



DESENVOLVIMENTO DE UM EXERCÍCIO DE IMAGINAÇÃO PEDAGÓGICA A PARTIR DE UMA PROPOSTA METODOLÓGICA INTERDISCIPLINAR

A pedagogical imagination exercise development from an interdisciplinary methodological proposal

Robson Kleemann [robson.kleemann@hotmail.com]

Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências

Universidade Federal do Rio Grande – FURG

Avenida Itália, km 8, Bairro Carreiros, Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Vitor José Petry [vitor.petry@uffs.edu.br]

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Rodovia SC 484 - Km 02, Chapecó, Santa Catarina, Brasil

Resumo

Estabelecer relações interdisciplinares no processo de ensino-aprendizagem é de fundamental importância na perspectiva de trabalhar conceitos de diferentes disciplinas, a partir de uma situação-problema. Assim, para o presente trabalho foi desenvolvida uma proposta metodológica de ensino, visando um trabalho interdisciplinar na abordagem de conceitos de Matemática e Física, e, a partir dessa, desencadeou-se um exercício de imaginação pedagógica. Este exercício teve como objetivo identificar possibilidades e potencialidades em relação a conteúdos e conceitos a serem explorados na resolução do problema descrito na proposta e contou com a participação de professores das duas disciplinas envolvidas e que atuam no Ensino Médio. Objetos virtuais de Aprendizagem (OVA) interativos foram desenvolvidos, usando o *software* GeoGebra, com o intuito de proporcionar visualização geométrica e algébrica de propriedades relacionadas à situação-problema proposta. Os dados coletados durante a pesquisa foram submetidos a uma análise do discurso em que, evidenciaram-se novas possibilidades de conteúdos e conceitos a serem trabalhados a partir da aplicação da proposta. Os resultados indicam que a utilização de situações-problema com relações interdisciplinares e de OVA são características favoráveis à obtenção de resultados satisfatórios na prática docente, sendo que o exercício de imaginação pedagógica com os professores trouxe contribuições para sua formação continuada, e para sua interação com os recursos tecnológicos disponíveis, numa perspectiva de que sejam usados em suas aulas.

Palavras-Chave: Relações interdisciplinares; Imaginação pedagógica; Proposta metodológica; Objetos virtuais de aprendizagem.

Abstract

Establish interdisciplinary relationships in the teaching-learning process is of fundamental importance from the perspective of working on concepts from different disciplines, based on a problem situation. Thus, for the present work, a teaching methodological proposal was developed, aiming at an interdisciplinary work in the approach of Mathematics and Physics concepts, and, from this, a pedagogical imagination exercise was triggered. This exercise aimed to identify possibilities and potentialities in relation to the contents and concepts to be explored in solving the problem described in the proposal and counted on the participation of teachers from the two disciplines involved in high school. Interactive virtual learning objects (OVA) were developed, using the GeoGebra software, in order to provide geometric and algebraic visualization of properties related to the proposed problem situation. The data collected during the research were subjected to a discourse analysis in which new possibilities of content and concepts to be worked out from the application of the proposal were evidenced. The results indicate that the use of problem situations with interdisciplinary relations and OVA are favorable characteristics for obtaining satisfactory results in teaching practice, and the pedagogical imagination exercise with teachers brought contributions to their continuing education, and to their interaction with the technological resources available, with a view to being used in your classes.

Keywords: Interdisciplinary relations; Pedagogical imagination; Methodological proposal; Virtual learning objects.

INTRODUÇÃO

As disciplinas que compõem o currículo da Educação Básica possuem um programa de conceitos e conteúdos sugestivos para os professores trabalharem em sua prática docente. Se considerarmos que cada disciplina seja formada por um “conjunto de conteúdos”, ao tomar a interseção de pelo menos dois desses conjuntos, obtém-se um subconjunto diferente do vazio. Nesse processo, o planejamento e o trabalho coletivo, desenvolvido pelos professores, são de fundamental importância. Algumas dessas disciplinas possuem um conjunto interseção formado por um número maior de elementos, ou seja, é possível estabelecer um número maior de relações entre os conceitos, inclusive trabalhando-os de modo complementar. Um exemplo disso ocorre com as disciplinas de Matemática e Física. Além da interdisciplinaridade, outro fator preponderante que atua como suporte pedagógico nesse processo é a utilização de recursos tecnológicos para o desenvolvimento de materiais complementares que facilitam e enriquecem a prática docente.

Para esta pesquisa, elaborou-se uma proposta metodológica visando o ensino de Matemática a partir de uma situação-problema abordada com maior especificidade na disciplina de Física. Constituiu-se como problema principal dessa pesquisa, investigar, a partir das percepções de professores de Matemática e Física no Ensino Médio, as potencialidades e possíveis contribuições dessa proposta metodológica para o desenvolvimento de um trabalho interdisciplinar que tenha como foco a aprendizagem e a aplicabilidade dos conceitos abordados. O objetivo do presente trabalho consiste em fazer um exercício de “imaginação pedagógica”, conforme sugerido por Skovsmose (2015), sendo subsidiado pela percepção de alguns professores que atuam no Ensino Médio, em pelo menos uma das disciplinas. A coleta de dados foi realizada a partir da aplicação de um questionário *online*, concomitantemente a apresentação da proposta através de um vídeo preparado para esta finalidade. Além de explorar possíveis relações a serem estabelecidas entre alguns conteúdos específicos das disciplinas, propõe-se um resgate dos principais conceitos matemáticos e físicos que possam ser explorados na situação-problema, na tentativa de justificar os fenômenos envolvidos. O questionário também serviu para captar algumas percepções dos professores que participaram do exercício de imaginação pedagógica, acerca das possibilidades e de eventuais dificuldades do trabalho interdisciplinar em suas práticas como docentes. Para o desenvolvimento da proposta, foi usado o GeoGebra (*software* livre de geometria interativa que permite visualizações simultâneas de representações geométricas e algébricas), visando a confecção de objetos virtuais de aprendizagem (OVA), com possibilidade de interação, permitindo uma visão mais abrangente do assunto a ser explorado.

Apresenta-se inicialmente um estudo de alguns referenciais que evidenciam a interdisciplinaridade como um recurso metodológico útil ao processo de ensino e aprendizagem, fortalecendo a capacidade do aluno de interligar conceitos de diferentes disciplinas em diversas situações-problema. Segundo Meirieu (1998), situação-problema consiste em situações em que “se propõe ao sujeito uma tarefa que ele não pode realizar sem efetuar uma aprendizagem precisa. E essa aprendizagem, que constitui o verdadeiro objetivo da situação problema, se dá ao vencer obstáculos na realização da tarefa.” (p.189). Destaca-se também a importância de utilizar as ferramentas digitais como suporte metodológico, desenvolvendo OVA, visando uma aprendizagem mais dinâmica e proporcionando maior interação e protagonismo dos estudantes neste processo. A utilização dos recursos tecnológicos na aplicação e planejamento da prática docente pode impulsionar o aprendizado dos conteúdos curriculares e fortalecer a prática pedagógica do professor. Depois de discorrido o marco teórico, é apresentada a metodologia utilizada no desenvolvimento da pesquisa, seguida da apresentação da proposta metodológica e do exercício de imaginação pedagógica. Na sequência é feita a análise dos resultados, e, por fim, algumas considerações sobre o tema em tela.

MARCO TEÓRICO

A ciência, de modo geral, não é estática em si mesma. Muito pelo contrário, é construída e reconstruída constantemente. Essa evolução, no decorrer do tempo, direcionou à criação de novas áreas de conhecimento em virtude do grande quantitativo de novos conceitos que foram surgindo. No contexto educacional, essa evolução trouxe, como consequência, uma divisão nas abordagens, ou seja, criaram-se as disciplinas escolares, que possuíam um direcionamento em sua individualidade, com um quadro sugestivo de conteúdos de acordo com o nível de ensino.

Essa singularidade das disciplinas começou a sofrer contradições quanto a utilização no espaço escolar. Muitas escolas passaram a “[...] romper com o tradicional currículo centrado em disciplinas. A integração era vista como uma maneira de evitar a fragmentação que acompanha a divisão por disciplinas” (Fazenda, 1998, p. 112). Na década de 1970, vestígios investigativos da interdisciplinaridade ganharam destaque, passando a ser definida como a “[...] interação existente entre duas ou mais disciplinas”

(Fazenda, 2008, p. 18). O trabalho interdisciplinar tem como principal objetivo aproximar essas divisões, a fim de que os resultados contribuam e sejam produtivos a todas as disciplinas envolvidas, e principalmente, ao estudante.

Fazenda (2002) destaca a importância do estudo direcionado e o desenvolvimento da ciência, mas, pensando em aprendizes que convivem num espaço escolar da Educação Básica, o trabalho interdisciplinar pode acarretar desencontros nas informações, e isso não é agravante, pois gera abertura para novos questionamentos, promovendo um processo contínuo de aprendizagem, que dependerá da capacidade de cada indivíduo. Segundo a autora, todas as disciplinas possuem “aberturas” para sofrer influência conceitual de outras disciplinas e o estudo inicial sobre determinado assunto pode ser induzido por uma indagação, uma curiosidade acerca de uma situação-problema, partindo de investigações na busca por melhor compreensão e aprofundamento de conceitos que justificam o problema. Esse fato gera a elaboração de hipóteses, que, a partir de relações de conceitos de disciplinas distintas, permitem a obtenção de resultados que, analisando sob um ponto de vista distante, é possível perceber aquisição ou construção de conhecimento na referida atividade, não sendo apenas específico de uma área, mas de todas que contribuíram na busca pela solução do problema.

Associando o prefixo, radical e sufixo da palavra interdisciplinaridade obtém-se “[...] *um encontro que pode ocorrer entre seres – inter – num certo fazer – dade – a partir da direcionalidade da consciência, pretendendo compreender o objeto, com ele relacionar-se, comunicar-se*” (Assumpção, 2011, p. 24). Destaca-se que a interdisciplinaridade não é uma disciplina, nem consiste em efetuar uma reestruturação curricular, mas sim, a partir de situações-problema buscar resgatar conceitos curriculares das disciplinas em questão. Fazenda (2013) destaca que as abordagens interdisciplinares originam-se como uma oposição as possibilidades de fragmentação do conhecimento, tornando a coletividade uma característica comum durante o processo.

Fazenda (2011) complementa que as disciplinas tradicionais, propostas pelo currículo atual, conduzem muitos alunos apenas a um acúmulo de informações, de modo que, ao unir os conhecimentos de todas as disciplinas, tem-se um leque muito amplo e abrangente, mesmo que a capacidade do ser humano não seja suficiente para armazenar, e manter armazenada, tamanha informação. Para isso, existem os recursos tecnológicos como ferramentas suporte que realizam e processam tais atividades eficientemente e a uma velocidade elevada.

De acordo com as Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE's) (2008), em suas individualidades, as disciplinas do currículo escolar são abertas à abordagens externas, possibilitando inter-relacionar-se, individualmente ou em conjunto, com outras disciplinas, ampliando a abordagem dos conteúdos e buscando, cada vez mais, a totalidade, numa prática pedagógica que leve em conta as dimensões científica, filosófica e artística do conhecimento. As competências gerais da educação básica e as competências específicas de cada área do conhecimento e de cada etapa da educação básica, propostas pela nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (2018), reforçam sobre a importância de ações contextualizadas e que permitam a organização interdisciplinar, tendo os recursos didáticos e tecnológicos como suporte ao processo de ensinar e aprender. Em suma, a interdisciplinaridade é um dentre os vários recursos possíveis para explorar diversos conceitos dos diferentes componentes curriculares, possibilitando articulá-los de maneira contextualizada.

