FIS02012 - Cosmologia e Relatividade
Profa. Thaisa Storchi Bergmann

Bibliografia: baseado no capítulo 5 do livro de Barbara Ryden

Universos de uma única componente

Num Universo homogêneo e isotrópico, a relação entre a densidade de energia ε(t), pressão P(t) e fator de escala a(t) é dada pelas equações de Friedmann, de fluido e de estado.

Equação de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0{}^2}\frac{1}{a(t)^2}$$

Equação de Fluido:

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + P) = 0$$

Equação de estado:

$$P = \omega\varepsilon$$

Vimos no capítulo anterior que podemos considerar que o Universo tem 3 componentes:

Matéria => ω = 0
Radiação => ω = 1/3
Constante Cosmológica => ω = -1

Podemos, então, escrever a densidade de energia como uma soma de suas componentes, onde o índice w representa cada componente:

$$\varepsilon = \sum_{\omega} \varepsilon_{\omega}$$

Bem como a pressão:

$$P = \sum_{\omega} P_{\omega} = \sum_{\omega} \omega \varepsilon_{\omega}$$

A equação do fluido então fica, para cada componente:

$$\dot{\varepsilon}_{\omega} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+\omega)\varepsilon_{\omega} = 0$$

Multiplicando por dt e dividindo por e_w:

$$\frac{d\varepsilon_{\omega}}{\varepsilon_{\omega}} + 3(1+\omega)\frac{da}{a} = 0$$

Integrando de um tempo *t* até o tempo atual t_0:

$$\int_{t}^{t_0} \frac{d\varepsilon_{\omega}}{\varepsilon_{\omega}} = -3(1+\omega)\int_{t}^{t_0} \frac{da}{a}$$

$$\ln \varepsilon_{\omega,0} - \ln \varepsilon_{\omega} = -3(1+\omega)\left(\ln a_0 - \ln a\right)$$

$$\varepsilon_{\omega}(a) = \varepsilon_{\omega,0} a^{-3(1+\omega)}$$

A densidade de energia, para ω > -1 decresce com o tempo. Como para a matéria, ω = 0 e para a radiação ω = 1/3, então:

$$\varepsilon_m(a) = \frac{\varepsilon_{m,0}}{a^3}$$

$$\varepsilon_r(a) = \frac{\varepsilon_{r,0}}{a^4}$$

Já para a constante cosmológica, a densidade de energia é constante, não é função do fator de escala ***a*** :

$$\varepsilon_{\Lambda}(a) = \varepsilon_{\Lambda,0}$$

Por que ocorre a diferença acima entre a dependência da densidade de matéria e de radiação com o fator de escala ***a***?

Escrevendo $\varepsilon = nE$, onde n é a densidade de partículas e E a energia média de cada uma: $n \propto a^{-3}$ num Universo em expansão, assumindo que as partículas não são criadas nem destruídas. Assim quando o Universo se expande, por exemplo, de um fator 2 (*a(t) =>a(t')= 2a(t)*), a densidade de partículas cai com 2^{-3}:

$$n(t') = \left(\frac{1}{2}\right)^3 n(t) = \frac{1}{8} n(t)$$

A dependência da densidade de energia da matéria no fator de escala é a mesma da densidade de partículas, já que energia das partículas não-relativísticas se mantém constante com a expansão do Universo:

$$\varepsilon_m(a) = nE = n\left(mc^2\right) \propto a^{-3}$$

Porém a energia dos fótons tem a dependência:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \propto a^{-1}$$

$$\varepsilon_r = nE = n\left(\frac{hc}{\lambda}\right) \propto a^{-3} a^{-1} \propto a^{-4}$$

Então, a densidade de energia dos fótons fica $\varepsilon_r(a) \propto a^{-4}$, na hipótese de que os fótons não sejam criados nem destruídos.

Será isto verdade? A rigor não, pois temos fótons sendo criados dentro das estrelas. Por exemplo, o Sol emite cerca de 10^{45} fótons por segundo. Mas qual será a densidade de energia de todos os fótons produzidos pelas estrelas no Universo?

