AS IDEALIZAÇÕE DOS CÁLCUOS DE NEWTON E LEIBNIZ COMO ORGANIZADORES PRÉVIOS COMPARATIVOS PARA A DEFINIÇÃO DE DERIVADA (Calculus idealizations from Newton and Leibniz as advanced organizers for derivable's definition)

José Roberto da Silva [jrobertosilva@bol.com.br]
Natália Dias de Morais [natydia@hotmail.com]
Maria Aparecida da Silva Rufino [aparecidarufino@hotmail.com]
Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Pernambuco – UPE
Campus Mata Norte, Rua Pro. Amaro Maltês, 201, Sítio Novo – PE, CEP 55800-000

Resumo

Este estudo ocupa-se de esclarecer e/ou ampliar a compreensão de um grupo de alunos de licenciatura em matemática sobre a definição de derivada de Cauchy devido sua ocorrência nos livros de cálculo. Tal definição em virtude do conhecimento de limites sobressai-se em relação às idealizações de Newton que apenas faz uso intuitivo desta ideia e a de Leibniz com sua noção de infinitésimos. O propósito de usar textos de apoio considerando aspectos da história da matemática para explorar os conceitos de quantidades variáveis de Newton e Leibniz segundo suas diferenças e semelhanças almeja que isto associado à comparação entre Leibniz e Cauchy qualifique esses textos como organizadores prévios ausubeliano para conceber a definição de derivada.
Palavras-chave: cálculo de Newton; cálculo de Leibniz; organizadores prévios, definição de derivada.

Abstract

This work aims to lead a group of math students to understand Cauchy´s ideas about derivable as it is usually mentioned in the books. His ideas are, due to the use of limits, most important than Newton´s point of view as well as Leibnitz. A bibliography on this issue will help us to compare Newton, Cauchy and Leibnitz´s perspectives. According to Ausubelian theory, these texts might work as advance organizers to understand derivable definition.
Keywords: Newton's calculus; Leibnitz's calculus; advanced organizers; definition of derivable.

Introdução

Na matemática, como em outras áreas do conhecimento humano muitas vezes o surgimento de um conceito tem contribuições de outras idealizações, às vezes ocorridas em períodos bem distantes, isto aconteceu com o cálculo. Sucintamente, como lembra Eves (2011), há registro desde os gregos com os paradoxos de Zenão passando pelos métodos: exaustão de Eudoxo, equilíbrio de Arquimedes seguidos, respectivamente, dos primeiros passos em direção à integração – diferenciação, com o método dos indivisíveis de Cavalieri - Wallis e Barrow.

No Brasil a maioria dos alunos de graduação não consegue compreender de forma adequada boa parte das ideias matemáticas que lhes são apresentadas ao longo de sua formação. Na literatura pode se encontrar uma variedade justificativa, mas aqui a opção foi enfatizar que no ensino de matemática os professores ainda investem muito mais na resolução de questões com foco em manejos procedimentais do que nas conceitualizações e/ou definições.

A intenção de propiciar uma compreensão mais consistente no ensino de matemática, no caso, o de cálculo diferencial, seguramente, passa por um maior equilíbrio em relação às ações que viabilizem tanto o domínio de manejos procedimentais e a aquisição de conceitualizações e/ou definições quanto suas articulações. Portanto, remete a mudança de postura nas práticas educativas, que entre outras formas, ficam bem evidentes com as caracterizações de Ausubel (2002) envolvendo as chamadas aprendizagens *mecânica* e *significativa*.

Os propósitos de mudanças nos procedimentos educativos advêm da seleção e uso de material didático do tipo textos de apoio como material potencialmente significativo para o ensino de derivação, almejando-se que tais textos sirvam de organizadores prévios. A modificação que se almeja nas posturas educativas situa metodologicamente este estudo como investigação-ação que pertence aos estudos de caso no âmbito das investigações qualitativas.

De modo global, este estudo aborda a idealização matemática de derivação, a partir do confronto dos métodos de Newton e Leibniz, visando subsidiar com o cálculo de Leibniz uma boa aquisição da definição de derivação de Cauchy. Tal investida decorre de três aspectos, primeiro pela visão de Leibniz esta mais próxima de Cauchy que a Newton; o segundo por Dall'Anese (2000) pontuar Cauchy como o primeiro a conceitualizar derivada com a ideia de variação infinitesimal; e terceiro pela idealização de Cauchy corresponder basicamente ao que se ensina nos cursos de cálculo atuais.

A investigação concerne uma intervenção pedagógica na disciplina de história da matemática numa turma do 6º período em um curso de licenciatura em matemática, adotando textos de apoios devidamente selecionados e gerenciados com o intuito de apresentar as visões de cálculo como anunciadas no parágrafo anterior. Ao término, os alunos evoluem nos manejos com os cálculos de Newton e Leibniz, na aquisição da definição de derivada de Cauchy e na articulação entre tais manejos e definição, isto corrobora com a associação dos textos de apoio aos organizadores prévios ausubelianos.