A possibilidade de inter-relacionar os conteúdos matemáticos com problemas cotidianos, abordados na Física, utilizando-se de conceitos científicos de ambas as disciplinas, é essencial à compreensão e aprendizagem do aluno. Para facilitar essa interação é fundamental que propostas metodológicas sejam repensadas frequentemente, reformulando e aperfeiçoando as já existentes, incluindo o desenvolvimento de novos materiais e objetos a serem utilizados no ambiente escolar.

No caso das disciplinas de Matemática e Física, de acordo com Tomaz e David (2013), o desenvolvimento dessas propostas deve levar em consideração a necessidade de contextualização e a possibilidade de um trabalho interdisciplinar, proporcionando uma aprendizagem mais abrangente e significativa, a partir do momento em que se adota uma situação-problema do cotidiano (contextualização) e recorre-se a conceitos específicos de determinada(s) disciplina(s) (interdisciplinaridade) na busca por diferentes hipóteses na explicação do fenômeno associado.

Acredita-se que a aprendizagem ocorre, de modo mais eficiente, quando o aluno consegue justificar suas hipóteses e obter conclusões (lógicas ou não). A capacidade de observar, questionar, sugerir possibilidades de respostas aos questionamentos, experimentar, investigar, testar e obter conclusões acerca de determinado assunto ou fenômeno, é o que permite ao aluno uma visualização e compreensão

mais abrangente, que não fica restrita a apenas uma das etapas, como responder a questionamentos, por exemplo.

Tomaz e David (2013) relacionam a interdisciplinaridade como uma *transferência de aprendizagem*, tornando-se mais eficiente e autônoma, a partir do momento em que os alunos transferem seus conhecimentos de disciplinas distintas, buscando justificativas para fenômenos de uma disciplina específica, cientes da necessidade de coparticipação do professor como mediador no processo. Um exemplo do que as autoras expõem, ocorre quando o professor de Física contextualiza um problema que necessita de relações matemáticas para solucioná-lo. Nesse processo é necessário que o aluno e/ou o professor *transfiram/transfira conhecimentos* da matemática para resolver o problema da física, e, conseqüentemente, estão/está *transferindo aprendizagem*.

Atualmente, ainda há certa deficiência de atividades disponíveis aos professores do Ensino Básico que buscam aproximar fenômenos cotidianos aos conhecimentos científicos na prática pedagógica. O aluno, por vezes, conclui o ciclo da Educação Básica escasso de visões relativas à aplicações em que possa utilizar os conhecimentos construídos durante o processo, gerando um hiato nesse elo de ligação.

A informação, através dos recursos tecnológicos, tem se tornado de fácil acesso, sendo atualizada constantemente. Realidade essa também presente nas escolas. Quadro negro (ou *lousa*), giz (ou pincel atômico) e professor foi uma combinação presente nas salas de aula, mas, com a enorme influência da tecnologia no meio, manter apenas esses três elementos produz uma rotina assemelhada à forma tradicional de ver e trabalhar a Educação. As Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's) estão disponíveis para serem utilizadas de modo a melhorar a qualidade dos resultados. Assim, a combinação entre os diversos elementos que compõem ou estão presentes no cotidiano escolar é de fundamental importância.

Oliveira e Moura (2015) ressaltam que o simples fato de inserir as TIC's na rotina da sala de aula, não vai produzir conhecimento por si só. É necessário compreender que as ferramentas tecnológicas não são o ponto principal no processo de ensino e aprendizagem, mas um dispositivo que proporciona a mediação entre educador, educando e saberes escolares, permitindo uma prática mais eficiente e significativa.

O uso dos recursos tecnológicos para desenvolver materiais didáticos e inseri-los na aplicação e planejamento das atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, pode impulsionar a aprendizagem dos conteúdos curriculares e favorecer a prática pedagógica. Para que isso ocorra, é importante que o professor tenha condições de usar e desenvolver objetos virtuais de aprendizagem (ou simplesmente, objetos de aprendizagem, conforme definição usada por alguns autores citados ao longo do texto), a partir de *softwares* disponíveis, visando proporcionar maior compreensão dos conceitos abordados em suas aulas, permitindo melhor visualização, seja geométrica ou algébrica, dos objetos de estudo. Um exemplo disso ocorre em Dantas e Matucheski (2019) que, a partir de um problema contextualizado, desenvolvem três objetos de aprendizagem como 'resposta' à situação-problema, utilizando-se do GeoGebra, evidenciando potencialidades e benefícios oriundos da utilização de ferramentas digitais. Acredita-se que o trabalho interdisciplinar, juntamente com o desenvolvimento e manipulação de objetos tecnológicos, facilita a compreensão da teoria e dos conceitos envolvidos na resolução dos problemas abordados, favorecendo uma aprendizagem mais significativa.

De acordo com Jahn, Druck, Bonomi, Giampaoli e Dutra (2014, p. 19) a tecnologia digital deve ser usada especialmente para “[...] *abrir o leque de possibilidades para o fazer e o pensar matemático, buscando reconhecer e valorizar os conhecimentos e diferentes formas de expressão dos estudantes, a fim de estabelecer um permanente diálogo com a prática educativa*”. Dessa forma, “[...] *o uso da tecnologia está além do ‘fazer melhor’, ‘fazer mais rápido’, trata-se de um ‘fazer diferente’*” (Rolkouski, 2011, p. 102). Para Moran, Masetto e Behrens (2012, p. 63), “*ensinar com novas mídias será uma revolução se mudarmos simultaneamente os paradigmas convencionais do ensino que mantém distantes professores e alunos*”.

O uso de tecnologias em sala de aula pode ocorrer pelo desenvolvimento e interação com OVA, cuja utilização como instrumento de aprendizagem vem sendo discutida desde a década de 1990 (Borba, Silva, & Gadanidis, 2018), principalmente pela sua capacidade de simular e animar fenômenos, e pela facilidade de proporcionar diferentes representações de objetos, especialmente geométricos e algébricos, no caso do ensino da Matemática e da Física. De acordo com Audino e Nascimento (2010, p. 133), “[...] *qualquer material digital que possa ser reutilizado para dar suporte ao ensino é considerado um objeto de aprendizagem*”. Para Hay e Knaack (2007), podem ser considerados OVA quaisquer ferramentas interativas que apoiam o aprendizado de conceitos específicos, incrementando, ampliando ou orientando o processo

cognitivo de quem está aprendendo, sendo sua principal função a de auxiliar no estímulo ao desenvolvimento de capacidades pessoais, dentre elas, a imaginação e a criatividade. Kleemann e Petry (2020) evidenciam potencialidades da utilização de OVA no ensino, caracterizando-os como importantes elementos auxiliares no processo de aprendizagem, contribuindo na motivação dos alunos e na sistematização e formalização dos conceitos neles abordados, sendo combustíveis impulsionadores para articular conceitos e possibilitar práticas interdisciplinares.

Quando são desenvolvidas ou apresentadas novas propostas metodológicas para o ensino de Matemática, é importante fazer um exercício de “imaginação pedagógica”, conforme sugerido por Skovsmose (2015). Segundo o autor, trata-se de um processo importante “*para sugerir que práticas educativas alternativas são possíveis*” (p. 76), considerando também que essa imaginação é “*parte integrante da pesquisa educacional que não permanece no paradigma descritivo, pois ela é fundamental para a pesquisa de possibilidades educacionais*” (p. 76). O autor defende ainda que a imaginação pedagógica necessita de combustível e de recursos para ocorrer, sendo fundamental na busca de alternativas para o processo de ensino e aprendizagem, constituindo-se em uma “*pesquisa de possibilidades*” através de um “*raciocínio exploratório*” com o relacionamento entre diferentes situações, sejam atuais, experimentais, arranjadas ou imaginárias em todas as suas multiplicidades. Seu objetivo é o de “*desenvolver uma compreensão mais profunda da situação imaginada [...] é por meio desse processo que a situação imaginada se torna fundamentada*” (Skovsmose, 2015, p. 79).

Algumas pesquisas têm sido desenvolvidas na perspectiva da imaginação pedagógica, fundamentadas em Skovsmose, com a finalidade de criar ou estudar possibilidades e potencialidades de ações futuras em aulas de Matemática. Milani (2017) apresentou um estudo de orientação e imaginação pedagógica, desenvolvido a partir de diálogos e episódios vivenciados por alunos de um curso de formação de professores de matemática em uma disciplina de estágio supervisionado. O estudo teve como finalidade, a partir do exercício de imaginação pedagógica, a proposição de ações que auxiliassem os futuros professores em sua atuação profissional.

Queiroz (2019) destaca a importância do processo de estudo de possibilidades com a finalidade de inspirar possíveis ideias pedagógicas para o ensino de conceitos da Matemática. A autora apresenta um exercício de imaginação pedagógica desenvolvido a partir de questionamentos e experiências específicas surgidos em sala de aula, enfatizando o “*intuito de formular ideias educacionais associadas a propostas de mudanças de práticas pedagógicas, utilizando exemplos específicos como ponto de partida*” (p. 70). Enfatiza ainda a importância do processo de estudo de possibilidades, com a finalidade de inspirar possíveis ideias pedagógicas para o ensino de conceitos da Matemática.

Biotto Filho, Faustino e Moura (2017) apresentam reflexões sobre os ambientes de aprendizagem, salientando a importância da criação de cenários de investigação e imaginação, visando ampliar as potencialidades de desenvolver conceitos, para que “*além das referências à matemática pura, semirrealidade e a realidade que os cenários façam referência às possibilidades, destacando assim situações de aprendizagem que não se referem à realidade de fato, mas que consideram situações que poderiam acontecer*” (p. 64). Os autores também abordam a importância de uma investigação direcionada pelo professor, e de abordagens com cenários voltados para a ação, em que os estudantes são convidados a agirem sobre a realidade em que vivem.

Na perspectiva proposta por Skovsmose, considera-se importante estudar situações imaginadas com base nos recursos gerados na situação arranjada, transformando a imaginação em alternativas mais acessíveis para estabelecer novas possibilidades ou formas de abordagem dos conteúdos a serem trabalhados com os alunos. Este tipo de pesquisa é possível a partir da avaliação das propostas metodológicas, buscando identificar possibilidades e potencialidades que estas podem proporcionar para o ensino de Matemática e Física, de forma interdisciplinar, permitindo imaginar além do que eventualmente ocorreria em um estudo de caso, por exemplo.

METODOLOGIA

Para este trabalho foi elaborada uma proposta metodológica visando estabelecer relações interdisciplinares na resolução de um problema aplicado a inúmeras situações práticas, geralmente abordadas no Ensino Médio na disciplina de Física: espelhos esféricos e a caracterização das imagens a partir da posição do objeto em relação ao espelho. Na elaboração da proposta foram desenvolvidos OVA com possibilidade de interação e manipulação, permitindo uma visão mais abrangente do assunto, tendo como suporte tecnológico o *software* livre GeoGebra.

Utilizando-se dessa proposta metodológica, desenvolveu-se uma pesquisa de possibilidades em um exercício de imaginação pedagógica, na perspectiva de identificar relações a serem estabelecidas entre conteúdos específicos de disciplinas presentes no currículo escolar do Ensino Médio, propondo um resgate dos principais conceitos matemáticos e/ou físicos possíveis de serem explorados, na tentativa de justificar os fenômenos envolvidos. Foram elencadas possibilidades de investigar conceitos de forma a justificar, modelar e interpretar os fenômenos da Física sob o olhar da Matemática.