Usando o resultado de que a densidade de luminosidade das galáxias é: $nL \approx 2\times10^{8} L_{sol} Mpc^{-3} \sim 2{,}6\times10^{-33} Wm^{-3}$, e assumindo que as galáxias tenham tido esta luminosidade por todo o tempo de Hubble (t_0 = 13,7 Giga-anos=4,41´ 10^{17}s), a densidade de energia em radiação emitida pelas estrelas será:

$$\varepsilon_{*,0} \approx nLt_0 = 2{,}6 \times 10^{-33} Wm^{-3} \times 4{,}41 \times 10^{17} s$$

$$\varepsilon_{*,0} = 1{,}14 \times 10^{-15} Jm^{-3} \approx 0{,}007 MeVm^{-3}$$

Mas a densidade de energia da radiação de fundo é:

$$\varepsilon_{CMB,0} = \alpha T_0^{\,4} = 4{,}17 \times 10^{-14} Jm^{-3} = 0{,}260 MeVm^{-3}$$

Então:

$$\frac{\varepsilon_{*,0}}{\varepsilon_{CMB,0}} = 0{,}027 \sim 3\%$$

Uma estimativa mais rigorosa leva a um valor de cerca de 10%. Portanto, é uma aproximação válida considerar que a densidade de energia em radiação é igual à da CMB, desprezando a contribuição da radiação das estrelas.

A radiação cósmica de fundo é proveniente de uma época em que o Universo era quente, denso e opaco aos fótons. Numa época um pouco anterior, o Universo era opaco aos neutrinos. Como conseqüência há um “fundo cósmico de neutrinos”, cuja densidade de energia é comparável à dos fótons.

Densidade de energia de cada tipo de neutrino:

$$\varepsilon = \frac{7}{8}\left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{4}{3}} \varepsilon_{CMB} = 0{,}227 \varepsilon_{CMB}$$

Considerando os 3 tipos de neutrino resulta:

$$\varepsilon_{\nu} = 3 \times 0{,}227 \varepsilon_{CMB} = 0{,}681 \varepsilon_{CMB}$$

A energia média por neutrino é comparável com a energia média dos fótons. Vimos quando discutimos a radiação de fundo que a energia média dos fótons é:

$$\langle E_{\gamma} \rangle = 6{,}34 \times 10^{-4} eV$$

E a energia média por neutrino é:

$$\langle E_\nu \rangle \cong 5 \times 10^{-4} eV$$

Para um tempo qualquer t, a energia média por neutrino é inversamente proporcional ao comprinto de onda equivalente, e portanto a a^{-1}:

$$\langle E_\nu \rangle \approx \frac{5 \times 10^{-4}}{a} eV$$

Isto vale para o caso relativístico, ou seja, no qual a energia do neutrino $E_\nu > m_\nu c^2$. Quando a energia cai para ~ $m_\nu c^2$, o neutrino faz a transição de "radiação" para "matéria".

Estes neutrinos cósmicos de fundo ainda não foram detectados. A tecnologia atual somente permite detectar neutrinos com E > 0,1 MeV, que são muito mais energéticos do que os neutrinos cósmicos de fundo.

Se os neutrinos realmente forem relativísticos, ou com massa muito pequena, da ordem de $m_\nu c^2 << 5 \times 10^{-5}$ eV, então a densidade de energia da radiação será composta pela parte correspondente à radiação e pela que corresponde aos neutrinos:

$$\varepsilon_{r,0} = \varepsilon_{CMB,0} + \varepsilon_{\nu,0} = 0,26 MeV m^{-3} + 0,681 \times 0,26 MeV m^{-3}$$

Em termos do parâmetro de densidade, obtido dividindo a expressão acima pela densidade crítica de energia na época atual $e_{c,0}$=5200 MeV m^{-3}::

$$\Omega_{r,0} = \Omega_{CMB,0} + \Omega_{\nu,0} = 5,0 \times 10^{-5} + 3,4 \times 10^{-5} = 8,4 \times 10^{-5}$$

A densidade de energia do fundo de microondas é bem conhecida e sabemos, também, o valor teórico do fundo de neutrinos. O que ainda não se conhece bem é a densidade de matéria não-relativística, bem como a densidade de energia da constante cosmológica. Evidências (observações) atuais indicam: $\Omega_{m,0} = 0,3$ e $\Omega_{\Lambda,0} = 0,7$. Definine-se o "Modelo Padrão" como sendo aquele em que $\Omega_{m,0} = 0,3$, $\Omega_{\Lambda,0} = 0,7$ e $\Omega_{r,0} = 8,4 \times 10^{-5}$. Como $\Omega = \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{r,0} = 1$ neste modelo, ele corresponde a um modelo plano ($\kappa = 0$).

