Aula 16: Teoria da Radiação

Maria de Fátima Oliveira Saraiva, Kepler de Souza Oliveira Saraiva & Alexei Machado Müller

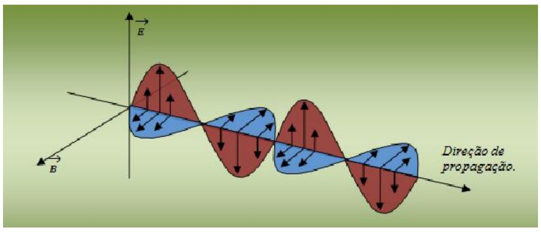


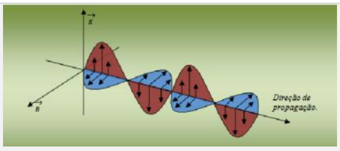
Ilustração de uma onda eletromagnética com os campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ perpendiculares entre si e com a direção de propagação da onda. Crédito: Luiz Carlos Goulart.

Introdução

Prezado aluno,

Provavelmente você já observou que uma barra de ferro fica brilhante quando suficientemente aquecida, primeiro adquirindo uma cor avermelhada e gradualmente embranquecendo à medida que fica mais e mais quente. A radiação emitida pela barra de ferro aquecida é chamada radiação térmica, pois depende unicamente da temperatura da barra. Todos os corpos opacos, sejam eles barras de ferro, pessoas ou estrelas, emitem radiação térmica. Conhecer as propriedades dessa radiação é essencial para entender como as estrelas funcionam, e esse é o assunto da aula de hoje.

Bom estudo!



Objetivos

- Aplicar as propriedades do corpo negro para deduzir temperaturas, raios e luminosidades das estrelas;
- Relacionar o fluxo na superfície de um corpo negro com a temperatura do corpo, pela Lei de Stefan-Boltzmann;
- Relacionar o comprimento de onda em que o corpo negro tem o pico da radiação com a sua temperatura, segundo a Lei de Wien.

De que forma o estudo do corpo negro nos ajuda a entender as estrelas?

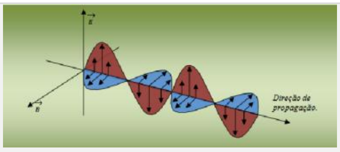
Teoria da Radiação

Em 1859-60, os físicos encontraram um problema: como descrever matematicamente como um corpo aquecido irradia energia, isto é, quanto ele emite em cada comprimento de onda. Para abordar o problema, começaram por examinar um caso teórico simplificado, **o corpo negro**, definido por Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), como um objeto que absorve toda a luz que incide sobre ele, sem refletir nada da radiação incidente. Um corpo com essa propriedade, em princípio, não pode ser visto e, portanto, é negro. Para tal corpo estar em equilíbrio termodinâmico, ele deve irradiar energia na mesma taxa em que a absorve, do contrário ele esquentaria ou esfriaria, e sua temperatura variaria. Portanto, um corpo negro, além de ser um *absorsor perfeito*, é também um *emissor perfeito*. Desde então muitos experimentos tentaram medir seu espectro, isto é, como sua intensidade varia com a frequência (ou com o comprimento de onda).

Figura 16.01: Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947).

Em 1900, o físico alemão **Max Planck** postulou que radiação eletromagnética é emitida de forma descontínua, em pequenos "pacotes" de energia, chamados *quanta* cada um com energia (E) proporcional à sua frequência (ν), isto é:

$$E = h\upsilon ,$$



onde h é a constante de Planck, valendo $h = 6{,}626 \times 10^{-27}\ ergs.s = 6{,}626 \times 10^{-34}\ J.s$;

A quantização da energia permitiu a Planck deduzir teoricamente a intensidade de um campo de radiação, como a seguir.

A intensidade específica monocromática (energia por unidade de comprimento de onda, por segundo, por unidade de área, e por unidade de ângulo sólido) de um corpo que tem uma temperatura uniforme T e está em equilíbrio termodinâmico com seu próprio campo de radiação (o que significa que é opaco), é dada pela **Lei de Planck**:

A intensidade específica, no caso de um corpo negro, é representada pela letra B.

$$I_\lambda \equiv B_\lambda(T)$$

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1},$$

onde:

B_λ (T) é a intensidade específica monocromática do corpo negro de temperatura T

c é a velocidade da luz ,

h é a constante de Planck,

$k = 1{,}38 \times 10^{-16}\ ergs/K$ é a constante de Boltzmann, [em honra ao austríaco **Ludwig Boltzmann** (1844-1906)].

