# FIS00183 - Física III-C - Aula 2

Jeferson J. Arenzon – 21 de agosto de 2020

## Dilatação Térmica

A variação $\Delta\ell$ do comprimento de um objeto (dilatação), com a temperatura, é usada para calibrar um termômetro e, então, na medição da temperatura. Vamos considerar que a dilatação seja pequena comparada com o comprimento original do objeto, isto é, $\Delta\ell \ll \ell_0$. Esta diferença no comprimento do objeto, devida à uma mudança no espaçamento interatômico médio, é dada por

$$\Delta\ell = \alpha\ell_0\Delta T \longrightarrow \ell = \ell_0\left[1+\alpha\Delta T\right], \tag{1}$$

onde $\Delta T = T - T_0$ é a variação de temperatura. O **coeficiente de dilatação linear** $\alpha$, o qual consideramos independente da temperatura e da direção (corpos isotrópicos), é a variação percentual de comprimento por unidade de variação de temperatura:

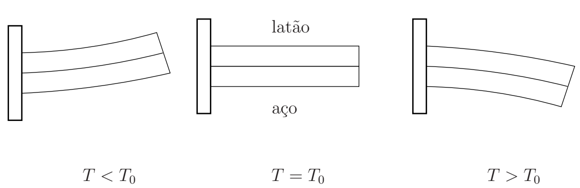
$$\alpha = \frac{\Delta\ell/\ell_0}{\Delta T},$$

e, aqui, $\Delta\ell/\ell_0 = \alpha\Delta T \ll 1$. Quando a variação de temperatura é muito pequena:

$$\alpha = \lim_{\Delta T\to 0}\frac{\Delta\ell/\ell_0}{\Delta T} = \frac{1}{\ell_0}\frac{d\ell}{dT}. \tag{2}$$

---

**Exemplo 4:** O termostato pode abrir e fechar um contato dependendo da variação de temperatura ($\alpha_{\text{latão}} > \alpha_{\text{aço}}$).




---

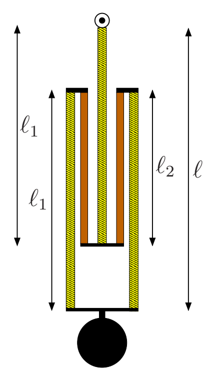
**Exemplo 5:** Uma fita de aço é colocada ao longo do equador terrestre quando a temperatura é de $0\,^\circ$C. Qual será a distância entre a fita e o solo (considerado uniforme), se a temperatura da fita aumentar para $30\,^\circ$C?

A fita inicialmente tem um comprimento igual ao da circunferência (equatorial) terrestre, cujo raio é $R \simeq 6378\,$km. Tanto a circunferência quanto o raio são quantidades lineares (ao contrário da superfície e do volume), podemos então calcular a dilatação usando diretamente $R$. Como $\alpha_{\text{aço}} = 1.1\times 10^{-5}\,^\circ\text{C}^{-1}$, a variação será de $\Delta R \simeq 2\,$km, ou seja, a fita estaria cerca de $2\,$km acima[10] da superfície terrestre (supondo que não haja expansão da Terra).

---

**Exemplo 6:** No pêndulo abaixo, somente as barras verticais são afetadas significativamente pela temperatura. Seus coeficientes de dilatação são $\alpha_1$ e $\alpha_2$. Qual o comprimento inicial de cada um dos segmentos ($\ell_1$ e $\ell_2$) para que o comprimento total do pêndulo, $\ell$, permaneça constante?

Precisamos manter o comprimento total constante, isto é, $\ell(T) = \ell, \forall T$ para que a temperatura não afete como o relógio marca o tempo. Usando que $\ell_2^{(0)} = 2\ell_1^{(0)} - \ell$:




$$\begin{aligned}
\ell &= \ell(T)\\
&= 2\ell_1(T) - \ell_2(T)\\
&= 2\ell_1^{(0)}(1+\alpha_1\Delta T) - \ell_2^{(0)}(1+\alpha_2\Delta T)\\
0 &= 2\ell_1^{(0)}\alpha_1\Delta T - \ell_2^{(0)}\alpha_2\Delta T.
\end{aligned}$$

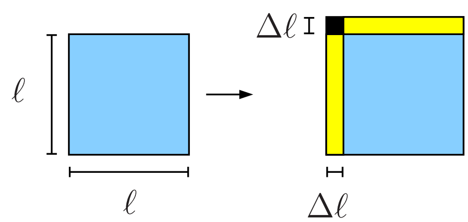
Então:

$$\begin{aligned}
\ell_1^{(0)} &= \frac{1}{2}\frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}\ell\\
\ell_2^{(0)} &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\ell,
\end{aligned}$$

o que permite construir o relógio com o valor escolhido de $\ell$ desde que $\alpha_2 > \alpha_1$.