Além das percepções dos autores desse artigo, buscou-se a contribuição de professores que atuam no Ensino Médio nas referidas disciplinas, por meio de um questionário *online*, que serviu para a coleta de alguns elementos relativos às percepções destes sobre as possibilidades do desenvolvimento de atividades interdisciplinares em suas aulas. Segundo Gil (1999, p.128), o questionário pode ser definido “*como a técnica de investigação composta por um número mais ou menos elevado de questões apresentadas por escrito às pessoas, tendo por objetivo o conhecimento de opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas etc.*”.

Os pesquisadores buscaram pelo contato de egressos de um curso de licenciatura em Matemática, egressos de um curso de mestrado profissional para professores de Matemática, e, em listas de participantes em cursos de formação continuada para professores de Matemática e de Física, aos quais enviou-se, via e-mail, um convite para participar de um exercício de imaginação pedagógica. No convite fez-se uma breve apresentação do propósito do questionário, do tempo aproximado de três horas para desenvolver todas as etapas da atividade, que estava direcionada para docentes que atuam ou já atuaram no Ensino Médio em pelo menos uma das disciplinas envolvidas. O questionário foi efetivamente respondido por sete professores (embora um número maior tenha manifestado interesse em responder), sendo que seis destes atuam ou já atuaram na disciplina de Matemática, enquanto quatro atuam ou já atuaram como professores de Física no Ensino Médio, tendo, portanto, professores com experiência nas duas disciplinas envolvidas. Três professores que responderam ao questionário concluíram o mestrado, dois cursaram especialização e dois apenas concluíram a graduação. Vale ressaltar que o objetivo do questionário não foi obter um retrato estatístico da percepção dos professores com a finalidade de fazer generalizações, mas somente de considerar contribuições de alguns professores no exercício de imaginação pedagógica, não havendo dessa forma, a preocupação com o tamanho da amostra de respondentes. Assim, foram consideradas apenas as respostas dos sete professores que responderam a todas as etapas do questionário.

O questionário foi dividido em dois momentos. No primeiro momento, os professores foram convidados a responderem questões abertas, versando sobre suas experiências e sobre as potencialidades do desenvolvimento de ações interdisciplinares em suas atividades docentes. Após responderem aos aspectos mais gerais, foi apresentado o problema a ser abordado na proposta metodológica e foi solicitado que elencassem os conteúdos, conceitos e/ou abordagens, relacionados as disciplinas de Matemática e/ou Física, que em sua percepção poderiam ser trabalhados/explorados em sala de aula, relativo ao respectivo problema.

Após responderem as questões iniciais, os professores tiveram contato com a proposta metodológica, através da disponibilização dos *links* de acesso e instruções para interação com os OVA desenvolvidos no GeoGebra, além de um vídeo com uma apresentação da proposta em que foi definido o problema da Física nela contido. No vídeo também foram apresentadas aos professores algumas possibilidades de abordagem de conceitos na percepção dos autores desta pesquisa. Estas proposições são apresentadas na próxima seção deste trabalho. Após a interação com o material disponibilizado, passou-se para o segundo momento do questionário, em que os professores foram convidados a mencionar outros tópicos relativos ao problema em tela que poderiam ser abordados em aulas do Ensino Médio nas disciplinas de Matemática e/ou de Física, além dos já citados no momento anterior. Por fim, foram instigados a trazer novas percepções sobre as possibilidades de trabalhar de forma interdisciplinar e de usar OVA em suas atividades docentes.

Destaca-se que o exercício de imaginação pedagógica foi proposto a um grupo de professores tendo por objetivo conhecer suas percepções sobre a viabilidade e as potencialidades da proposta metodológica, gerando a possibilidade de enriquecê-la a partir dos resultados de tal aplicação. Isso não descarta a hipótese dessa mesma proposta ser trabalhada pelos professores em sala de aula; muito pelo contrário, participar de um exercício de imaginação pedagógica dá suporte ao professor no encaminhamento de sua prática docente, quando fizer uso do material. Assim, o trabalho tem como foco principal a ação interdisciplinar na prática de sala de aula, na resolução de problemas baseados em situações cotidianas.

Por se tratar de uma pesquisa qualitativa, optou-se pela Análise do Conteúdo (AC) como alternativa metodológica no estudo das informações. A AC, proposta por Bardin (2011), consiste numa técnica que tem na fenomenologia um de seus fundamentos. Compreende um conjunto de instrumentos em contínuo processo de aperfeiçoamento, podendo ser aplicada em diferentes tipos de discursos, incluindo respostas a questionários. Um de seus focos é a valorização dos sujeitos e de suas manifestações, permitindo que os fenômenos sejam percebidos. Além disso, visa melhor compreender um fenômeno a partir de explicações de teorias construídas com base em informações reunidas a partir do próprio fenômeno.

A autora indica que na AC é essencial o desenvolvimento de três fases, sendo: 1) a pré-análise; 2) a exploração do material; e, 3) o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. Na primeira fase define-se os materiais que serão analisados, que podem ser diversificados. Da posse desses, faz-se uma análise prévia, levantando possíveis hipóteses e objetivos para elaboração de estudos mais aprofundados, que culminem numa produção final. Na segunda fase, complementar a primeira, faz-se uma reestruturação das informações destacadas como relevantes, podendo gerar codificações que permitam melhor associar, organizar e compreender as informações coletadas, com o cuidado para não eximir informações relevantes ao estudo. Por fim, na terceira fase, é momento de transformar os dados brutos em dados significativos, e que tenham validade. Para isso recorre-se continuamente aos referenciais teóricos, tendo-os como suporte de ancoragem para reforçar as teorias e hipóteses propostas a partir do estudo dos dados (Bardin, 2011).

No presente artigo, as informações coletadas e estudadas foram obtidas a partir da aplicação de um questionário aos professores, sujeitos da pesquisa. De posse das respostas do questionário, fez-se a pré-análise do material, explorando os diferentes direcionamentos. Após isso se propôs um diálogo entre as respostas proferidas, buscando a aproximação de sentidos. Para isso utilizou-se de trechos reais descritos pelos sujeitos, o que permite melhor compreensão e a diversidade de significados expressos nas palavras.

Pautado na AC, dentre as diversas possibilidades de técnicas de análise dos resultados, propostas por Bardin (1977), nesse trabalho optou-se pela análise da enunciação, a qual *“assenta numa concepção do discurso como palavra em acto. [...] uma produção de palavra é um processo. A análise da enunciação considera que na altura da produção da palavra, é feito um trabalho, é elaborado um sentido e são operadas transformações”* (Bardin, 1977, p. 170). Dessa forma, evidencia-se a importância de atribuir sentido às expressões dos sujeitos de pesquisa, mesmo que sejam em simples palavras, sendo pertinente dialogar entre as diferentes considerações apresentadas pelos sujeitos de pesquisa, pelos autores e pelos referenciais teóricos. Isso vem apresentado na seção intitulada “Resultados e Análises”.

APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA FÍSICO PROPOSTO AOS PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO E ESTUDO DE POSSIBILIDADES DE RELAÇÕES INTERDISCIPLINARES

Nesta seção é apresentado o problema físico sobre o qual foi desenvolvida a proposta metodológica, tomando como base a abordagem desse problema em livros didáticos de Física para o Ensino Médio. A partir da proposição do problema faz-se um exercício de imaginação pedagógica, em que são exploradas algumas potencialidades de relações interdisciplinares que podem ser estabelecidas, de forma a explorar conceitos de Matemática e de Física em atividades a serem desenvolvidas com a referida proposta. Apresentam-se nesta seção algumas discussões e abordagens que, na percepção dos autores deste trabalho, podem ser desenvolvidas em sala de aula, de forma integrada, nas duas disciplinas. As mesmas abordagens também estiveram presentes no vídeo disponibilizado aos professores após terem respondido as questões iniciais do questionário, tendo por finalidade ampliar, com estes, discussões sobre as potencialidades da proposta e do uso dos OVA, além da possibilidade de contribuir no aprofundamento dos seus próprios exercícios de imaginação pedagógica. Além disso, os OVA e o vídeo podem se constituir em ferramentas a serem utilizados pelos professores em sua prática pedagógica.

Quando se observa a aplicabilidade dos espelhos no cotidiano, existem situações que, dependendo da posição do objeto em relação à superfície refletora, a imagem aparece em tamanho real, maior ou menor do que o objeto, ou ainda, pode não ocorrer formação de imagem, mesmo que a superfície seja refletora. Assim, é comum o questionamento sobre o motivo pelo qual ocorre essa ampliação, redução ou inexistência de imagem.

Artuso e Wrublewski (2013, p. 194) definem espelho como *“toda superfície com alto poder de reflexão da luz na qual é preponderante a reflexão especular, típica de superfícies polidas”*. Nesse trabalho foca-se no estudo dos espelhos curvos, com especificidade aos esféricos. Guimarães, Piqueira e Carron (2014, p. 229) destacam que os espelhos esféricos *“[...] são calotas esféricas obtidas pelo corte de uma superfície esférica com um plano, e, em seguida, espelhadas”*. Desse modo, *“se o espelhamento é feito na*

superfície interna da calota, o espelho esférico é denominado *côncavo*” e, “quando o espelhamento é feito na superfície externa da calota, o espelho esférico é denominado *convexo*”, conforme ilustrado na Figura 1.

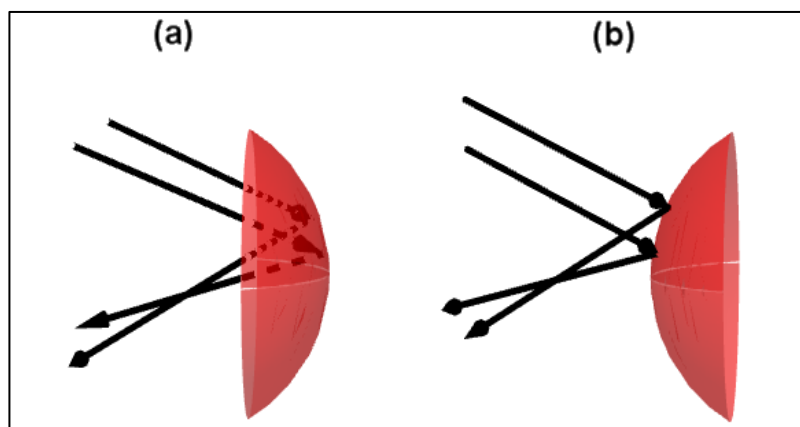


Figura 1 – Espelhos esféricos: (a) côncavo e (b) convexo. Fonte: Autores.

Para analisar e estudar o comportamento de um raio de luz incidente sobre um espelho esférico, utiliza-se uma seção transversal da calota esférica que contém o centro da esfera imaginária da qual a calota foi originada, de acordo com o direcionamento do raio de luz incidente sobre o espelho. Na Figura 2, identificam-se os principais elementos geométricos associados aos espelhos esféricos, considerando a seção plana.

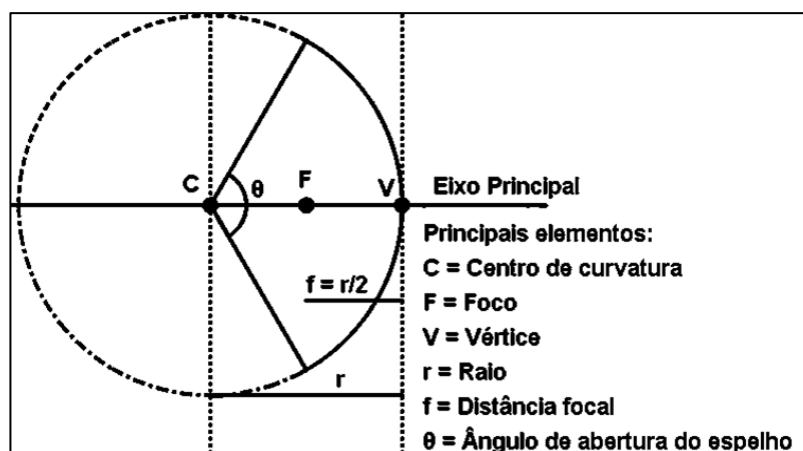


Figura 2 – Elementos geométricos de um espelho esférico. Fonte: Autores.