Para escrever a lei de Planck em termos de frequência, precisamos usar

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$$

obtendo

$$B_\nu = B_\lambda \frac{\lambda^2}{c},$$

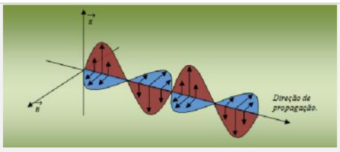
ou

$$B_\upsilon(T) = \frac{2h\upsilon^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\upsilon/kT} - 1},$$

Radiação de corpo negro:

Radiação que depende unicamente da temperatura do corpo, sendo descrita pela lei de Planck. É também chamada *radiação térmica.*

Qualquer corpo em equilíbrio termodinâmico emitirá fótons com uma distribuição de comprimentos de onda dada pela Lei de Planck acima. Esta radiação é chamada de *radiação de corpo negro*, ou *radiação térmica*, pois **depende unicamente da temperatura do corpo** como ilustra o gráfico da Fig.16.02.



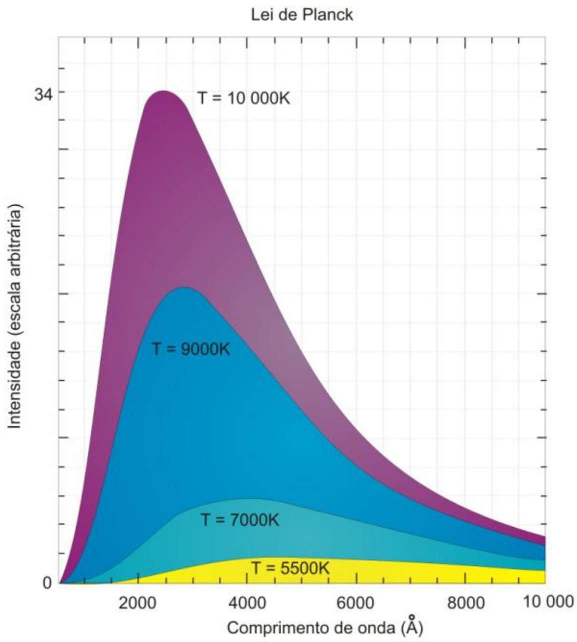


Figura 16.02: Curvas da Lei de Planck (radiação de corpo negro) para corpos com diferentes temperaturas: a intensidade em todos os comprimentos de onda aumenta fortemente com o aumento da temperatura, e o pico de intensidade máxima se desloca para comprimentos de onda menores com o aumento da temperatura.

Lei de Wien

O comprimento de onda em que um corpo negro emite com intensidade máxima - λ_{max} - é inversamente proporcional à temperatura absoluta, ou seja

$$\lambda_{max} \, \alpha \, \frac{1}{T}.$$

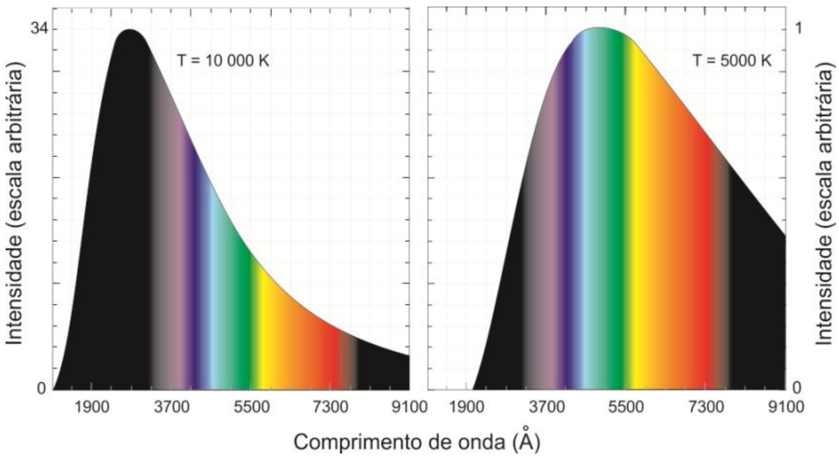
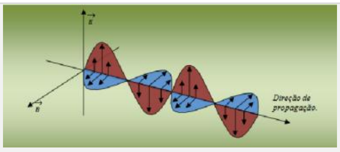