Fundamentação teórica

O século XVII foi uma época bastante produtiva no campo da matemática, para Santos (2011) foi neste século que grandes matemáticos continuaram seus estudos na tentativa de resolver os problemas sobre quadraturas e tangentes a curvas, segundo Boyer (1996, p 245): "Do século dezessete em diante, portanto, a matemática desenvolve mais em termos de lógica interna do que sob a ação de forças econômicas, sociais ou tecnológicas [...]".

As ideias envolvendo o estudo do cálculo começam a ganhar forma neste século XVII, conforme Ávila (2006) há obras de vários matemáticos que deram grandes contribuições para a consagração do cálculo estabelecido por Newton e Leibniz. Portanto, Santos (*op. cit.*) lembra que alguns desses matemáticos ilustres merecem destaque, trata-se de Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1665), Torricelli (1608-1647), Gregory (1638-1675) e por fim Wallis (1616-1703) e Barrow (1630-1677).

Seguramente, esses matemáticos ilustres destacados anteriormente contribuíram com o campo de estudo denominado cálculo, basta citar que eles influenciaram de forma indireta ou direta, Newton e Leibniz seus idealizadores. E segundo Santos, Correa & Cyrino (2005), estas figuras ilustres ajudaram Newton e Leibniz a ampliarem seus conhecimentos, propiciando a formulação de suas idealizações com notações especificas a respeito do cálculo diferencial.

O método de Newton.

Isaac Newton foi apresentado a matemática um pouco tarde, aos 18 anos, quando estudava no Trinity College em Cambridge começou a formular sua própria visão matemática, e assim ao terminar seus estudos de graduação na Universidade de Cambridge, resolve então voltar a sua cidade natal e dedicar-se mais a matemática e à filosofia (Ávila, 2006).

A principal contribuição matemática de Newton foi a criação do seu cálculo diferencial que teve uma forma representacional caracterizada por sua notação própria. Eves (2011) pontua que em 1669 Newton criou um método importante para a matemática que aparece num estudo de 1671, intitulado como: "*Methodus fluxionum et serierum infinitarum*",mas que só foi publicado em 1736 após a sua morte.

Com a criação do 'Método das Fluxões' consoante Eves (2011, p. 439) "Para Newton, nesse trabalho, uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto". Para entender como Newton chegou a este pensamento devemos então compreender de forma mais prática seu 'Método das Fluxões'.

Desta maneira, Eves (*op. cit.*) entende que Newton primeiramente definiu que a uma quantidade variável recebe o nome de Fluente e a variação dessa quantidade as definiu como Fluxo, e estabeleceu um novo conceito, em relação aos seus conceitos de Fluentes e Fluxão, descrevendo como *momento*. Corrêa, Santos & Cyrino (2005, p. 49): "- x, y são fluentes: variáveis que aumentam ou diminuem em função do tempo." e "- $\dot{x}, \dot{y}$ são fluxões: velocidades dessas quantidades."

> Os momentos das quantidades fluentes (quer dizer, as suas partes infinitamente pequenas, pela adição das quais elas aumentam durante um período qualquer de tempo infinitamente pequeno) estão relacionados com as velocidades de fluxo. Por essa razão, se o momento de cada uma e em particular se x for expresso pelo produto de sua velocidade $\dot{x}$ por uma quantidade o que é infinitamente pequena (quer dizer, por $\dot{x}o$) então os momentos das outras v, x, y e z,..., serão expressos por $\dot{v}o, \dot{y}o$, $\dot{z}o$,..., o que mostra que $\dot{v}o, \dot{x}o, \dot{y}o$ e $\dot{z}o$ estão relacionados com $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}$ e $\dot{z}$. (Baron & Bos, 1985, p. 28).

Corrêa, Santos & Cyrino (*op. cit.*) informam que nesse método Newton deriva uma função em relação à *x* e a *y*, a qual Baron & Bos (*op. cit.*, p. 30) expressam por:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax} = \frac{dy}{dx}$$

Santos (2011, p. 88) lembra que Baron & Bos (*ibdem*) a representam por:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{f(y)}$$

Nos estudos de Newton sobre cálculo estão presentes dedução de métodos, fórmulas, regras e algoritmos, sendo depois ilustrados, com o propósito de encontrar uma diferenciação direta sem o menor esforço. (Bron & Bos, 1985).

O método de Leibniz

Golfried Wilhelm Leibniz nasceu em 1646 em Leipzig, e apesar de não ter se graduado em matemática realizou importantes contribuições nessa área. Na verdade Leibniz concluiu seus estudos de graduação como bacharel em direito, mas tinha verdadeiro fascínio por outras áreas de estudo como a filosofia, a teologia, em especial, pela matemática.