O centro de curvatura coincide com o centro da esfera que deu origem à calota esférica; o vértice é um ponto pertencente à esfera; e, o foco é o ponto médio entre o vértice e o centro de curvatura. A distância focal, numericamente, equivale à metade da medida do raio da esfera, e, por definição, é positiva nos espelhos côncavos e negativa nos espelhos convexos.

Apresentam-se aqui as características dos raios luminosos e o processo de formação da imagem abordados em Artuso e Wrublewski (2013) e Guimarães, Piqueira e Carron (2014), sendo análogas às apresentadas em outras referências consultadas, e que são disponibilizadas para trabalhar na Educação Básica. De acordo com os autores citados, existem alguns raios notáveis que apresentam comportamento característico, com as seguintes propriedades: P01: os raios luminosos que incidem paralelamente ao eixo principal de um espelho esférico são refletidos de modo que passam pelo foco (se o espelho for côncavo) ou são refletidos de tal forma que os seus prolongamentos passem pelo foco (se o espelho for convexo); P02: os raios luminosos (ou seus prolongamentos) que incidem passando pelo foco são refletidos paralelamente ao eixo principal; P03: os raios luminosos (ou seus prolongamentos) que incidem passando pelo centro de curvatura são refletidos sobre si mesmos; P04: os raios luminosos que incidem no vértice do espelho tem como raio refletido o seu respectivo simétrico em relação ao eixo principal.

Vale ressaltar que as propriedades P03 e P04 podem ser demonstradas a partir de conceitos e resultados da geometria, enquanto as propriedades P01 e P02 são aproximações (simplificações) e,

portanto, não se verificam como resultados de relações da geometria, considerando-se com rigor, as demonstrações usualmente feitas na Matemática.

Observa-se que a formação de imagens está condicionada à forma com que os raios incidem sobre o espelho. Guimarães, Piqueira e Carron (2014, p. 233) destacam que “[...] quando um objeto real é posicionado diante de um espelho esférico, seja ele côncavo ou convexo, é obtida uma imagem conjugada que será real ou virtual. Além disso, a imagem pode ser ampliada, reduzida ou do mesmo tamanho do objeto”. Uma imagem é real quando é formada em frente ao espelho (projetada), e virtual quando atrás. Conforme Artuso e Wrublewski (2013), a imagem pode ainda ser caracterizada, de acordo com sua orientação, em direita ou invertida em relação ao objeto, e, quanto a sua distância em relação ao espelho, podendo formar-se mais próxima, mais distante ou a uma mesma distância que o objeto.

Para caracterizar a imagem é necessário estabelecer os seguintes procedimentos: (i) traçar ao menos dois raios distintos que partem de um mesmo ponto do objeto e chegam ao espelho (raios incidentes); (ii) para cada raio incidente, determinar o respectivo raio refletido; e, (iii) no ponto de encontro dos raios refletidos (se existir) haverá a formação da imagem para o respectivo ponto em relação ao objeto.

Uma restrição apresentada nos livros didáticos pesquisados, associada à formação das imagens nos espelhos esféricos, refere-se às condições de nitidez de Gauss. De acordo com a literatura, aqui caracterizada por Artuso e Wrublewski (2013), para obter imagens nítidas, os raios luminosos devem incidir próximos ao eixo principal e praticamente paralelos em relação a ele (raios paraxiais) e o ângulo de abertura (θ) do espelho deve ser pequeno (menor ou igual a 10°). O espelho que apresenta uma área razoável tem seu raio de curvatura bastante grande, o que torna o espelho esférico pouco curvado, aproximando-se de um espelho plano e, por isso, os autores dos materiais didáticos consultados consideram os espelhos esféricos como aproximações de espelhos planos no momento de fazer e justificar suas caracterizações, gerando erros de aproximação.

A caracterização do ângulo de abertura θ de um espelho é dada de acordo com o tamanho do objeto do qual se deseja obter a imagem. Na Figura 3 é representada uma seção transversal de um espelho esférico côncavo de centro de curvatura C , foco F e vértice V , e, um objeto representado pelo vetor $\overline{P_1P_2}$ perpendicular ao eixo principal, sendo P_1 um ponto sobre o eixo principal e P_2 o ponto mais distante do eixo principal. Sejam Q_1 um ponto sobre a superfície do espelho, obtido a partir da incidência do raio com origem em P_2 e paralelo ao eixo principal, e Q_2 o ponto sobre a superfície do espelho, simétrico a Q_1 em relação ao eixo principal. O ângulo de abertura θ do espelho é definido por $\theta = \widehat{Q_1CQ_2}$.

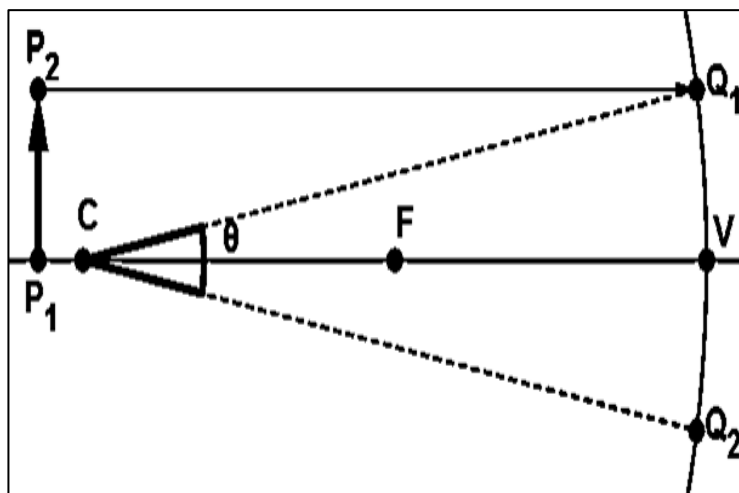


Figura 3 – Caracterização do ângulo de abertura de um espelho esférico. Fonte: Autores.

Neste contexto, quanto menor for o tamanho do objeto, menor será o ângulo de abertura do espelho. Na Figura 3, nota-se que o comprimento do arco $\widehat{Q_1Q_2}$, fixado um ângulo θ , depende do raio do círculo. Quanto maior for o raio, maior será o comprimento do arco. Desse modo, sejam os círculos Γ , Γ' , Γ'' e Γ''' formados pela interseção de um plano com esferas de centro C e raios r , r' , r'' e r''' com $r < r' < r'' < r'''$, respectivamente, tal que o plano contenha C . Ainda, sejam V_1, V_2 ; V'_1, V'_2 ; V''_1, V''_2 e V'''_1, V'''_2 pontos de Γ , Γ' , Γ'' e Γ''' , respectivamente, simétricos em relação a um de seus diâmetros, e que delimitam os espelhos. A Figura 4 apresenta quatro espelhos esféricos côncavos com um mesmo ângulo de abertura θ (obedecendo as condições de nitidez de Gauss), porém com raios de módulos distintos. Nota-se que o

ângulo $\theta = V_1\hat{C}V_2 = V_1'\hat{C}V_2' = V_1''\hat{C}V_2'' = V_1'''\hat{C}V_2'''$ é equivalente, mesmo com a variação do raio, e, quanto aos comprimentos dos arcos tem-se $\overline{V_1V_2} < \overline{V_1'V_2'} < \overline{V_1''V_2''} < \overline{V_1'''V_2'''}$. Nota-se aqui a possibilidade de explorar conceitos relativos à semelhança de figuras geométricas, além das propriedades inerentes à disciplina de Física.

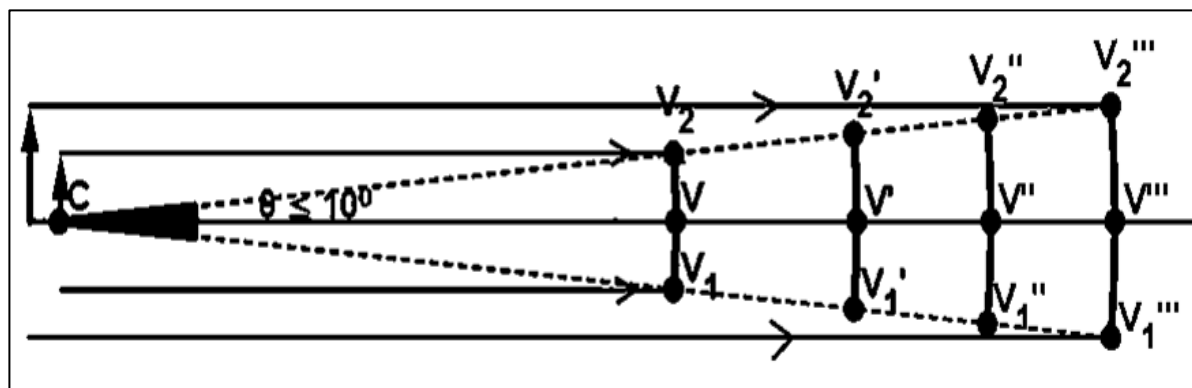


Figura 4 – Representação dos raios paraxiais e ângulo θ de abertura no espelho côncavo de acordo com o raio de curvatura. Fonte: Autores.

Ao analisar a caracterização das imagens propostas nos livros didáticos, observam-se várias simplificações, de forma que as teorias apresentadas representam uma aproximação da realidade, e como qualquer simplificação pode levar a erros de aproximação, é importante que professores e alunos tenham condições de avaliar a influência dessas simplificações nos resultados obtidos. Vale ressaltar que não é objetivo desta pesquisa criticar o conteúdo do material didático usado no Ensino Médio, visto que o uso de simplificações é frequente na modelagem de situações-problema, mas sim, dar suporte ao professor para que ele tenha a possibilidade de analisar e compreender os possíveis erros gerados por cada uma das simplificações adotadas.

Uma das potencialidades apontadas no exercício de imaginação pedagógica proposta neste trabalho, consiste em fazer estimativas desses erros em função do raio e do ângulo de abertura do espelho. Uma análise superficial já permite visualizar que, quanto menor for o ângulo de abertura do espelho e mais próximos do eixo principal os raios incidirem, menor será o erro causado pela simplificação adotada pelos livros didáticos em que consideram um espelho esférico como uma superfície plana para estudar as características de formação de imagem nesses espelhos. De fato, este erro tende a zero, quando o ângulo de abertura tende a zero: as condições de nitidez de Gauss permitem “aceitar” essas aproximações. Embora entenda-se que, quando essas condições estão satisfeitas o erro de aproximação esteja relativamente controlado, propõe-se no exercício de imaginação pedagógica, entre outros aspectos, um estudo dos erros gerados pelas simplificações, justificando-os a partir de conhecimentos da geometria, consultados em Muniz Neto (2013)¹, e de visualizações, simulações e construções, desenvolvidas no GeoGebra.

Na sequência, são apresentadas algumas caracterizações de imagens produzidas por um espelho esférico côncavo de centro de curvatura C , foco F e vértice V , de acordo com a posição e tamanho do objeto em relação ao espelho, desprezando-se os erros das simplificações citadas. Nas figuras representativas dessas caracterizações, consideram-se as linhas pontilhadas como sendo a representação dos raios refletidos (ou seus prolongamentos) e as linhas cheias como sendo os raios incidentes. De acordo com Artuso e Wrublewski (2013) e Guimarães, Piqueira e Carron (2014), são cinco casos a analisar:

Quando o objeto real PQ está posicionado antes do centro de curvatura C , (Figura 5 (a)), considerando as propriedades P01 e P02, a imagem SR estará posicionada entre o foco e o centro de curvatura, tendo natureza real, orientação invertida em relação ao objeto; e, tamanho menor do que o objeto.