---

**Exemplo 7:** Para o caso de uma superfície, podemos mostrar que o coeficiente de dilatação superficial é $2\alpha$. Por exemplo, consideremos um quadrado de área inicial $\ell^2$ cujo lado aumenta de $\ell$ para $\ell+\Delta\ell$ quanto $T\to T+\Delta T$.




Calculando a variação da área e mantendo apenas os termos lineares em $\Delta\ell$:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{2\ell\Delta\ell + (\Delta\ell)^2}{\ell^2} \simeq 2\frac{\Delta\ell}{\ell} = 2\alpha\Delta T.$$

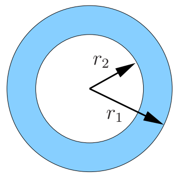
Assim, quando falamos em dilatação linear, desprezamos os termos quadráticos – o quadrado preto de área $(\Delta\ell)^2$ – e contabilizamos os dois retângulos amarelos. Por isso há um fator 2 no coeficiente de expansão superficial, que corresponde a $2\alpha$.

Teríamos obtido o mesmo resultado com um círculo: $\Delta A = \pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\Delta r + \pi(\Delta r)^2$, ou seja, $\Delta A/A \simeq 2\Delta r/r = 2\alpha$.

---

[10] Outro exemplo: se a fita dilatasse $1\,$m, qual sua altura em relação à superfície? Se $C = 2\pi R$ e $C+1 = 2\pi R'$, a variação é $\Delta R = R' - R = 1/2\pi \simeq 16\,$cm, independentemente do valor original da circunferência.

**Exemplo 8:** Considere um disco de raio $r_1$. Quando $T \to T + \Delta T$, sua área vai de $\pi r_1^2$ para $\pi r_1^2(1 + 2\alpha\Delta T)$. E se removermos a região central, de raio $r_2$, qual a variação da área remanescente?




A área interna aumenta como se houvesse massa ali (imagine o disco completo, com um círculo de raio $r_2$ desenhado). Assim, a área do anel, que antes era $A^{(0)}_{\text{anel}} = \pi(r_1^2 - r_2^2)$, aumenta de

$$\Delta A_{\text{anel}} = \pi(r_1^2 - r_2^2)2\alpha\Delta T.$$

O aumento do buraco central é independente de $r_1$. Podemos interpretar, considerando os átomos ao longo do círculo interno: se $\Delta T > 0$, eles tendem a se afastar uns dos outros. Assim, todo o anel do desenho aumenta de tamanho, aumentando os dois raios, não há crescimento na direção do centro. Este sistema é conhecido como Anel de Gravesande.

---

Podemos definir também o **coeficiente de expansão volumétrica** $\beta$, relacionando uma variação no volume, a partir de um volume inicial $V_0$, com a correspondente variação na temperatura, $\Delta V = \beta V_0 \Delta T$. Como na Eq. (2), e supondo que a dilatação seja isotrópica, isto é, a mesma em todas as direções:

$$\beta = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta V / V_0}{\Delta T} = \frac{1}{V_0}\frac{dV}{dT}. \tag{3}$$

Vamos tomar um bloco cujo volume, a temperatura $T$, é $V = \ell^3$, onde $\ell$ é o lado[11]. A variação deste volume com a temperatura é

$$\frac{dV}{dT} = 3\ell^2 \frac{d\ell}{dT}.$$

Dividindo pelo volume $V$:

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dT} \equiv \beta = \frac{3}{\ell}\frac{d\ell}{dT}.$$

Ou seja,

$$\beta = 3\alpha. \tag{4}$$

---

**Exemplo 9:** Um tubo de vidro vertical de altura $h_0$ é preenchido até a metade com um líquido a temperatura $T$. De quanto a altura da coluna de líquido varia quando a temperatura do sistema aumentar de $\Delta T$?
O volume final de líquido é

$$V_L = \frac{V_0}{2}(1 + 3\alpha_L \Delta T) = \frac{A_0 h_0}{2}(1 + 3\alpha_L \Delta T).$$