Segundo Ávila (2006) a dedicação de Leibniz aos estudos matemáticos ocorreu no período entre 1672-1676, pode-se destacar as sequências de diferenças, os triângulos característicos, a transmutação e a série π. Tais estudos têm inicio com a busca da tangente a uma curva dada, o que pode ser aludido na citação seguinte:

> Leibniz contava que fora Pascal que percebera subitamente que a tangente a (ou inclinação de) uma dada curva podia ser encontrada formando-se a razão entre as diferenças das ordenadas e das abscissas de dois pontos

> vizinhos da curva, conforme essas diferenças se tornassem cada vez menores. (Byer, 1992, p. 45)

De acordo com Boyer (1996), após certas tentativas Leibniz associa ao eixo-x e ao eixo-y, respectivamente, diferenças infinitamente pequenas denotadas por dx e dy. Em seguida, obtém a tangente, pois a partir da relação entre x e y, com os menores valores possíveis, calcula a razão entre dx : dy, evidenciado por Baron & Bos (1985):

> Leibniz considerava a sequencia das ordenadas y e a sequência correspondente das abscissas x. As ordenadas estão situadas infinitamente próximas; dy é a diferença infinitamente pequena entre duas ordenadas y e dx é a diferença infinitamente pequena entre duas abscissas x; portanto, dx é a distância entre duas ordenadas y consecutivas. (p. 58).
>
> [..] é suficiente determinar a razão dy : dx. A relação entre y e x usualmente é dada em forma de uma equação (a equação da curva); a fim de calcular a razão entre dy e dx é preciso diferenciar essa equação, ou seja, é preciso formar a equação diferencial da curva. (p. 58-59).

Daí, conclui-se que para Leibniz determinar a tangente a uma curva dada, bastava encontrar a razão de dy e dx, através da equação da curva. Além disso, ele criou regras por entender que as diferenciais podem ser desprezadas, para que se possa chegar à equação diferencial da curva, assim descritas por Baron & Bos (1985, p. 59):

i. $da = a - a = 0$, se a é constante;
ii. $d(u + v) = du + dv$;
iii. $d(uv) = udv + vdu$
iv. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$
v. $d(u^n) = nu^{n-1}du$ (tambem se n for uma fração ou negativo, porém não para n= -1)

Por fim, cabe trazer a ilustração de Boyer (1996) acerca das notações de Leibniz argumentando que estas em conjunto com suas ideias acabaram tornando-o mais feliz que Newton no que diz respeito a seus estudos sobre cálculo.

A conceitualização de Cauchy

Há autores como Boyer (1992) que defendem a ideia do cálculo de Newton possuir uma base teórica mais fundamentada que a de Leibniz, mas se tornou comum aceitar que a invenção do cálculo deve-se a ambos, individualmente, daí quando comparados observa-se diferenças e semelhanças. Tais diferenças estão amplamente associadas à forma adotada por cada um deles para lidarem com suas quantidades variáveis, que para Baron & Bos (1985) seriam:

1. A concepção das quantidades variáveis.
2. Os conceitos fundamentais da fluxão e da diferenciação.
3. Quantidades infinitamente pequenas.
4. Notação.
5. Os papéis das figuras e das fórmulas.

A criação do cálculo diferencial de Newton e de Leibniz foi o marco inicial para que outros matemáticos pudessem entender e criar outras teorias. De acordo com Eves (2011) o cálculo tem destaque novamente no século XVIII ao adquirir bases rigorosas aceitáveis, ampliando sua compreensão. O matemático francês Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) passou a ser o grande nome, Dall'Anese (2000) apresenta-o como primeiro matemático a definir derivada em termos de variação e de limite, mas a precisão do cálculo de Cauchy decorre do fato como ele considerava as quantidades infinitamente pequenas, caracterizada em seguida:

> Ao passo que muitos matemáticos anteriores pensando em infinitésimo como um número fixo muito pequeno, Cauchy definiu-o claramente como uma variável dependente: Diz-se que uma variável se torna infinitamente pequena quando seu valor numérico decresce infinitamente de modo a convergir para o limite zero. (Boyer, 1996, p. 380)

Faz-se necessário definir agora o cálculo como propôs Cauchy, segue que:

> Se uma função y= f (x) for contínua entre dois limites dados da variável x, então, para qualquer valor de x dentro dos limites, um aumento infinitamente pequeno da variável produzirá um aumento infinitamente pequeno da própria função. Portanto, se dissermos que $\Delta x = i$, os dois termos da razão das diferenças $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ serão quantidades infinitamente pequenas. Mas quando esses dois termos se aproximarem indefinidamente de zero, sua razão pode convergir para algum outro limite positivo ou negativo. Este limite, quando existe, tem um valor definido para cada valor específico de x, mas varia com x. (Dall'Anese, 2000, p. 28)

O cálculo de Leibniz usa o conceito de diferencial, porém, há uma diferença crucial em relação à concepção de Cauchy, como salienta Dall'Anese (2000, p. 35):

> A diferença fundamental entre as definições dadas por Cauchy e Leibniz para o diferencial, é que o primeiro faz em termos de razão de diferenças de duas quantidades distintas (derivada) e o segundo, em termos de diferenças infinitamente pequenas entre valores consecutivos de uma mesma quantidade.

E conclui que embora Cauchy tenha dado as bases para o cálculo atualmente, a definição de derivada têm sido apresentadas por autores de livros didáticos como Stewart (2008), priorizando a medida da inclinação da reta tangente. E boa parte destes autores se reporta também a definição de derivada de uma função do modo seguinte:

> Seja I $\subseteq$ R um intervalo, vamos f: R → R e seja c $\in$ I. Se diz que um numero real L é a derivada de f em c, se por qualquer número $\varepsilon > 0$ dado, existe um número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para qualquer x $\in$ I com $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$, então $\left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L\right| < \varepsilon$. Neste caso diz-se que f é derivavel en c, e é escrito f'(c) para denotar L. Em outras palavras, a derivada de f em c está dada pelo limite $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ sempre que o limite existir. (Bartle & Sherbert, 2000).