Quando o objeto real OC está posicionado sobre o centro de curvatura (Figura 5 (b)), pelas propriedades P01 e P02 tem-se que a imagem fica posicionada sobre o centro de curvatura, com natureza real, orientação invertida em relação ao objeto e tamanho igual ao do objeto.

¹ A linguagem matemática adotada nesse trabalho equivale à linguagem adotada pelo autor, utilizando o símbolo de igualdade ($=$) quando compara ângulos ou segmentos de reta, e, o símbolo de congruência (\cong) para representar congruência de figuras geométricas.

Quando um objeto real ED está posicionado entre o centro de curvatura C e o foco F (Figura 5 (c)), pelas propriedades P01 e P02 tem-se a imagem BA posicionada antes do centro de curvatura, com natureza real, orientação invertida em relação ao objeto e de tamanho maior ao do objeto.

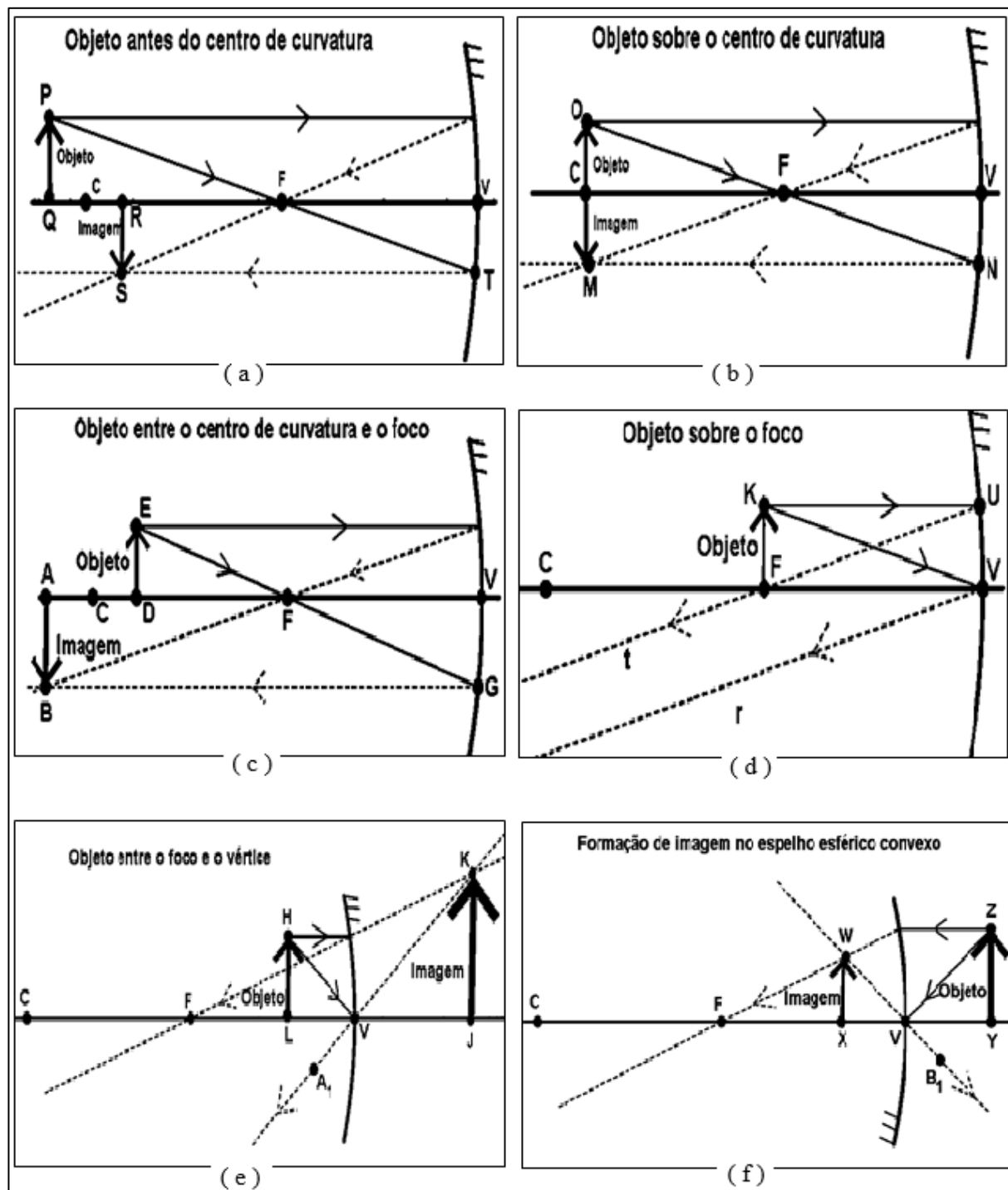


Figura 5 - Ilustração da caracterização das imagens em espelhos esféricos, considerando válidas as simplificações propostas em materiais didáticos para o Ensino Médio. Fonte: Autores.

Para um objeto real KF posicionado sobre o foco F (Figura 5 (d)): pelas propriedades P01 e P04 não ocorre formação de imagem, visto que os raios refletidos são paralelos.

No caso em que um objeto real HL está posicionado entre o foco F e o vértice V (Figura 5 (e)), pelas propriedades P01 e P04, a imagem KJ estará posicionada atrás do espelho, com natureza virtual, orientação direita em relação ao objeto e de tamanho maior que o do objeto.

Nos espelhos convexos, as imagens formadas possuem as mesmas características, independentemente da posição que o objeto ocupa em relação ao espelho. Uma imagem WX , de um objeto ZY situado em frente a um espelho convexo (Figura 5 (f)), usando as propriedades P01 e P04, está posicionada atrás do espelho, entre o foco e o vértice, com natureza virtual, orientação direita em relação ao objeto e de tamanho menor que o do objeto.

Assim, no exercício de imaginação pedagógica, propõe-se analisar, investigar e buscar justificativas matemáticas, a partir da semelhança de triângulos, para verificar a veracidade dos seis casos de imagens formadas em espelhos esféricos, anteriormente descritos e, em caso de inconsistências do ponto de vista matemático, derivada da simplificação exposta acima, avaliar o erro causado por essa simplificação. Observa-se que, por abordarem somente espelhos que respeitam as condições de nitidez de Gauss, Artuso e Wrublewski (2013) e Guimarães, Piqueira e Carron (2014) desconsideram a curvatura do espelho (relativamente pequena quando esta condição é satisfeita), de forma a considerarem que, dado um ponto P' qualquer sobre a superfície de um espelho esférico de vértice V , o segmento $\overline{P'V}$ é a projeção ortogonal do ponto P' sobre o eixo principal do espelho, e, que o objeto situado em frente ao espelho também é perpendicular em relação ao eixo principal. Tomando essas hipóteses e considerando válidas também as propriedades P01 e P02, os casos acima expostos (representados na Figura 5) se verificam facilmente usando semelhança de triângulos. Porém, do ponto de vista matemático isso é inconsistente (e por isso é uma simplificação), visto que nenhuma corda da circunferência pode ser perpendicular a um raio em um de seus extremos. Na sequência desse exercício de imaginação pedagógica, com a finalidade de apontar mais algumas potencialidades da proposta de trabalho interdisciplinar, faz-se uma análise dessas situações observando os erros cometidos nestas simplificações.

No objeto real PQ , posicionado antes do centro de curvatura C de um espelho côncavo, na Figura 5 (a), analisam-se os triângulos PFQ e TFV' , onde V' é a projeção ortogonal de T sobre \overline{CV} . Nota-se que, $P\hat{Q}F = T\hat{V}'F = 90^\circ$ e $P\hat{F}Q = T\hat{F}V'$, pois são ângulos opostos pelo vértice. Logo, pelo caso de semelhança AA (Ângulo, Ângulo), $\Delta PFQ \sim \Delta TFV'$. Assim, $\frac{PQ}{TV'} = \frac{PF}{TF} = \frac{QF}{V'F} = k$, mas $QF > CF = VF > V'F \Rightarrow \frac{QF}{V'F} = k > 1 \Rightarrow \frac{PQ}{TV'} = k > 1 \Rightarrow PQ > TV'$. Como $TV' = SR$, então $PQ > SR$, sendo PQ o tamanho do objeto e SR o tamanho da imagem, justificando a caracterização da imagem, a qual indica que seu tamanho é menor em relação ao objeto. Neste caso, apesar da simplificação feita, a situação exposta nos livros didáticos se confirma, porém, com uma justificativa diferente à apresentada nos referidos materiais.

Para avaliar a veracidade do segundo caso, ilustrado na Figura 5 (b), considera-se a Figura 6 (a), onde $V'N$ é ortogonal ao segmento \overline{CV} , sendo V o vértice e C o centro de curvatura do espelho côncavo de raio r . Seja C' um ponto de \overline{CF} tal que $C'O$ (tamanho do objeto) e $C'M$ (tamanho da imagem) sejam ortogonais a \overline{CF} . Assumindo válidas as propriedades P01 e P02, note que por AA , $\Delta OFC' \sim \Delta NFV'$. Assim, $C'O = C'M$ se, e somente se, $C'F = FV'$, ou seja, F é ponto médio de $\overline{C'V'}$ de forma que $\overline{CC'} = \overline{V'V}$.

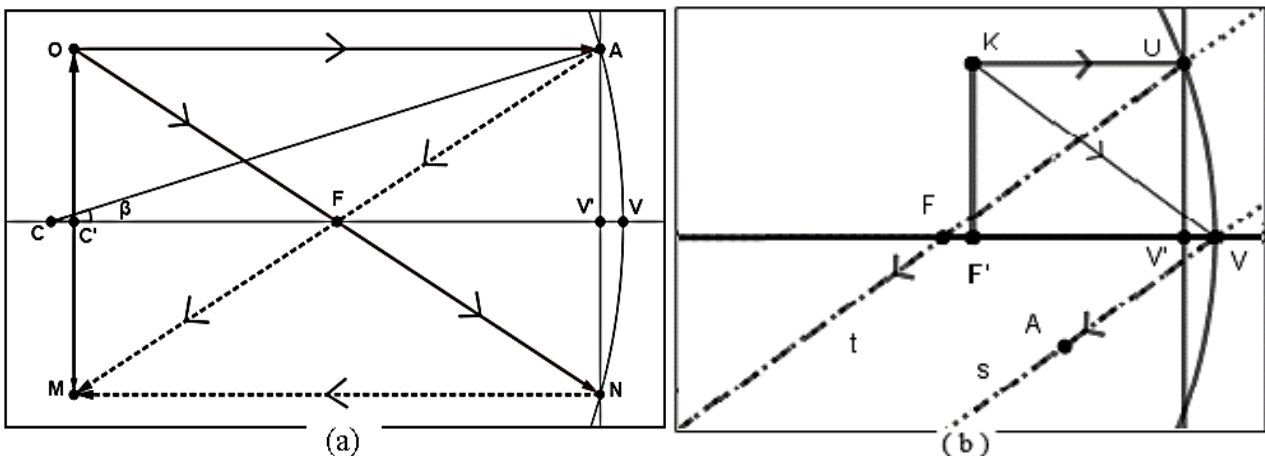


Figura 6 – Objeto posicionado em frente a um espelho côncavo gerando uma imagem congruente ao objeto (a) e situação em que não ocorre formação de imagem (b). Fonte: Autores

Sendo $\cos \beta = \frac{CV'}{r}$, segue que: $\overline{V'V} = \overline{CV} - \overline{CV'} = r - r \cdot \cos \beta = r(1 - \cos \beta)$.

