FIS00183 - Física III-C - Aula 3

Jeferson J. Arenzon – 24 de agosto de 2020

Para definir uma escala termométrica é preciso fazer duas escolhas arbitrárias: a posição do zero e o tamanho do grau. Para isso, no caso da escala **Celsius**, escolhemos dois pontos fixos para água pura a 1 atm:

– Ponto de gelo: $T_{\rm C} = 0\,°\mathrm{C}$

– Ponto de vapor: $T_{\rm C} = 100\,°\mathrm{C}$.

O comprimento $\ell(T)$ de uma coluna de mercúrio, que dilata com a temperatura, pode ser usado como termômetro. Definimos ℓ_0 e ℓ_{100}, correspondendo aos dois pontos acima, respectivamente: $\ell(0°\mathrm{C}) \equiv \ell_0$ e $\ell(100°\mathrm{C}) \equiv \ell_{100}$. Se soubermos a relação entre T e ℓ, temos um termômetro calibrado. Vamos supor que esta relação seja **linear**, $T = a\ell + b$, no intervalo de interesse (o que pode ser verificado experimentalmente). Isto é, para uma quantidade fixa de energia introduzida no sistema (calor), o aumento $\Delta\ell$ é sempre o mesmo, qualquer que seja a temperatura inicial (dentro do intervalo em que vale a aproximação linear). Usando os pontos acima, obtemos $a = 100/(\ell_{100} - \ell_0)$ e $b = -100\ell_0/(\ell_{100} - \ell_0)$, ou seja:

$$T_{\rm C} = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_{100} - \ell_0} \times 100. \tag{5}$$

Equivalentemente, como é uma relação linear, a expressão acima é uma regra de 3:

$$\begin{aligned} \ell_{100} - \ell_0 &: 100 \\ \ell - \ell_0 &: T_{\rm C}. \end{aligned}$$

Exemplo 10: Na escala **Fahrenheit** (1724), o ponto de gelo está a $32\,°\mathrm{F}$ e o de vapor a $212\,°\mathrm{F}$. Obtenha $T_{\rm f}(\ell)$ e relacione com a escala Celsius.

$$\begin{aligned} 32 &= a\ell_{32} + b \\ 212 &= a\ell_{212} + b \end{aligned}$$

Resolvendo:

$$\begin{aligned} T_{\rm f} &= \frac{180\ell}{\ell_{212} - \ell_{32}} + \frac{32\ell_{212} - 212\ell_{32}}{\ell_{212} - \ell_{32}} \\ &= 180\frac{\ell - \ell_{32}}{\ell_{212} - \ell_{32}} + 32. \end{aligned}$$

Para obtermos a relação com a escala Celsius notamos que $\ell_{212} = \ell_{100}$ e $\ell_{32} = \ell_0$ nas referidas escalas. Assim, isolando ℓ na Eq. (5) e substituindo na equação acima:

$$\begin{aligned} T_{\rm f} &= \frac{180}{\ell_{212} - \ell_{32}}\left[\underbrace{\ell_{32} + \frac{T_{\rm C}}{100}(\ell_{212} - \ell_{32})}_{\ell} - \ell_{32}\right] + 32 \\ &= 32 + \frac{9}{5}T_{\rm C}. \end{aligned}$$

Exemplo 11: Nem sempre a relação entre a temperatura e uma propriedade do sistema é linear. Para ilustrar, vamos supor um caso em que T' dependa da propriedade X como:

$$T'(X) = aX^2 + b.$$

Como pontos de referência consideramos $X(T' = 0°) \equiv X_0$ no ponto de gelo e $X(T' = 100°) \equiv X_{100}$ no ponto de vapor. Calcule os parâmetros a e b e determine como transformar desta escala para a escala Celsius.

Tomando os dois pontos de referência:

$$\begin{aligned} 0 &= aX_0^2 + b \\ 100 &= aX_{100}^2 + b. \end{aligned}$$

Subtraindo a primeira da segunda:

$$a = \frac{100}{X_{100}^2 - X_0^2}.$$

E, da primeira:

$$b = -aX_0^2 = \frac{-100X_0^2}{X_{100}^2 - X_0^2}.$$

Então:

$$T' = 100\frac{X^2 - X_0^2}{X_{100}^2 - X_0^2}.$$

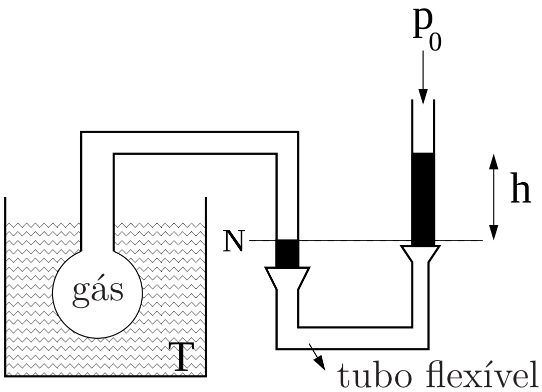
Para um mesmo valor de X, na escala Celsius temos

$$T_{\rm C} = 100\frac{X - X_0}{X_{100} - X_0} \Longrightarrow X = X_0 + \frac{T_{\rm C}}{100}(X_{100} - X_0).$$