Organizadores prévios

No que se refere ao estudo do ato da formação de significados ao nível da consciência pode-se entender que o cognitivismo se predispõe a compreender o que se passa na mente durante a ação de conhecer.

Do ponto de vista do cognitivismo em aprendizagem, a teoria de Ausubel (2002) tem uma explicação bastante particular acerca desse fenômeno caracterizado pela interação entre um conhecimento pré-existente na estrutura cognitiva do indivíduo e o novo material, tal interação configura uma aprendizagem significativa.

Como lembram Moreira & Mansini (2010) a aprendizagem significativa ausubeliana processa-se quando o material novo, ideias ou informações, apresentam uma estrutura lógica que interage com conceitos tanto relevantes e inclusivos como claros e disponíveis na estrutura cognitiva. O próprio Ausubel os intitulou de subsunçores e enfocou que ao serem assimilados contribuem para sua diferenciação, elaboração e estabilidade.

Entretanto, quando não existirem subsunçores adequados que permitam tal interação pode-se então, segundo Moreira (2011), lançar mão estratégias e instrumentos facilitadores da Aprendizagem Significativa. Em acréscimo, dentre essas possibilidades estão os organizadores prévios que são recursos instrucionais que trazem as informações em um nível mais alto de abstração, generaliade e inclusividade em relação ao material propriamente de aprendizagem, por exemplo, podem ser um enunciado, uma pergunta, uma situação-problema ou mesmo um texto introdutório, etc.

Aprofundando um pouco mais as informações sobre organizadores prévios Moreira (*op. cit.*) diz existir dois tipos, os organizadores expositivos que deve ser utilizado quando o material de aprendizagem for totalmente não familiar ao aprendiz. O segundo tipo diz respeito aos organizadores prévios comparativos, ao contrário do outro, será recomendado quando o novo material for relativamente familiar, por isso, poderá ajudar na integração de novos conhecimentos ou mesmo mostrar a relacionalidade e a discriminalidade.

Neste contexto, considerando que os alunos envolvidos na investigação por terem cursado as disciplinas de cálculo I e II foram apresentados a conceitualização e/ou definição de derivada enquanto conhecimento matemático. Por acreditar ainda que, de algum modo essas informações já povoavam as concepções desses alunos, levando em conta que os textos utilizados tratam de ideias gerais embasados em conceitos estruturadores acerca desse conhecimento matemático, tem-se a expectativa de que tais textos sirvam de organizadores prévios comparativos.

Metodologia

Inicialmente, aludindo o significado de pesquisa cientifica segundo Reis (2008, p 44): "[...] significa o manejo dos conceitos relacionados, o meio pelo qual se consegue atingir resultados práticos compatíveis com o problema que se pretende solucionar [...]".

Na atualidade os métodos quantitativos, qualitativos e mistos são as estratégias adotadas para realização das pesquisas. Creswell (2010) demarca que o paradigma da pesquisa qualitativa tem suas bases na antropologia cultural e sociologia americana, mas que tem pouco tempo de uso pelos pesquisadores educacionais e aponta como propósito "... entender uma situação social, um evento, um papel de um grupo ou uma interação específica". (op. cit., p. 229). Para Gressler (2004) a abordagem qualitativa deve ser utilizada quando não envolver manipulação de variáveis e estudos experimentais com o objetivo de descrever e compreender o problema.

Os modelos investigativos são estratégias adotadas numa pesquisa, e em se tratando dos qualitativos, *o estudo de caso*, para Stake (*apud* Creswell, 2010, p.38):

> São uma estratégia de investigação em que o pesquisador explora profundamente um programa, um evento, uma atividade, um processo ou um ou mais indivíduos. Os casos são relacionados pelo tempo e pela atividade, e os pesquisadores coletam informações detalhadas usando vários procedimentos de coleta de dados durante um período de tempo prolongado.

E, contemplando esta apresentação cabe trazer a investigação-ação como sendo estratégias no âmbito dos estudos de caso que para Ponte (2006) constituem os trabalhos de intervenção em que as problemáticas têm suas decisões relativas ao desenvolvimento investigativo partilhada pelo investigador e por outros participantes, nesses casos não se verifica descomprometimento em relação ao objeto de estudo.

Procedimentos metodológicos da pesquisa

O estudo foi desenvolvido em seis etapas e, em todas elas, teve a participação da organizadora do estudo, do orientador e da colaboradora. Na 1ª, levantaram-se as concepções prévias que os alunos possuem para o estudo do cálculo e da aprendizagem significativa, com a realização de um questionário diagnóstico.

A 2ª etapa ocupou-se da produção de mapas conceituais a partir de textos bases, ou seja, organizadores prévios, sobre o cálculo diferencial de Newton, depois a explanação da organizadora do estudo e por fim uma atividade sobre as ideias empregadas no cálculo de Newton e sua forma prática. Na 3ª etapa, seu processo, foi da mesma forma que da anterior com a produção de mapas conceituais sobre o cálculo diferencial de Leibniz, depois a explanação da organizadora do estudo e por fim uma atividade sobre as idéias empregadas no cálculo de Leibniz e sua forma prática.