Figura 16.03: Comparação da forma da curva de Planck na região entre 1.000 angstrons e 10 000 angstrons para corpos negros com temperaturas de 10.000 K e 5. 000 K. Por questão de clareza, a escala vertical no gráfico da direita está muito mais expandida que no gráfico da esquerda.
Note como o pico da curva da curva de menor temperatura ocorre em um comprimento de onda maior.

A constante de proporcionalidade pode ser encontrada derivando a Lei de Planck $B_\lambda(T)$ e fazendo a derivada igual a zero.



Lei de Wien:

O comprimento de onda(λ) em que um corpo negro tem o pico da radiação é inversamente proporcional à sua temperatura absoluta (T).

$$\lambda_{max}\,\alpha\,\frac{1}{T}.$$

Lei de Stefan-Boltzmann:

O fluxo na superfície de um corpo negro (*F*) é proporcional à quarta potência da temperatura absoluta do corpo:

$F\,\alpha\,T^4$.

Temperatura efetiva T_{ef},:

Sendo F o fluxo na superfície da estrela, a temperatura efetiva da estrela é tal que:

$F \equiv \sigma T_{ef}^4$

Fazendo essa conta (que pode ser vista em http://astro.if.ufrgs.br/rad/rad/rad.htm#wien) encontra-se que:

$\lambda_{max}T$ = 0,00289 m K (λ em metros, T em kelvin)

ou

$\lambda_{max}T$ = 2,89 x10^7 Å K (λ em angstroms, T em kelvin).

Esta relação, encontrada empiricamente por Wilhelm Carl Werner Otto Fritz Franz Wien em 1893, mostra que, à medida que *T* aumenta, λ_{max} diminui. Desta maneira se explica porque, quando se aquece uma barra de ferro, ela torna-se primeiro vermelha, depois esbranquiçada e finalmente azulada.

Lei de Stefan-Boltzmann

O fluxo (energia por unidade de área, por segundo) de um corpo negro de temperatura *T* é dado por:

$$F=\int_0^\infty F(\upsilon)d\upsilon=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta \int_0^\infty B\upsilon(T)d\upsilon$$
$$=\pi\int_0^\infty B\upsilon(T)d\upsilon.$$

Pode-se demonstrar que a intensidade específica monocromática integrada em todo o espectro de frequências é:

$$B(T)=\int_0^\infty B\upsilon(T)d\upsilon=\frac{\sigma T^4}{\pi}.$$

Logo,

$$F=\sigma T^4,$$

onde

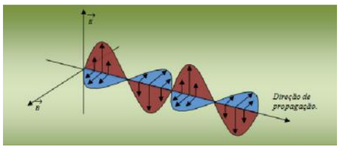
$$\sigma=5{,}67\,x10^{-5}\,ergs\,cm^2\,K^{-4}\,s^{-1}=5{,}67\,x10^{-8}\,W m^{-2}\,K^{-4}$$

é a constante de Stefan-Boltzmann.

Portanto, o fluxo emitido por um corpo negro é proporcional à quarta potência da temperatura. Essa relação é conhecida como lei de Stefan-Boltzmann.

Como uma estrela não é um corpo negro, isto é, suas camadas externas de onde provém a radiação não estão exatamente em equilíbrio térmico, e, portanto a temperatura não é a mesma para toda a estrela. Para contornar esse problema, definimos um parâmetro chamado **temperatura efetiva T_{ef}**, que é a temperatura de um corpo negro que emite a mesma quantidade de energia por unidade de área e por unidade de tempo que a estrela emite. Assim, a temperatura efetiva se relaciona ao fluxo na superfície da estrela pela lei de Steffan-Boltzmann:

$$F \equiv \sigma T_{ef}^4.$$



Luminosidade da Estrela (L):

Teoricamente, a luminosidade da estrela é igual ao produto da área superficial da estrela multiplicado pelo fluxo na superfície da estrela.