Observe que quando β tende à zero, $\overline{V'V}$ tende à zero, o que implica que C' tende à C , ou seja, para objetos suficientemente pequenos, ou raios de curvatura suficientemente grandes (espelho esférico tendendo a um espelho plano), β fica próximo de zero e assim, C' próximo de C . No limite das condições de nitidez de Gauss, tem-se $\beta = 5^\circ$ e $\overline{V'V} = r(1 - \cos 5^\circ) \cong 0,0038r$, o que representa 0,38% do valor do raio de curvatura do espelho. Considerando que em muitas situações práticas o raio de curvatura dos espelhos é relativamente grande, esse erro pode se tornar significativo, cabendo em cada caso avaliar a precisão necessária para validar ou não essa situação.

Nota-se que para um objeto $O'C''$ de tamanho e orientação iguais ao objeto OC' da Figura 6 (a), com $C'' \in \overline{CC'}$, traz $\overline{O'C''} > \overline{N'V''}$, sendo N' o ponto de incidência do raio, sobre o espelho, que parte de O' e passa pelo foco F , e, V'' a projeção ortogonal de N' sobre \overline{FV} . Assim, se um objeto está localizado entre os pontos C e C' , e, portanto, entre o centro e o foco do espelho, o tamanho de sua imagem é menor que o tamanho do objeto, contrariando a caracterização apresentada anteriormente. De forma semelhante, observa-se que para um objeto $O''C'''$ de tamanho e orientação iguais ao objeto OC' da Figura 6 (a), com C''' situado entre C' e F , temos $\overline{O''C'''} < \overline{N''V''''}$, sendo N'' o ponto de incidência do raio, sobre o espelho, que parte de O'' e passa pelo foco F , e, V'''' a projeção ortogonal de N'' sobre \overline{FV} . Assim, o tamanho da imagem é maior que o tamanho do objeto.

Em relação ao objeto real KF posicionado sobre o foco F de um espelho côncavo, ilustrado na Figura 5 (d), ocorre uma situação análoga aos casos anteriores. Novamente é possível mostrar que os raios refletidos são paralelos quando o objeto está posicionado em um ponto $F' \in \overline{FV}$, de forma que $\overline{FF'} = \overline{V'V}$, onde V' é a projeção ortogonal de U sobre \overline{FV} , conforme Figura 6 (b). De fato, as retas s e t são paralelas se, e somente se, $U\hat{F}V = A\hat{V}F$. Pela propriedade de reflexão dos raios tem-se que $K\hat{V}F = A\hat{V}F$, e assim, $s \parallel t \Leftrightarrow U\hat{F}V = K\hat{V}F$. Sendo $K\hat{F}V = U\hat{V}F = 90^\circ$ e $\overline{F'K} = \overline{V'U}$, segue que isso ocorre se, e somente se, $\overline{F'V} = \overline{V'F}$ o que implica $\overline{FF'} = \overline{V'V}$.

Na Figura 5 (e) sugere-se que, quando o objeto real HL for posicionado entre o foco F e o vértice V de um espelho côncavo, o tamanho da imagem é maior em relação ao objeto e a imagem fica posicionada atrás do espelho. Seguindo a ideia usada no caso anterior, é possível observar que isso ocorre quando o objeto está posicionado entre o ponto F' e o vértice V .

Situações análogas ocorrem nos demais casos (incluindo os espelhos convexos) em que, do ponto de vista da formalidade matemática, são necessários alguns ajustes em relação ao exposto nos livros de Física. Vale ressaltar que Artuso e Wrublewski (2013) e Guimarães, Piqueira e Carron (2014) consideraram simplificações, que trazem aproximações da realidade e, quando o ângulo de abertura é pequeno, a aproximação fica bem razoável, o que justifica a exigência das condições de nitidez de Gauss como um ponto de tolerância do erro da aproximação. Nos OVA disponibilizados aos professores para o exercício de imaginação pedagógica, era possível usar animações para manipular o ângulo de abertura do espelho, o raio de curvatura do espelho e as características (tamanho e posição) do objeto, tendo a modificação das características da imagem como consequência, possibilitando verificar a existência de erros matemáticos a partir da quantificação numérica dos elementos envolvidos no objeto para cada situação simulada.

Analisando a propriedade relativa aos ângulos de incidência e reflexão dos raios, em relação ao plano tangente à esfera (ou à reta tangente na circunferência obtida no corte analisado) no ponto de incidência do raio, percebe-se que um raio que incide paralelo ao eixo principal, não é refletido passando pelo foco e o raio incidente que passa pelo foco não é refletido paralelamente ao eixo principal, conforme anunciado nas propriedades P01 e P02. Trata-se novamente de uma simplificação que, para ângulos pequenos, gera um erro relativamente pequeno, porém à medida que o ângulo aumenta, esse erro se torna bastante significativo. Essa situação pôde ser visualizada geometricamente em um dos OVA desenvolvidos no GeoGebra. O fato de que na análise anterior essas duas propriedades foram assumidas como verdadeiras, sugere a tendência de erros mais significativos do que os obtidos nesta análise, o que levou à novas possibilidades de exploração de conceitos da Matemática ou da Física, a partir da proposta metodológica e dos objetos virtuais desenvolvidos para o exercício da imaginação pedagógica.

Na sequência, apresenta-se essa possibilidade: dado um espelho esférico côncavo de centro de curvatura C , foco F , vértice V e raio r . Seja \overline{BD} um objeto posicionado em frente ao espelho, perpendicular ao eixo principal, estando B sobre o eixo principal. Sejam G o ponto sobre a superfície do espelho tal que \overline{DG} seja paralelo ao eixo principal, G' o simétrico de G em relação ao eixo principal e R o ponto médio do segmento $\overline{GG'}$, que se encontra sobre o eixo principal, conforme Figura 7. Assim, $G\hat{C}G' = \theta$ representa o ângulo de abertura do espelho. O segmento \overline{CG} , raio da esfera, é perpendicular a reta u tangente ao

espelho no ponto G . Assim, sendo N um ponto sobre o raio refletido \overline{GN} obtido do raio incidente \overline{DG} , pela propriedade da incidência e reflexão dos raios, temos que $\hat{i} = D\hat{G}C = C\hat{G}N = \hat{r}$.

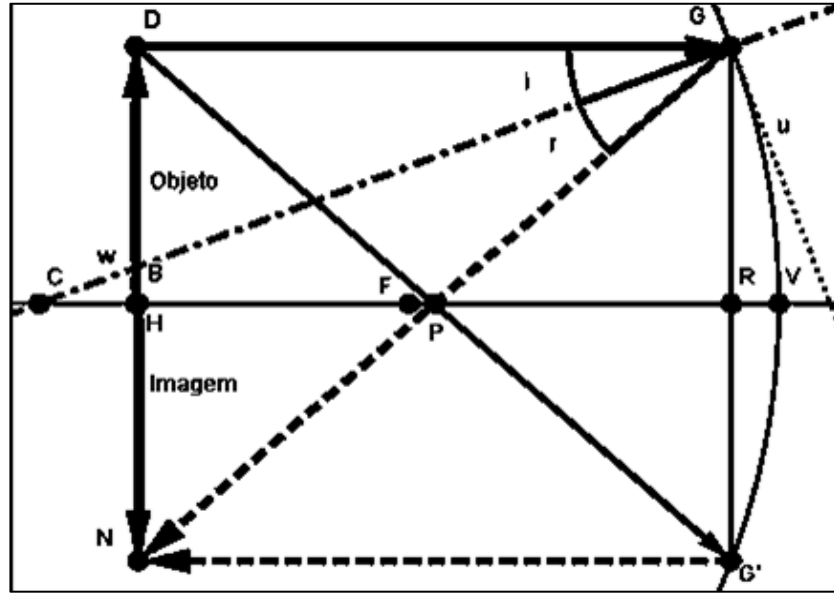


Figura 7 – Verificação geométrica das propriedades P01 e P02. Fonte: Autores.

Ainda na Figura 7, seja P a interseção do raio refletido \overline{GN} com o eixo principal. Note-se que \overline{DG} é paralelo ao eixo principal, então $\hat{i} = D\hat{G}C = \frac{\theta}{2} = C\hat{G}P = \hat{r}$, logo o ΔGCP é isósceles de base $\overline{CG} = r$, o que implica $\overline{GP} = \overline{CP} = \overline{CF} + \overline{FP} = \frac{r}{2} + \overline{FP}$. Assim, aplicando lei dos cossenos no ΔGCP obtém-se que $\overline{FP} = r \left(\frac{1 - \cos(\frac{\theta}{2})}{2 \cos(\frac{\theta}{2})} \right)$.

Seja N um ponto sobre o raio refletido e H o ponto sobre o eixo principal de modo que $\overline{HN} = \overline{BD}$. Pela construção da Figura 7 tem-se que $\overline{BD} = \overline{RG}$ e $\overline{HN} = \overline{RG}$. Como $\overline{HPN} = \overline{RPG}$ e $\overline{NHP} = \overline{GRP} = 90^\circ$ então, por LAA₀ (Lado, Ângulo, Ângulo oposto ao lado), $\Delta NHP \cong \Delta GRP$ o que implica afirmar que P é o ponto médio do segmento \overline{NG} . Ainda, $\overline{PG} = \overline{PG'}$, $\overline{RPG} = \overline{RPG'}$ e \overline{RP} é lado comum, então, por LAL (Lado, Ângulo, Lado) $\Delta GRP \cong \Delta G'RP \Rightarrow \Delta NHP \cong \Delta G'RP$.

Considerando o objeto \overline{BD} de modo que o ponto $P \in \overline{DG'}$, tem-se que $\overline{DPB} = \overline{G'PR}$, $\overline{DBP} = \overline{G'RP} = 90^\circ$ e $\overline{RG'} = \overline{RG} = \overline{BD}$, logo, por LAA₀, $\Delta DBP \cong \Delta G'RP$. Dessa forma, $\Delta GRP \cong \Delta G'RP \cong \Delta DBP \cong \Delta NHP$, o que implica dizer que os pontos H e B coincidem. Assim, pode-se afirmar que $\overline{DGG'N}$ é um retângulo, e, com isso, $\overline{G'N} \parallel \overline{GD}$. Note-se que, o segmento $\overline{VV'}$ da Figura 6 (a) é representado pelo segmento \overline{RV} da Figura 7. Assim, $\overline{RV} = r \left(1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$. Com isso: $\overline{PR} = \overline{FV} - \overline{FP} - \overline{RV} = \frac{r}{2} - r \left(\frac{1 - \cos(\frac{\theta}{2})}{2 \cos(\frac{\theta}{2})} \right) - r \left(1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) = r \left(\frac{2 \cos^2(\frac{\theta}{2}) - 1}{2 \cos(\frac{\theta}{2})} \right)$.

Também, $\overline{HP} = \overline{HF} + \overline{FP} = \overline{HF} + r \left(\frac{1 - \cos(\frac{\theta}{2})}{2 \cos(\frac{\theta}{2})} \right)$ e como $\overline{HP} = \overline{PR}$, segue que $\overline{HF} = r \left(\frac{2 \cos^2(\frac{\theta}{2}) + \cos(\frac{\theta}{2}) - 2}{2 \cos(\frac{\theta}{2})} \right)$ e $\overline{CH} = \overline{CF} - \overline{HF} = r \left(\frac{1 - \cos^2(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})} \right)$, que representa o erro cometido nas aproximações sugeridas. Assim, o erro adicional gerado pelas aproximações nas propriedades P01 e P02 é dado por $\overline{CH} - \overline{RV} = r \left(\frac{1 - \cos(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})} \right)$.