No "Modelo Padrão" então:

$$\frac{\varepsilon_{\Lambda,0}}{\varepsilon_{m,0}} = \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}} = \frac{0,7}{0,3} \cong 2,3$$

No Universo atual, a constante cosmológica domina sobre a matéria, mas no passado, quando a(t) < 1:

$$\frac{\varepsilon_{\Lambda}(a)}{\varepsilon_{m}(a)} = \frac{\varepsilon_{\Lambda,0}}{\varepsilon_{m,0}/a^3} = \frac{\varepsilon_{\Lambda,0}}{\varepsilon_{m,0}} a^3$$

As duas densidades de energia se igualaram quando:

$$\frac{\varepsilon_{\Lambda}(a)}{\varepsilon_{m}(a)} = \frac{\varepsilon_{\Lambda,0}}{\varepsilon_{m,0}} a^3 = 1 \rightarrow a_{m,\Lambda} = \left(\frac{\varepsilon_{m,0}}{\varepsilon_{\Lambda,0}}\right)^{1/3} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{1/3} = \left(\frac{0,3}{0,7}\right)^{1/3} \approx 0,75$$

Ou seja, quando o Universo tinha 3/4 do tamanho atual.

Comparando agora a densidade de energia em matéria e em radiação na época atual:

$$\frac{\varepsilon_{m,0}}{\varepsilon_{r,0}} = \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{r,0}} = \frac{0,3}{8,4\times10^{-5}} \approx 3600$$

Lembrando que isto vale se os neutrinos cósmicos de fundo são ainda relativísticos hoje. Isto significa que a matéria domina a radiação hoje. Mas no passado:

$$\frac{\varepsilon_{m}(a)}{\varepsilon_{r}(a)} = \frac{\varepsilon_{m,0}/a^3}{\varepsilon_{r,0}/a^4} = \frac{\varepsilon_{m,0}}{\varepsilon_{r,0}} a$$

Qual o valor de a na época que $\varepsilon_m(a) = \varepsilon_r(a)$?

$$\frac{\varepsilon_{m}(a)}{\varepsilon_{r}(a)} = \frac{\varepsilon_{m,0}}{\varepsilon_{r,0}} a = \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{r,0}} a = 1 \rightarrow a_{r,m} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}} = \frac{8,4\times10^{-5}}{0,3} \approx \frac{1}{3600} = 2,8\times10^{-4}$$

Ou seja, quando o Universo tinha 1/3600 de seu tamanho atual. Nesta época, a energia média por neutrino seria $E_\nu \approx (5´10^{-5})/a\ (3600)(5x10^{-4}\ eV) \approx E_\nu = 2eV$ se ele for relativístico. Ou seja: se $m_\nu c^2$

<< 2 eV ele seria relativístico na época em que a = 1/3600. Seria “radiação” naquela época, mesmo se for “matéria” hoje.

Em suma: o Universo contém diferentes componentes com valores diferentes de ω. A equação:

$$\varepsilon_{\omega}(a) = \varepsilon_{\omega,0} a^{-3(1+\omega)}$$

diz que, no limite em que o fator de escala *a* tende à zero, a componente dominante é a que tem maior valor de ω. Das componentes conhecidas, o maior ω = 1/3 (da radiação), intermediário ω = 0 (matéria) e menor ω = -1 (constante cosmológica). O menor ω domina atualmente. Quando *a* tende a infinito, domina a componente com *ω* menor. Entramos, recentemente, numa época dominada por Λ, a constante cosmológica.

Tanto o fator de escala “a” como o redshift são usados como indicadores de tempo cósmico. Por exemplo: a época em que houve a eqüipartição matéria-radiação ocorreu no redshift 1+z = 3600, quando a = 1/3600. Isto também significa que a radiação que foi emitida naquela época é observada atualmente em $\lambda_0 = \lambda_{em}(1 + z)$, ou seja, com um comprimento de onda 3600 vezes maior..