$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$.

Na prática, calculamos a luminosidade da estrela medindo o fluxo que chega à Terra e multiplicando esse fluxo pela área da superfície esférica com raio igual à distância do Sol à Terra:

L = $4\pi r^2$ F(r).

Símbolos:

$\odot$: Sol
$\oplus$: Terra

Para uma estrela esférica de raio R, a **luminosidade** (energia total por segundo) é obtida multiplicando-se o fluxo pela área da esfera $4\pi R^2$:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4 .$$

A luminosidade do Sol, isto é, a energia total emitida pelo Sol em um segundo, é

$$L_{Sol} = 3{,}9 \times 10^{26} \text{ J/s}.$$

Como o raio do Sol é de aproximadamente 700.000 km, combinando as duas últimas equações resulta que a temperatura efetiva do Sol é aproximadamente 5800 K.

A definição de temperatura de um objeto astronômico não é única, pois depende do método que estamos usando para medi-la. Assim, a temperatura de uma estrela medida pela lei de Wien (a partir da intensidade em um comprimento de onda), é ligeiramente diferente da sua temperatura medida pela lei de Stefan-Boltzmann (a partir da luminosidade e do raio). Enquanto esta última é chamada **temperatura efetiva**, a primeira é chamada **temperatura de brilho**. Pode-se ainda definir a **temperatura de cor**, determinada a partir da razão de fluxos em dois comprimentos de onda diferentes. Essas temperaturas não são iguais porque os corpos astronômicos não são corpos negros perfeitos.

Energia do Sol na Terra

Pela definição de fluxo, a energia que atinge a Terra por unidade de área e de tempo, é :

$$F_{\oplus} = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} ,$$

onde

$L_{Sol} = 3{,}9 \times 10^{26}$ J/s

e

r = *1 unidade astronômica* (UA) = 150 milhões de km.

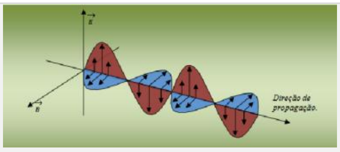
A potência luminosa que atinge a Terra é o fluxo por unidade de área multiplicado pela área total que está interceptando esse fluxo, que é a secção reta da Terra, $\pi R_{\oplus}^2$, ou seja:

$$P = \pi R_{\oplus}^2 F_{\oplus} = \pi R_{\oplus}^2 \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} .$$

Devido à rotação da Terra, o fluxo médio incidente é obtido dividindo a potência interceptada na Terra pela área total da Terra, $4\pi R_{\oplus}^2$.

$$\bar{F}_{\oplus} = \frac{P}{4\pi R_{\oplus}^2} = \frac{L_{\odot}}{16\pi r^2} = 3{,}5 \times 10^{-5} \, ergs\, s^{-1} cm^{-2} . = 350 \;\; J\, s^{-1}\, m^{-2}.$$

A Terra absorve 61% da luz incidente, refletindo os outros 39%. A energia absorvida aquece a Terra, que irradia como um corpo negro a uma taxa σT^4 por unidade de área.



Temperatura da Terra:

Devido ao efeito estufa do gás carbônico e da água, a Terra consegue ter a sua temperatura acima do ponto de congelamento.

Logo,

$$\sigma T_{\oplus}^{4} = 0{,}61 \bar{F}_{\oplus} \, ,$$

O que resulta em uma temperatura para a Terra de $T_{\oplus} = 249K$.

De fato, devido ao efeito estufa do gás carbônico (CO_2) e da água, a temperatura da Terra é de 290 K. Portanto o efeito estufa mantém a água na superfície da Terra acima do ponto de congelamento, de 273 K.

Resumo

Leis da radiação de corpo negro

- Estrelas emitem radiação de forma parecida a corpos negros
- Corpo negro: corpo que <u>absorve</u> toda a radiação que incide sobre ele, <u>sem refletir</u> nada.
- Toda a radiação <u>emitida</u> pelo corpo negro é devida à sua temperatura.
- Radiação de corpo negro negro = radiação térmica : depende apenas da temperatura_do corpo, seguindo as leis de Stefan-Boltzmann, de Wien e de Planck.