Nessa 5ª etapa, apresentou-se aos alunos um filme sobre o cálculo de Newton e Leibniz com duração de 30 minutos. 5ª houve especulações para vislumbrar o conceito de Derivada dado por Cauchy, através das diferenças entre o cálculo doa teóricos, Newton e Leibniz., com a produção de um mapa conceitual sobre essas diferenças. Por fim na 6ª e ultima etapa a realização do questionário avaliativo, com os mesmos questionamentos, do questionário diagnóstico, para entender se houve ou não algum tipo de evolução na compreensão dos alunos.

Apresentação dos sujeitos

O estudo foi desenvolvido com oito alunos que cursavam a disciplina de História da Matemática em 2013.1 no curso de Licenciatura em Matemática na universidade estadual de Pernambuco, e estes alunos já haviam cursado a disciplina de cálculo I, portanto, tinham conhecimentos da temática de matemática trabalhada neste estudo.

Critérios adotados para análise

O material utilizado para análise forma um total de seis atividades. O primeiro e o ultimo instrumento diz respeito respectivamente, um questionários diagnostico e uma avaliação de aprendizagem que têm as mesmas questões uma vez que se almeja caracterizar se houve ou não algum tipo de evolução na compreensão dos alunos.

A 1ª procura levantar as concepções dos alunos sobre as idealizações de ambos os teóricos Newton e Leibniz, para item (a) o que caracterizava as quantidades variáveis para Newton e Leibniz. E no item (b) que nome representava as quantidades variáveis de Newton e Leibniz. Na 2ª questão o propósito esta voltado para levantar a concepção dos alunos sobre a idealização também por ambos os teóricos.

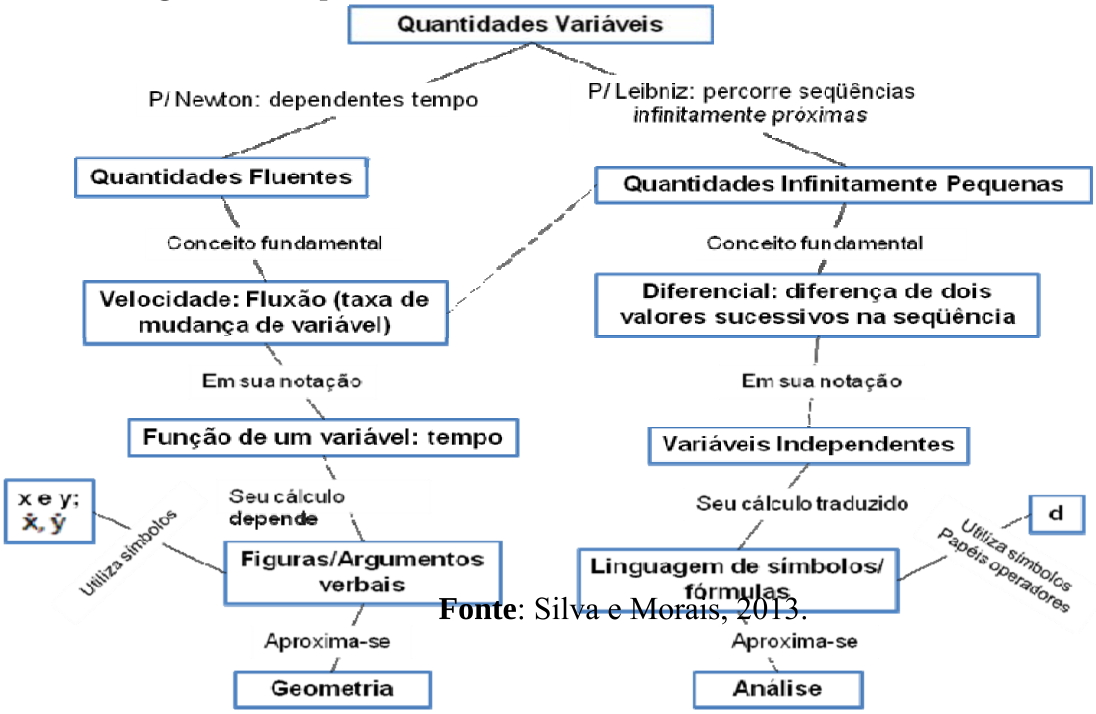
A 3ª questão se os alunos sabem caracterizar alguma priorização por parte do dos dois métodos de Newton ou de Leibniz. Por fim, a 4ª questão, o propósito é a expectativa de que o estudo possa viabilizar com o uso da historia da matemática a partir do confronto dos métodos de Newton e Leibniz condições para que os alunos envolvidos na investigação vislumbrem que tanto Leibniz quanto Cauchy em suas idealizações sobre derivada reportam-se a um mesmo objeto (diferencial), mas o concebem de forma diferente.

Os cinco instrumentos seguintes foram dois conjuntos de atividades um para Newton com duas ações: a 1ª procura levantar as concepções dos alunos sobre as idealizações de Newton envolvendo o cálculo e a 2ª encontrar a derivada de uma função dada usando o seu método. E para Leibniz a 1ª procura levantar as concepções dos alunos sobre as idealizações de Leibniz envolvendo o cálculo e a 2ª encontrar a derivada de uma função dada usando o seu método.

