no periélio e no afélio?

d) Quanto vale o momentum angular orbital do cometa?

12. A partir da segunda lei de Kepler, prove que o momentum angular de um planeta vale:

$$h = \frac{2\pi ab}{P}.$$

Então use o conceito de momentum angular

h = r v senθ = constante, onde θ é o ângulo entre o vetor posição $\vec{r}$ e o vetor velocidade $\vec{v}$, para mostrar que as velocidades no afélio e no periélio valem, respectivamente;

$$v_{af} = \frac{2\pi a(1-e)^{1/2}}{P(1+e)^{1/2}},$$

$$v_{per} = \frac{2\pi a(1+e)^{1/2}}{P(1-e)^{1/2}}.$$

Qual a razão v_{ap}/v_{per} para a Terra?

13. A trajetória elíptica de menor energia para uma espaçonave ir de um planeta a outro não é uma linha reta, mas sim uma órbita elíptica em torno do Sol, cujo periélio toca a órbita do planeta mais interno e cujo afélio toca a órbita do planeta mais externo. Para uma trajetória assim entre a Terra e Saturno, sabendo que o raio médio da órbita da Terra é 1 UA e o raio médio da órbita de Saturno é 9,5 UA, calcule:

a) o semieixo maior da órbita;

b) o tempo de viagem (ida e volta);

c) a velocidade no lançamento (periélio);

d) a velocidade no afélio.