Considerando o limite das condições de nitidez de Gauss, ou seja, $\frac{\theta}{2} = 5^\circ$, tem-se que $\overline{CH} \cong 0,76\%$ do raio de curvatura, com um erro adicional $\overline{CH} - \overline{RV} \cong 0,38\%$ do raio.

Com a manipulação do OVA disponibilizado para este exercício, foi possível visualizar o valor numérico do erro da aproximação em função das características do objeto, do raio e do ângulo de abertura do espelho.

RESULTADOS E ANÁLISE

Nesta seção são apresentados os resultados do exercício de imaginação pedagógica, desenvolvido a partir da elaboração e apresentação da proposta metodológica para um grupo de professores, acompanhados da análise das percepções apresentadas. Inicialmente são abordadas as percepções iniciais (antes do contato com o material) dos sete professores que responderam integralmente ao questionário e que compõem a amostra de pesquisa, sobre as potencialidades do desenvolvimento de ações interdisciplinares em suas atividades docentes e as possibilidades por eles sugeridas, a partir da proposição do tema. Na sequência do processo de imaginação pedagógica, são apresentadas percepções adicionais dos professores, após a interação com o material, analisando as possibilidades e/ou potencialidades de abordagens interdisciplinares, bem como intencionalidades do uso de OVA. Nessa análise expõe-se também a percepção dos autores dessa pesquisa. Por fim, são apresentadas considerações sobre dificuldades e/ou desafios que possam ser enfrentados por professores em uma possível aplicação da proposta com alunos do Ensino Médio.

Em sua abordagem inicial, os professores elencaram algumas experiências de relações interdisciplinares desenvolvidas em suas práticas docentes, onde afirmam que relacionam os conceitos de diferentes disciplinas. Essas situações são expressas em relatos feitos por participantes da pesquisa, conforme seguem: *“trabalho com funções aplicadas na física e em problemas de educação financeira”*. Foi citado também o desenvolvimento de *“projetos por área de conhecimento, em que é realizado um trabalho conjunto entre as disciplinas das áreas consideradas de exatas”*; *“[...] desenvolvimento de projetos com os professores das demais disciplinas envolvendo assuntos/problemas cotidianos e resgatando da situação-problema conceitos da disciplina por mim ministrada, explorando-os a partir da contextualização”*; *“[...] utilização de problemas contextualizados e abordados na Física, e, a partir desses, fazer um resgate de conceitos da Matemática na busca por justificar determinados fenômenos físicos, e vice-versa”*; *“[...] as relações interdisciplinares acontecem no planejamento coletivo, com os demais professores e a equipe pedagógica, das atividades a serem trabalhadas [...], buscando aproximar os conceitos abordados em sala de aula, buscando o enriquecimento da linguagem do aluno acerca de determinado assunto”*; *“relaciono muitas questões do dia a dia do estudante e de outras disciplinas com os conteúdos propostos no ensino de matemática”*; *“Desenvolvemos trabalhos interdisciplinares através de oficinas de integração. Existe um componente curricular onde professores de diferentes componentes curriculares coordenam atividades de pesquisa com os alunos.”* Observou-se que vários dos professores participantes do exercício de imaginação pedagógica apontaram alguma experiência, mesmo que tímida em alguns casos, com trabalhos de conotação interdisciplinar.

Quanto às principais potencialidades que podem ser proporcionadas pelo trabalho interdisciplinar, os professores apontam aspectos como *“uma visão geral do conteúdo, suscitar o interesse dos alunos”*, que permite ao aluno contextualizar e (inter) relacionar os conceitos abordados junto às diversas disciplinas, facilitando a compreensão e assimilação dos conceitos curriculares, visto que *“os professores ‘falam a mesma língua’ e tornam as aulas mais atrativas e dinâmicas”*; *“motiva o aluno à leitura e pesquisa acerca de informações complementares relativas ao assunto abordado”*. Foi destaque também na percepção dos professores, o estímulo e a importância do planejamento coletivo por parte dos profissionais da educação, aproximando as diferentes disciplinas, e que o trabalho interdisciplinar possibilita um ensino *“menos fragmentado”*. De acordo com algumas manifestações, na abordagem interdisciplinar, *“o educando começa a reconhecer que existem ligações com outras áreas do conhecimento”* e o *“professor passa a ser o mediador, proporcionando suporte e estrutura para o aprendizado do educando”*; favorece a *“aprendizagem significativa para o aluno, a socialização dos conhecimentos, linguagens e conceitos”* e *“integração do conhecimento, interação dos alunos, resolução de problemas de interesse do aluno, percepção da aplicação do conhecimento científico em situações reais”*.

Quanto aos conteúdos ou conceitos a serem trabalhados a partir do tema proposto, na abordagem inicial do exercício de imaginação pedagógica, foi apontada a possibilidade de trabalhar com geometria, retas paralelas, retas transversais, conceito de esfera, seções de uma esfera, raio de esfera, foco, vértices, ângulos, paralelismo, vetores, reflexão, projeção, imagens, óptica, explorar conceitos de côncavo e convexo. Observam-se nessa análise algumas respostas com abrangência bastante ampla (os termos usados para mencionar os conteúdos ou conceitos são os que os professores usaram em suas respostas), como por exemplo, quem sugeriu trabalhar geometria, sem especificar quais tópicos da geometria seriam explorados, enquanto algumas respostas são um pouco mais pontuais, mesmo que ainda possam ser

melhor especificadas. A preocupação com a contextualização também esteve presente, como exemplificado na resposta de um dos professores: “[...] discutir com os alunos aspectos relacionados ao funcionamento dos projetores, espelhos bucais utilizados pelos dentistas, retrovisores de carros, espelhos de segurança encontrados em lojas, corredores de supermercados, etc.”

Num segundo momento, após a abordagem inicial, foram disponibilizados aos participantes desta pesquisa quatro OVA elaborados com o GeoGebra, um vídeo de apresentação da proposta e a exposição de algumas das potencialidades apontadas em um exercício prévio de imaginação pedagógica, desenvolvidos pelos autores, cujo teor foi apresentado de forma sucinta na seção anterior deste trabalho. O primeiro OVA teve como principal finalidade a compreensão das propriedades P01, P02, P03 e P04 apresentadas nos materiais didáticos para a disciplina de Física no Ensino Médio, desconsiderando-se, portanto, os erros gerados pelas aproximações mencionadas. Na interação com o objeto virtual, após a escolha da propriedade a ser verificada, pela animação de um controle deslizante, é possível visualizar raios diferentes incidindo de acordo com a propriedade escolhida. Em todos os OVA pode-se acionar uma caixa de diálogo com instruções para facilitar a interação. O segundo OVA permite observar a formação de imagens de acordo com a posição do objeto em frente ao espelho, que pode variar quando é ativada a animação de controles deslizantes. Além da posição, pode-se comparar o tamanho da imagem formada com o tamanho do objeto e os casos em que não ocorre a formação da imagem. Neste OVA, além dos conceitos físicos abordados, ficam evidenciados conceitos usualmente trabalhados na disciplina de Matemática, relacionados às seções planas, paralelismo e perpendicularismo, retas tangentes, propriedades na circunferência, ângulos, propriedades do triângulo isósceles, semelhança de triângulos, entre outros.

Os outros dois OVA foram desenvolvidos com a finalidade de observar os erros gerados pelas simplificações adotadas em todos os materiais didáticos de Física para o Ensino Médio que foram analisados, conforme discutido na seção anterior. Vale ressaltar que, por se tratar de aproximação da realidade, é importante que o professor (e conseqüentemente seus alunos) tenha a percepção e a possibilidade de estimar o erro gerado pelas simplificações. A partir da variação do tamanho e da posição do objeto, da variação do ângulo de abertura e do raio de curvatura do espelho, usando os controles deslizantes, é possível fazer simulações e observar os valores numéricos dos erros gerados em relação ao tamanho e o posicionamento da imagem em cada situação simulada. Desta forma, mesmo que eventualmente o professor opte em não discutir todos os detalhes matemáticos dessa análise, usando os OVA desenvolvidos, este tem condições de comentar com seus alunos questões relacionadas aos erros gerados por simplificações adotadas.

Situações dessa natureza estão presentes em grande parte dos modelos usados para descrever fenômenos reais, especialmente naqueles em que soluções analíticas se tornam complexas e frequentemente inviáveis. Considera-se oportuno que essas discussões sejam feitas na escola, em diferentes abordagens interdisciplinares, constituindo-se uma das potencialidades do trabalho desenvolvido.

Além das possibilidades de abordagem, relativas ao problema proposto, já apontadas no primeiro momento do questionário, após a interação com os materiais disponibilizados, os professores que participaram da pesquisa apontaram mais algumas potencialidades de trabalho, dando-se destaque à seção determinada por um plano em uma esfera, distância entre dois pontos, diagonais, incidência e reflexão de raios, congruências (ângulos, segmentos e triângulos), projeção ortogonal, retas tangentes, propriedade da ortogonalidade entre o raio e a reta tangente a uma circunferência, semelhanças de triângulos, propriedades do triângulo isósceles e do paralelogramo, razões trigonométricas, lei dos cossenos e erros provocados pelas simplificações nos modelos físicos associados à espelhos esféricos, raios e feixes de luz, caracterização e propriedades dos raios de incidência e reflexão e caracterização das imagens de acordo com o posicionamento do objeto em frente ao espelho.

Observa-se que num segundo momento, após a interação com o material, obteve-se respostas com indicativo de conteúdos mais específicos e direcionados, quando comparadas com as percepções prévias. Observa-se também a compreensão dos professores da (inter)relação entre conteúdos propostos para as duas disciplinas, o que favorece à percepção da importância de um trabalho interdisciplinar. Assim como enfatizam Alves, Velho e Berwaldt (2016), acredita-se que os OVA e a apresentação do material através do vídeo, tenham contribuído neste direcionamento, visto que vários dos elementos identificados pelos professores são visualizados nos objetos virtuais. Essa possibilidade de interação e visualização, principalmente na integração entre a representação geométrica, representação algébrica e explicitação do valor numérico de algumas grandezas envolvidas em cada simulação, caracteriza uma das potencialidades e finalidades do uso de OVA, permitindo uma relação interdisciplinar, uma vez que conceitos de diferentes

disciplinas são representados em um mesmo objeto de aprendizagem, desenvolvido para facilitar a compreensão de um problema em sua contextualização.

Ainda no que se refere ao uso dos recursos tecnológicos, e em particular de OVA, em aulas com alunos do Ensino Médio, na percepção de professores, estes contribuem para a *“motivação do processo de ensino-aprendizagem, para estimular o pensamento indutivo, estimular o pensamento dedutivo, estimular a construção de hipóteses, simulações de situações reais”*; *“permite uma visão mais abrangente acerca dos problemas contextualizados”*; *“possibilita melhor interpretação e estudo a partir da análise de gráficos, [...] permite o desenvolvimento de materiais didáticos diversificados e com possibilidade de manipulação”*; *“a possibilidade de explorar muito mais situações e representações geométricas através de recursos tecnológicos a partir de variação de parâmetros, [...] comportamentos gráficos de funções, por exemplo, podem ser amplamente explorados em um curto espaço de tempo, [...] uma forma mais atrativa para o aluno que está acostumado com aulas de quadro branco e slides estáticos”*. Observa-se, portanto, a importância atribuída ao uso dos recursos tecnológicos pelas suas potencialidades em simular situações reais, representações gráficas/geométricas e no estímulo dos alunos para despertar nestes o interesse e a necessária motivação para a aprendizagem, o que corrobora com as discussões propostas por Oliveira, Gonçalves e Marquetti (2015).