No entanto, antes de cada uma das atividades anteriores solicitou-se que cada um dos alunos elaborasse um mapa conceitual para Newton, outro para Leibniz e um procurando demarcar as diferenças entre os cálculos de Newton e Leibniz. Cabe acrescentar que o instrumento adotado para avaliar estas três atividades com mapas conceituais, diz respeito ao mapa conceitual, elaborado pela autora deste estudo sob a supervisão do orientador.

Na figura da página seguinte as notações ‘**x**’ e ‘**y**’ seriam as fluentes e os ‘$\dot{\mathbf{x}}$ ‘e ‘$\dot{\mathbf{y}}$’ seriam as fluxões dominadas por Newton, já o ‘**d**’ representa a letra que Leibniz utilizou para denotar as diferenciais.

Figura 1 – Mapa conceitual: diferenças entre o cálculo de Newton e Leibniz.



Fonte: Silva e Morais, 2013.

Análise e discussão dos resultados

A análise foi realizada em duas etapas a partir da apreciação dos mapas conceituais e dos questionários diagnostico/avaliativo, diante das informações correspondentes a estes, devidamente coletadas e sistematizadas em seis quadros onde os alunos aparecem rotulados pelos códigos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 e A_8 para proteger suas identidades.

Apreciação dos mapas conceituais

Com os textos bases, a intenção era que com os alunos pudessem criar mapas conceituais sobre o cálculo de Newton, outro para o cálculo de Leibniz e por fim um último mapa sobre as diferenças do cálculo de Newton e de Leibniz. Cada mapa foi construído em momentos específicos do estudo, e como cada mapa foi criado por uma dupla de alunos, sendo assim organizados da seguinte forma.

A dupla de alunos A_1 e A_2 criaram o mapa M_1, da dupla A_3 e A_6, o mapa M_2, para a dupla A_4 e A_7 o mapa M_3 e finalmente a dupla A_5 e A_8 o mapa M_4. Todos os três mapas foram construídos pela mesma dupla e comparados ao mapa conceitual da organizadora deste estudo, de forma a entender sua a seleção conceitual, a inclusividade e as relações significativas foram tratadas em cada mapa, conforme quadro 1.

Na análise identificaram-se nos mapas produzidos pelos alunos os registros de conceitos equivalentes da seleção conceitual do cálculo de Newton, e da diferença entre os cálculos de Newton e Leibniz são mais frequentes que os do cálculo de Leibniz. Na mesma ordem, as relações significativas equivalentes de Newton ocorreu com menos frequência que as entre ambos os cálculos, enquanto as de Leibniz não existiram.

Apreciação das atividades Newton e Leibniz.

Houve dois conjuntos de atividades elaborados, primeiramente para constatar as concepções dos alunos sobre as idealizações do cálculo quanto a esses dois teóricos. E, o no segundo são propostas questões para obter-se a derivada de uma função dada usando os métodos de Newton e Leibniz, os registros estão em anexo no quadro 2.

Na realização das atividades os alunos evoluíram tanto no uso da técnica quanto na compreensão das idealizações do cálculo de Newton e Leibniz. Pois, no universo de 8 alunos, a compreensão da idealização de Newton superou Leibniz, respectivamente, com 3 para 1 nas respostas adequada, enquanto na mesma ordem, 4 contra 5 respostas adequadas corrobora com a superação da técnica de Newton.

Apreciação dos questionários geral inicial e final

Ao questionário diagnóstico usado para levantar a percepção dos alunos quanto seus entendimentos em relação aos propósitos do estudo proposto, este possui quatro questões onde as respostas das três primeiras foram registradas no quadro 3 e as da quarta no quadro 4.

No quadro 3, na primeira questão percebe-se que um aluno consegue caracteriza as quantidades variáveis de Newton e Leibniz, mas só nomina devidamente a de Newton, por sua vez, no quadro 5 fica claro que após a intervenção 5 alunos conseguem caracterizar as referidas quantidades variáveis de Newton e 3 deles também as de Leibniz. Ainda na questão 1, agora sobre saber nominar devidamente essas quantidades variáveis, enquanto no quadro 3 há um aluno que faz isso adequadamente para Newton, no quadro 5 identifica-se que 6 alunos passaram a associar as quantidades variáveis a seus respectivos nomes para Newton e 4 deles para Leibniz.

A segunda questão que aborda o reconhecimento dos alunos a respeito das idealizações do cálculo de Newton e o de Leibniz, o quadro 3 indica que só o aluno A_4 o fez adequadamente para Newton e que depois da intervenção no quadro 5 observar-se que 3 alunos passam a responder adequadamente sobre as idealizações de Newton.

Na terceira questão cujo propósito é observar o desempenho dos alunos em derivar uma dada função fazendo de um dos dois métodos estudados o de Newton ou o de Leibniz, conforme o quadro 3 inicialmente, só o aluno A_4 priorizou Newton e respondeu adequadamente. No entanto, no questionário 5 esse aluno manteve sua opção/êxito e mais dois seguiram esta opção com sucesso, porém, 5 dos demais alunos que optaram por Leibniz tiveram suas respostas do tipo parcialmente inadequadas.