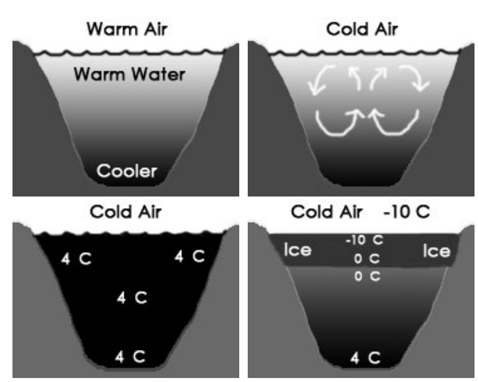
Então, a altura final da coluna corresponde a:

$$h = \frac{V_L}{A} = \frac{A_0 h_0 (1 + 3\alpha_L \Delta T)}{2A_0(1 + 2\alpha_V \Delta T)} = \frac{h_0}{2}\frac{1 + 3\alpha_L \Delta T}{1 + 2\alpha_V \Delta T}.$$

Note que se $3\alpha_L = 2\alpha_V$, o nível permanece em $h_0/2$. Se $3\alpha_L > 2\alpha_V$, então $h > h_0/2$. Portanto, dependendo da escolha dos materiais, o nível do líquido pode subir ou descer.

---

Em geral, $\beta > 0$, ou seja, a densidade aumenta à medida que a temperatura diminui. Porém, existem substâncias com comportamento anômalo que apresentam um coeficiente de expansão negativo em um determinado intervalo de temperatura. Um exemplo é a água líquida quando a temperatura está entre 0 °C e cerca de 4 °C, perto da qual há um máximo na densidade. Uma das aplicações práticas é poder construir uma liga de tal forma que os coeficientes se compensem, minimizando os efeitos da dilatação térmica. Mas a aplicação mais conhecida é a superfície congelada de rios e lagos. Quando a temperatura exterior é alta, as camadas superiores são mais quentes e a temperatura vai diminuindo com a profundidade. Por outro lado, se a temperatura exterior for menor do que a temperatura na superfície, a água esfria, diminui seu volume (fica mais densa) e desce, criando correntes de convecção que transferem energia para regiões mais profundas. Este processo ocorre enquanto a temperatura do ar for maior do que 4 °C. Abaixo desta temperatura, devido à anomalia da densidade, cessam as correntes de convecção. Assim, se a temperatura exterior for menor do que esse valor, a camada superior do lago esfriará, mas ficará menos densa. Isto ocorre em todo o intervalo entre 0 e 4 °C. A camada inferior conterá água com a maior densidade, portanto, a 4 °C. O único processo de transferência de calor que persiste neste caso é a condução, que é mais lenta. Quando as camadas superiores atingirem 0 °C e continuarem a perder energia, elas congelarão. A água sólida (gelo), diferentemente da maioria de outros materiais, é ainda menos densa do que a água na temperatura de coexistência entre as duas fases. Por isso, o gelo que é formado nas camadas superiores, permanece ali. Isto forma uma camada isolante (a água não conduz bem o calor), diminuindo a transferência por condução e garantindo que as camadas inferiores permaneçam no estado líquido por muito mais tempo. Isso permite a vida, como a gente conhece, nos ambientes aquáticos pois se o gelo fosse mais denso, a água congelaria de baixo para cima e todo o ambiente congelaria.




[11] Se os lados forem diferente, $V = \ell_1\ell_2\ell_3$, o resultado é o mesmo. A variação com a temperatura é

$$\frac{dV}{dT} = \ell_1\ell_2\frac{d\ell_3}{dT} + \ell_1\ell_3\frac{d\ell_2}{dT} + \ell_2\ell_3\frac{d\ell_1}{dT} \to \frac{1}{V}\frac{dV}{dT} \equiv \beta = \frac{1}{\ell_3}\frac{d\ell_3}{dT} + \frac{1}{\ell_2}\frac{d\ell_2}{dT} + \frac{1}{\ell_1}\frac{d\ell_1}{dT} = 3\alpha.$$