A maioria dos professores que participaram da pesquisa indicaram a intenção de utilizar em suas aulas os materiais (ou parte destes) a eles disponibilizados, principalmente pela possibilidade de manipular os OVA, de forma a permitir a visualização de diferentes situações em curtos espaços de tempo, inclusive pela facilidade de obter o valor numérico das grandezas envolvidas em cada umas das diferentes situações simuladas.

Quanto às dificuldades e desafios para um trabalho contínuo com relações interdisciplinares e do uso de recursos tecnológicos, como os OVA, os professores apontaram questões relativas a formação continuada, visando compreender o funcionamento e a utilização de recursos/*softwares* desenvolvidos e pensados para facilitar e explorar conceitos diversos nas diferentes disciplinas. Essa falta de familiaridade com os recursos tecnológicos disponíveis, associada à excessiva carga horária da maioria dos docentes em sala de aula, com pouco tempo para estudos e preparação de materiais diferenciados, são apontados como os principais desafios a serem superados para um melhor aproveitamento dos recursos disponíveis, bem como para o planejamento conjunto de ações interdisciplinares, o que familiariza com as comparações expostas por Gatti (2016) ao destacar oito pontos que interferem na qualidade do trabalho do professor. Isso se reforça em Leite, Dolabella, Silva, Ferreira e Campos (2013) ao destacar a importância da formação de professores, com ênfase à formação do docente interdisciplinar, praticando a interdisciplinaridade tanto na formação inicial (graduação) como na formação continuada.

Problemas relacionados ao sucateamento de equipamentos em escolas e de qualidade das conexões de *internet* também são lembrados por alguns professores. Ainda, na percepção desses, a elaboração e disponibilização de OVA, planejados e desenvolvidos com objetivos bem definidos, acompanhados de indicação de suas potencialidades e possibilidades de utilização, facilita a adesão de mais docentes ao uso desses recursos tecnológicos. Esta percepção certamente justifica o desenvolvimento de tais OVA dos respectivos exercícios de imaginação pedagógica como os propostos nesta pesquisa.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Elaborar propostas metodológicas interdisciplinares e contextualizadas, tendo como ferramenta suporte os recursos digitais, é um desafio aos profissionais da educação, principalmente pelo fato de exigir bastante tempo e dedicação para sua concretização. Isso se caracteriza pela necessidade de dedicação do elaborador, exigindo o conhecimento de alguns conceitos e conteúdos básicos de outras disciplinas e possuir habilidades suficientes à articulação dos recursos tecnológicos, o que para muitos professores ainda é uma grande dificuldade, visto que há pouco investimento em formações continuadas com esse viés. Porém, dada sua relevância, mesmo com algumas dificuldades, é importante que os profissionais se organizem em seus planejamentos, para a estruturação e desenvolvimento de materiais úteis à utilização em sua prática docente.

O exercício de imaginação pedagógica, desenvolvido pelos autores desse trabalho, com as contribuições de professores que atuam no Ensino Médio, permitiu ampliar a visão destes acerca da importância de relacionar os conceitos da Matemática e da Física com problemas de aplicações contextualizados e estabelecendo relações interdisciplinares. Além disso evidenciou-se que em muitas situações é preciso considerar o erro relativo existente, oriundo de aproximações necessárias, e que na maioria das vezes os livros didáticos propostos para o Ensino Médio não apresentam detalhadamente tais

especificações. Esse erro pode, em muitos casos, ser “relativamente pequeno”, mas julga-se interessante uma reflexão acerca dele, evitando possíveis consequências desagradáveis da aplicação na situação-problema. A análise do erro matemático apresentado na proposta metodológica sugestiva permitiu também reforçar a ligação existente entre a Física e a Matemática, destacando a importância de desenvolver atividades interdisciplinares no contexto educacional, de modo que foram utilizadas relações interdisciplinares entre conteúdos da Matemática e da Física para direcionar a investigação do problema abordado.

Outro fator de destaque é a importância atribuída pelos professores à experiência de participarem do exercício de imaginação pedagógica, visto que lhes permitiu uma visão mais ampla e diferenciada acerca de possibilidades de explorar conceitos curriculares a partir de situações-problema, além da necessidade de elaboração e da busca constante por materiais desenvolvidos para as práticas interdisciplinares.

Por fim, destaca-se a necessidade de utilização constante de recursos tecnológicos na prática docente, considerando que uma de suas potencialidades é a manipulação de dados em um espaço de tempo curto, facilitando uma compreensão mais abrangente para determinada situação-problema, justificada por conceitos interdisciplinares. Disponibilizar OVA e promover exercícios de imaginação pedagógica com professores, a fim de explorar junto com estes as potencialidades desses materiais, tende a contribuir na disseminação do uso desses recursos em suas aulas a partir da contextualização e dos direcionamentos apresentados nestes exercícios. Os autores desse trabalho acreditam que OVA constituem-se importantes elementos auxiliares no processo de aprendizagem de conteúdos da Matemática e de disciplinas afins, contribuindo principalmente na motivação e interação dos alunos, especialmente pela possibilidade de visualização gráfica/geométrica dos objetos estudados, necessitando, porém, uma complementação através de sistematizações e da formalização dos conceitos neles abordados.

AGRADECIMENTO

A pesquisa abordada neste trabalho teve apoio financeiro da Capes por meio de pagamento de bolsa de mestrado para um dos autores, código de vinculação 5618414 e da FAPESC por meio do projeto de pesquisa com termo de outorga 2018TR1514.

REFERÊNCIAS

- Alves, I. K., Velho, A. R. T., & Berwaldt, R. (2016). Repensando a forma de ensinar e aprender a divisão por meio das Tecnologias Digitais. *Revista Eletrônica da Matemática*, 2(2), pp. 105-121.
<https://doi.org/10.35819/remat2016v2i2id1552>
- Artuso, A. R., & Wrublewski, M. (2013). *Física*. (v. 02). Curitiba, PR: Positivo.
- Assumpção, I. (2011). Interdisciplinaridade: uma tentativa de compreensão do fenômeno. In I. Fazenda. (Org.). *Práticas Interdisciplinares na Escola*. (pp. 23-25). (12a ed.). São Paulo, SP: Cortez.
- Audino, D. F., & Nascimento, R. S. (2010). Objetos de aprendizagem – diálogos entre conceitos e uma nova proposição aplicada à educação. *Revista Contemporânea de Educação*, 10(5), pp. 128-148.
<https://doi.org/10.20500/rce.v5i10.1620>.
- Bardin, L. (1977). *Análise de Conteúdo*. Lisboa, Portugal: Edições 70.
- Bardin, L. (2011). *Análise de Conteúdo*. São Paulo, SP: Edições 70.
- Biotto Filho, D., Faustino, A. C., & Moura, A. Q. (2017). Cenários para investigação, imaginação e ação. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 12(6), 64-80. Recuperado de <http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/view/1597>
- Borba, M. C., Silva, R. S. R., & Gadanidis, G. (2018). *Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento*. (2a ed.; 2ª reimp.). Belo Horizonte, MG: Autêntica.
- Brasil (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular: educação é a base*. Brasília, DF: MEC/CNE. Recuperado de <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>

- Dantas, S. C., & Matucheski, S. (2019). Resolução de um problema com o uso de diferentes ferramentas do GeoGebra. *Pesquisa e Debate em Educação*, 9(1), 588-605. Recuperado de <http://www.revistappgp.caeduff.net/index.php/revista1/article/view/259>
- Fazenda, I. (1998). *Didática e Interdisciplinaridade*. (16a ed.) Campinas, SP: Papirus.
- Fazenda, I. (2002). *Dicionário em construção: interdisciplinaridade*. (2a ed.) São Paulo, SP: Cortez.
- Fazenda, I. (2008). Interdisciplinaridade-Transdisciplinaridade: visões culturais e epistemológicas. In I. Fazenda. (Org.). *O que é Interdisciplinaridade?* (pp. 17-28). São Paulo, SP: Cortez.
- Fazenda, I. (2011). *Práticas Interdisciplinares na Escola*. I. C. A. Fazenda. (Org.). (12a ed.). São Paulo, SP: Cortez.
- Fazenda, I. (2013). *Práticas interdisciplinares na escola*. Cortez. São Paulo, SP: Brasil.
- Gatti, B. A. (2016). Formação de professores: condições e problemas atuais. *Revista Internacional de Formação de Professores*, 1(2), pp. 161-171. Recuperado de <https://periodicos.itp.ifsp.edu.br/index.php/RIFP/article/view/347/360>
- Gil, A. C. (1999). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. (5a ed.) São Paulo, SP: Atlas.
- Guimarães, O., Piqueira, J. R., & Carron, W. (2014). *Física*. (vol. 02). São Paulo, SP: Ática.
- Hay, R. H., & Knaack, L. (2007). Evaluating the learning in learning objects. *Open Learning: The Journal of Open and Distance Education*, 22(1), 5-28. <https://doi.org/10.1080/02680510601100135>
- Jahn, A. P., Druck, I. de F., Bonomi, M. C., Giampaoli, V., & Dutra, I. M. (2014). *Formação de Professores do Ensino Médio: Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio, etapa II – caderno V: Matemática*. Curitiba, PR: UFPR.
- Kleemann, R., & Petry, V. J. (2020). Propostas metodológicas para o trabalho interdisciplinar entre a Matemática e a Física: potencialidades e contribuições. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 33(1), 729-740. Recuperado de <https://www.clame.org.mx/actas.html>
- Leite, A. C. C., Dolabella, A. R. V., Silva, M. C. F. R., Ferreira, N. R. S., & Campos, S. M. M. (2013). Interdisciplinaridade, práticas curriculares e a formação do docente interdisciplinar. In Fazenda, I. C. A., & N. R. S., Ferreira (Orgs.). *Formação de Docentes Interdisciplinares*. (pp. 35-61). Curitiba: CRV.
- Meirieu, P. (1998). *Aprender... sim, mas como?* (7a ed.) Porto Alegre, RS: Artmed.
- Milani, R. (2017). “Sim, eu ouvi o que eles disseram”: o diálogo como movimento de ir até onde o outro está. *Bolema*, 57(31), 35-52. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a02>
- Moran, J. M., Massetto, M. T., & Behrens, M. A. (2012). *Novas tecnologias e mediações pedagógicas*. Campinas, SP: Papirus.
- Muniz Neto, A. C. (2013). *Geometria*. Rio de Janeiro, RJ: SBM.
- Oliveira, C., & Moura, S. P. (2015). *TIC's na Educação: a utilização das tecnologias da informação e comunicação na aprendizagem do aluno*. Recuperado de <http://periodicos.pucminas.br/index.php/pedagogiacao/article/viewFile/11019/8864>
- Oliveira, G. P., Gonçalves, M. D., & Marquetti, C. (2015). Reflexões acerca da tecnologia e sua inserção na pesquisa em educação matemática. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 17(3), 472-489. Recuperado de <http://revistas.pucsp.br/emp/article/view/25665>
- Paraná (2008). *Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática*. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Recuperado de http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf

- Queiroz, M. R. P. P. P. (2019). Caracterizando e analisando insubordinações criativas e reativas em designs educacionais e ambientes de aprendizagem. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* 3(9), 68-83. Recuperado de <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/ripem/article/view/2182>
- Rolkouski, E. (2011). *Tecnologias no Ensino de Matemática*. Curitiba, PR: Ibpex.
- Skovsmose, O. (2015). Pesquisando o que não é, mas poderia ser. In B. S., D'Ámbrosio, & C. E., Lopes (Orgs.). *Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática*. (pp. 63-90). Campinas, SP: Mercado de Letras.
- Tomaz, V. S., & David, M. M. M. S. (2013). *Interdisciplinaridade e Aprendizagem da Matemática em Sala de Aula*. (3a ed.). Belo Horizonte, MG: Autêntica.

Recebido em: 03.03.2020

Aceito em: 07.12.2020