A quarta questão, tem interesse em diante das discussões e tarefas realizadas, viabilizar com sucesso a resolução da derivada de uma função tanto por Leibniz e Cauchy por tais idealizações estarem mais próximas e a definição Cauchy ser mais próxima das que se encontram nos livros de cálculo apresentam. O quadro 3 caracteriza que havia desconhecimento por parte de todos os alunos a este respeito, mas no quadro 6 ocorreu êxito nas opções das respostas de 5 alunos, dos quais, três respondem adequadamente com Cauhy e os outros dois com Leibniz.

Considerações finais

A realização desse estudo compreendeu uma abordagem teórica, a resoluções de problemas de derivações envolvendo as idealizações de Newton, Leibniz e Cauhy, e também a elaboração e discussão de mapas conceituais. Após tal realização, pode-se afirmar que a abordagem histórica envolvendo o uso das técnicas de Newton e Laeibniz em favor da ampliação da visão dos alunos sobre a definição de derivada de Cauhy gerou efeito positivo.

Os textos de apoio empregados no desenvolvimento das atividades auxiliaram ampliação da compreensão conceitual dos alunos, pois como foi comentado na análise e discussão dos resultados houve evolução dos conceitos apresentados em cada mapa conceituais criados para caracterizar as idealizações em separados de Newton e Leibniz. Observou-se que os mapas elaborados ao término de cada atividade evoluíram bastante se comparados com os mapas produzidos do uso dos textos de apoio.

De modo semelhante, boa parte dos alunos no decorrer das atividades passou a identificar as ideias empregadas por Newton em seu, cálculo, enquanto que para Leibniz mesmo não identificando ao certo estas ideias puderam compreender a forma na qual se organiza o seu cálculo. Além disso, os alunos apresentaram uma melhor compreensão do método de derivação de Leibniz que o de Newton, o que corrobora com Boyer (1996) ao destacar que o calculo de Newton, mesmo estando mais fundamentado que o de Leibniz, o método de Leibniz mostrou-se mais eficaz e com maior aceitação.

Os argumentos postulados nos dois paragrafos anteriores permitem presumir que a eficassia apresentada em ambos decorrem em parte dos textos de poio utilizados terem servido como organizadores prévios, em particular, conformen caracterizou-se na fundamentacao teorica deste trabalho a partir de Moreira (2011).

Referências

Ausubel, D. P. (2002). *Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva*. Lisboa: paralelo.

Ávila, G. S. S. (2006). *Análise matemática para licenciatura*. São Paulo: Ed. Edgar Blucher.

Baron, M. E. & Bos, H. J. M. (1985). *Curso de história da matemática: origem e desenvolvimento do cálculo*. Brasília: Ed. Universidade de Brasília.

Bartle, R. G. &; Sherbert, D. R. (2000). *Introducción al Análisis Matemático de una Variable*. México: Ed. Limusa.

Boyer, C. B. (1992). *Tópicos da História da Matemática para uso em sala de aula*. São Paulo: Atual.

Boyer, C. B. (1996). *História da matemática*. São Paulo: Ed. Edgar Blucher.

Corrêa, J. F., Santos, J. R. V. S., & Cyrino, M. C. C. T. *Métodos das Fluxões, Derivadas e Integrais: A Constituição e Difusão de um Conhecimento Matemático na Formação do Professor*. In: Brolezzi, A. C. & Abdounur, O. J. (Org.). I Seminário Paulista de História e Educação Matemática – SP, São Paulo: 2005. Anais... São Paulo: IME – USP, p. 414-424.

Creswell, J. W. (2010). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Porto Alegre: Artmed.

Dall'Anese, C. (2000). *Conceito de Derivada: uma proposta para seu ensino e aprendizagem*. (Dissertação de Mestrado, Universidade Católica de São Paulo). Recuperado de http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/claudio_dall%27anese.pdf.

Eves, H. (2011). *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP: Editora Unicamp.

Fonseca, J. J. S. (2002). *Metodologia da pesquisa científica*. Fortaleza: EduECE.

Gressler, L. A. (2004). *Introdução à pesquisa: projetos e relatórios*. São Paulo: Editora Loyola.

Moreira, M. A. & Masini, E. A. F. S. (2001). *Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel*. São Paulo: Centauro.

Moreira, M. A. (2011). *Aprendizagem significativa: a teoria e textos complementares*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, 3(1), 3-18.

Reis, L. G. (2008). *Produção de Monografia: da Teoria à Prática*. Brasília: Editora Senac – DF.

Santos, J. R. V. S., Corrêa, J. F. & Cyrino, M. C. C. T. (2005). *Análise Histórico - Epistemológica das Ideias de Leibniz sobre Método da Transmutação*. In: Brolezzi, A. C. & Abdounur, O. J. (Org.). I Seminário Paulista de História e Educação Matemática – SP, São Paulo: 2005. Anais... São Paulo: IME – USP, p. 404-413.

Santos, W. C. (2011). *As ideias envolvidas na gênese do Teorema Fundamental do Cálculo, de Arquimedes a Newton e Leibniz*. (Dissertação de Mestrado, Universidade Católica de São Paulo). Recuperado de http://www4.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/walkiria_santos.pdf.