Então, substituindo na equação de T':

$$\begin{aligned} T' &= 100\frac{X - X_0}{X_{100} - X_0}\frac{X + X_0}{X_{100} + X_0} \\ &= \frac{T_{\rm C}}{X_{100} + X_0}\left[2X_0 + \frac{T_{\rm C}}{100}(X_{100} - X_0)\right]. \end{aligned}$$

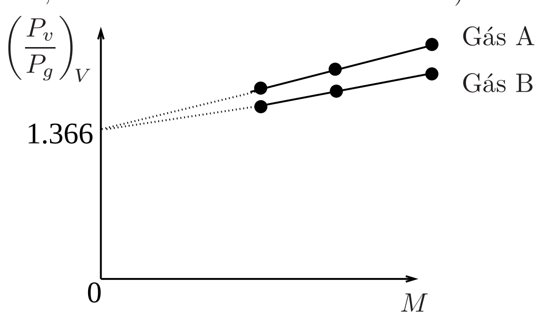
Nas escalas de temperatura acima, foi preciso fazer duas escolhas: a posição do zero e o tamanho do grau. Mas é possível introduzir uma escala *absoluta* de temperatura, uma em que a localização da origem não é uma escolha, mas um limite fundamental, que não pode ser ultrapassado. Para isso vamos utilizar o seguinte termômetro, chamado de *termômetro de gás a volume constante* porque a) a substância termométrica é um gás e b) o tubo flexível permite manter fixo, abaixando ou levantando o lado direito, o nível de Hg no ponto N indicado (e, portanto, o volume do gás também permanece constante). Assim, a única variável é a altura h.



Seja M a massa do gás no bulbo (H_2, N_2, $\ldots$). Sua pressão é:

$$P = P_0 + \rho g h.$$

Medindo a pressão nos pontos de vapor e gelo, obtemos P_v e P_g, respectivamente. Aos poucos, reduzimos a massa do gás no bulbo e medimos novamente essas pressões (obtendo, obviamente, valores também cada vez menores).



A medida que o gás se torna cada vez mais rarefeito ($M \to 0$, limite de gás ideal), obtemos um resultado independente do gás:

$$\lim_{M\to 0} \left(\frac{P_v}{P_g}\right)_V \simeq 1.3661. \tag{6}$$

Definindo que a temperatura de um corpo em contato térmico com o bulbo é proporcional à pressão excercida pelo gás (a quantidade X anterior, da qual T depende linearmente):

$$T \propto P \Longrightarrow T = cP$$

Então:

$$\frac{T_v}{T_g} = \lim_{M\to 0} \frac{P_v}{P_g} \simeq 1.3661\ . \tag{7}$$

É importante notar que longe do limite de gás ideal, a temperatura é dependente do material (gás) escolhido. Somente naquele limite obtemos um resultado independente do gás, ou seja, universal. Para completar a definição da escala de temperatura absoluta, impomos a condição de que o tamanho do grau seja o mesmo da escala Celsius[12].

$$T_v - T_g = 100\,\mathrm{K} \tag{8}$$

e o chamamos de Kelvin (K). Ou seja, resolvendo (7) e (8):

$$T_g = 273.15\,\mathrm{K} \qquad T_v = 373.15\,\mathrm{K}.$$

Como 1 grau tem, por definição, o mesmo intervalo nas duas escalas, Celsius e Kelvin, a relação entre as duas é:

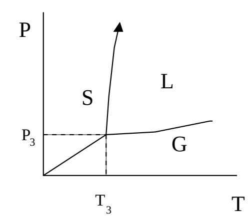
$$\boxed{T_{\mathrm{C}} = T - 273.15}. \tag{9}$$

O zero absoluto corresponde, então, a[13] $T_{\mathrm{C}} = -273.15°\mathrm{C}$.

Podemos agora utilizar o termômetro para medir uma temperatura T:

$$\frac{T}{T_g} = \lim_{M\to 0} \left(\frac{P}{P_g}\right)_V$$

A equação acima só depende de um ponto padrão, no caso, o ponto de gelo. Atualmente, ao invés deste utilizamos o *ponto triplo* da água. Neste ponto, $P_3 = 4.58\,\mathrm{mmHg}$ e $T_3 = 273.16\,\mathrm{K} = 0.01\,°\mathrm{C}$, gelo, água e vapor coexistem, em *equilíbrio térmico*. Então, a eq. acima fica:



$$\boxed{T = 273.16 \lim_{M\to 0} \left(\frac{P}{P_3}\right)_V} \tag{10}$$

[12] Poderíamos ter usado o tamanho do grau na escala Fahrenheit, $T_v - T_g = 180$, o que definiria, então, a escala Rankine. Assim, teríamos $T_g = 491.67R = 32F$. Logo, $T_R = T_F - 459.67$ e $T_R = 1.8T$.

[13] Já na escala Fahrenheit, o zero absoluto é $-459.67\,°\mathrm{F}$.