Lei de Planck

- Radiação eletromagnética é emitida de forma quantizada, em "pacotes" ou "quanta" de energia E =hv (h = constante de Planck = 6,625 x 10^{-34} J.s).
- A intensidade da radiação emitida por unidade de área, por unidade de tempo e por unidade de ângulo sólido (intensidade específica monocromática) de um corpo negro é descrita por:

$$B_{\nu}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1},$$

$$B_{\lambda}(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}.$$

Nas equações acima, $B_\nu \equiv I_\nu$, $B_\lambda \equiv I_\lambda$.

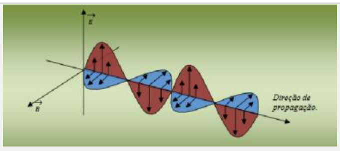
Lei de Wien

- O comprimento de onda em que um corpo negro tem o pico da radiação é inversamente proporcional à sua temperatura absoluta.

$$\lambda_{max} \propto 1/T$$

ou

$$\lambda_{max} T = 2{,}89 \times 10^7 \, \mathring{A} \, K$$



Lei de Stefan-Boltzmann

- O Fluxo na superfície de um corpo negro é proporcional à quarta potência da temperatura do corpo.

$$F = \sigma T^4 ,$$

onde

σ = constante de Stefan-Boltzmann =5,67 x 10^{-8} W/(m^2K^4).

Luminosidade da Estrela (L):

- A luminosidade da estrela é proporcional à sua superfície total:

$$L \alpha 4\pi R^2 .$$

- A luminosidade da estrela é proporcional à quarta potência de sua temperatura efetiva:

$$L \alpha T_{ef}^4 .$$

Logo:

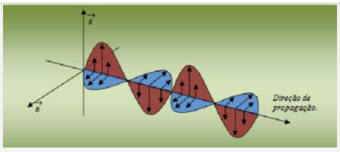
$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4 .$$

Energia do Sol na Terra:

- Chamando r a distância Terra-Sol, o fluxo de radiação solar na Terra é:

$$F_{\oplus} = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} .$$

A Terra absorve 61% da luz incidente, refletindo os outros 39%. A temperatura de corpo negro resultante dessa absorção de energia é 249K, e essa seria a temperatura da Terra se ela reemitisse toda a radiação absorvida. Devemos a agradável temperatura média da Terra, de 290K, ao efeito estufa equilibrado.



Questões de fixação

1. Duas estrelas de tamanhos iguais estão à mesma distância da Terra. Uma tem temperatura de 5.800 K e a outra tem temperatura de 2.900 K.

a) Qual é a mais avermelhada?

b) Qual é a mais azulada?

c) Qual é a mais brilhante?

d) Qual a razão entre o brilho da mais brilhante e o brilho da menos brilhante?

2. A constante solar, isto é, o fluxo de radiação solar que chega à Terra, vale 1.390 W/m^2.

a) Encontre o fluxo de radiação na superfície do Sol. (Dado: raio do Sol = 700.000 km, distância Terra-Sol = 150 milhões de km).

b) Quantos metros quadrados da superfície do Sol são necessários para produzir 1.000 MW? (1 MW = 10^6 watts)

c) Calcule a luminosidade do Sol a partir do fluxo de radiação que chega à Terra.

d) Algumas teorias consideram que a temperatura efetiva do Sol há 4,5 bilhões de anos era 5.000 K (atualmente é 5.800 K), e seu raio era 1,02 vezes o valor do raio atual. Qual era a constante solar então? (Considere que a distância Terra-Sol não mudou).

3. Canopus, a segunda estrela mais brilhante do céu, é uma estrela branca com magnitude visual aparente m=-0,72, e magnitude visual absoluta M = - 3,1. Sua temperatura efetiva é de 7.800 K.

a) Compare o brilho de Canopus com o de uma estrela com magnitude visual m= 0,7. Qual das duas é a mais brilhante e qual é a razão entre o brilho de Canopus e da outra?

b) Qual a distância de Canopus até a Terra em parsecs?

c) Qual é o comprimento de onda em que aparece o pico de sua radiação?

d) Quanto mais de energia por segundo Canopus emite, comparada com uma estrela de mesma temperatura, mas cujo raio é a metade do raio de Canopus?