Stewart, J. *Cálculo*. (2008). São Paulo: Cengage Learning.

Recebido em: 29.06.2013
Aceito em: 28.10.2014

ANEXOS

Quadro 1 - Análise dos mapas quando comparados ao mapa da figura 6

Mapas	Seleção Conceitual			Inclusividade						Relações Significativas		
				Intermediária			Horizontalidade					
	Superior	Equivalente	Inferior	Superior	Equivalente	Inferior	Superior	Equivalente	Inferior	Superior	Equivalente	Inferior
Cálculo de Newton	M_3	M_1 M_2 M_3 M_4	M_1 M_2 M_4		M_1 M_3	M_1 M_2 M_3 M_4	M_3	M_2 M_3 M_4	M_1 M_2 M_4		M_2 M_3	M_1 M_3 M_4
Cálculo de Leibniz	M_3	M_3 M_4	M_1 M_2 M_3 M_4		M_3	M_1 M_2 M_4			M_1 M_2 M_3 M_4			M_1 M_2 M_3 M_4
Diferença entre o cálculo de Newton e Leibniz	M_3 M_4	M_1 M_2 M_3 M_4	M_1 M_2		M_1 M_3 M_4	M_1 M_2		M_1 M_2 M_3 M_4	M_2	M_3	M_1 M_3 M_4	M_2

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 2 - Respostas apresentadas para as atividades sobre Newton e Leibniz

Ações		Não sabe responder			Resposta Inadequada		Resposta Adequada
		S/ justificativa	justifica				
			Inadequadamente	Adequadamente	Parcialmente	Completamente	
1ª	Newton		A_3	A_5	A_2	A_1	A_1, A_6, A_6
	Leibniz				A_2, A_5, A_6, A_7	A_1, A_3	A_4
2ª	Newton				A_2, A_3, A_5		A_1, A_4, A_6, A_7
	Leibniz				A3, A5		A_1, A_2, A_4, A_6, A_7

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 3 - Respostas apresentadas para o questionário diagnóstico da 1ª a 3ª questão

Questões		Não há resposta	Não tem conhecimento			Não sabe responder			Resposta Inadequada				Resposta Adequada	
				Justifica			Justifica		Newton		Leibniz			
			S/ justificativa	Inadequadamente	Adequadamente	S/ justificativa	Inadequadamente	Adequadamente	Parcialmente	Completamente	Parcialmente	Completamente	Newton	Leibniz
1ª	a		A_1	A_3 A_5			A_6 A_8		A_7	A_2		A_7 A_2	A_4	A_4
	b	A_1, A_2, A_7		A_3 A_5			A_6 A_8				A_4		A_4	
2ª	a	A_1, A_7		A_3 A_5		A_2	A_8			A6			A_4	
	b	A_1, A_7		A_3 A_5		A_2	A_8					A_4		
3ª				A_3 A_5						A_1 A_2 A_6 A_7 A_8	A_1 A_2 A_6 A_7 A_8		A_4	

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 4 - Respostas dadas para a 4ª questão do questionário diagnóstico

Questão	Não há resposta	Não tem conhecimento			Não sabe responder			Resposta Inadequada				Resposta adequada	
			Justifica			Justifica		Cauchy		Leibniz			
		S/ justificativa	Inadequadamente	Adequadamente	S/ justificativa	Inadequadamente	Adequadamente	Parcialmente	Completamente	Parcialmente	Completamente	Cauchy	Leibniz
4ª	A_8	A_1	A_5		A_2	A_3 A_4 A_6 A_7							

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 5 - Respostas apresentadas para o questionário avaliativo do 1ª a 3ª questão

Questões		Não há resposta	Não tem conhecimento			Não sabe responder			Resposta Inadequada				Resposta Adequada	
			S/ justificativa	Justifica		S/ justificativa	Justifica		Newton		Leibniz			
				Inadequadamente	Adequadamente		Inadequada	Adequada	Parcialmente	Completamente	Parcialmente	Completamente	Newton	Leibniz
1ª	a								A_2	A_5	A_2	A_5	A_1, A_3, A_4, A_6, A_7	A_3, A_6, A_7
	b									A_1	A_3, A_4, A_6		A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7	A_1, A_2, A_5, A_7
2ª	a								A_3, A_5, A_6	A_1			A_2, A_4, A_7	
	b										A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7			
3ª									A_3		A_1, A_3, A_5		A_4	A_2, A_4, A_6, A_7

Fonte: Destaque da Pesquisa

Quadro 6 - Respostas apresentadas no questionário avaliativo para a 4ª questão

Questão	Não há resposta	Não tem conhecimento			Não sabe responder			Resposta Inadequada				Resposta adequada	
		S/ justificativa	C/ justificativa		S/ justificativa	C/ justificativa		Cauchy		Leibniz			
			Inadequada	Adequada		Inadequada	Adequada	Parcialmente	Completamente	Parcialmente	Completamente	Cauchy	Leibniz
4ª						A_3	A_5	A_7	A_2	A_6 A_7	A_2	A_1 A_4 A_6	A_1 A_4

Fonte: Dados da pesquisa