Se quisermos usar diretamente o tempo t ao invés de *a* e *z* temos que resolver a equação de Friedmann:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_{\omega} \varepsilon_{\omega,0} a^{-(1+3\omega)} - \frac{\kappa c^2}{R_0^{\,2}}$$

Para cada componente, o primeiro termo do lado direito da equação acima tem uma dependência diferente no fator de escala “*a*”. Para a radiação o termo fica $\propto a^{-2}$; para a matéria $\propto a^{-1}$; e para a constante cosmológica $\propto a^{2}$, enquanto que o termo de curvatura não depende de a.

A solução da equação acima para um modelo com todas as componentes não fornece uma forma analítica simples para a(t). Por isto é útil resolver a equação separadamente para cada componente.

O caso de Universos planos (κ = 0)

Para um Universo plano, com κ = 0 e uma só componente, a equação de Friedmann fica com uma forma simples:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2} \rightarrow \dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_0 a^{-(1+3\omega)}$$

Se fizermos:

$$a \propto t^q, \text{ então, } t^{(2q-2)} \propto t^{-(1+3\omega)q}, \text{ logo, } q = \frac{2}{3+3\omega}$$

Com solução:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{(3+3\omega)}}$$

A Idade do Universo t_0 e a constante de Hubble H_0 serão:

$$t_0 = \frac{1}{1+\omega}\left(\frac{c^2}{6\pi G\varepsilon_0}\right)^{1/2} \rightarrow H_0 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{t=t_0} = \frac{2}{3(1+\omega)}t_0^{-1} \rightarrow t_0 = \frac{2}{3(1+\omega)}H_0^{-1}$$

Assim, para $\omega > -1/3$, o Universo é mais jovem que o tempo de Hubble.

Exemplo: $\omega = 0$ (matéria), $t_0 = 0{,}66H_0$.

Da mesma forma, para $\omega < -1/3$, o Universo é mais velho que o tempo de Hubble.

A densidade de energia será:

$$\varepsilon(a) = \varepsilon_0 a^{-3(1+\omega)} \rightarrow \varepsilon(t) = \varepsilon_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2}$$

Porém, num Universo plano, a densidade de energia é igual à densidade de energia crítica. Da Equação de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 = \frac{8\pi G\varepsilon_0}{3c^2} \rightarrow \varepsilon_0 = \frac{3c^2}{8\pi G}H_0^2$$

E sendo t_0:

$$t_0 = \frac{2}{3(1+\omega)} H_0^{-1}$$

Escrevemos:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{6\pi(1+\omega)^2} \frac{c^2}{G} t^{-2}$$

Exercício: Utilizando a definição para o tempo de Planck, comprimento de Planck e energia de Planck, mostre que:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{6\pi(1+\omega)^2} \frac{E_p}{l_p^3} \left(\frac{t}{t_p}\right)^{-2}$$

Podemos calcular o tempo de emissão de uma fonte de luz a um redshift 'z' num Universo plano:

$$1+z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \left(\frac{t_0}{t_e}\right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}}$$

Assim,

$$t_e = \frac{t_0}{(1+z)^{3(1+\omega)/2}} = \frac{2}{3(1+\omega)H_0} \frac{1}{(1+z)^{3(1+\omega)/2}}$$

E a distância própria atual será:

$$d_p(t_0) = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/(3+3\omega)}}$$

Fazendo uma mudança de variável:

$$x = \left(\frac{t}{t_0}\right) \rightarrow dx = d\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

$$d_p(t_0) = c\int_{\frac{t_e}{t_0}}^{1} t_0 x^{-2/(3+3\omega)}dx = ct_0\left[\frac{x^{\frac{1+3\omega}{3+3\omega}}}{\frac{1+3\omega}{3+3\omega}}\right]_{\frac{t_e}{t_0}}^{1} = ct_0\frac{3+3\omega}{1+3\omega}\left[1-\left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{\frac{1+3\omega}{3+3\omega}}\right]$$

Assim, para $\omega \neq -1/3$:

$$\frac{t_e}{t_0} = (1+z)^{\frac{-(3-3\omega)}{2}}$$

$$t_0 = \frac{2}{3(1+\omega)}\frac{1}{H_0}$$

Distância do Horizonte: $$d_p(t_0) = \frac{c}{H_0}\frac{2}{1+3\omega}\left[1-(1+z)^{\frac{-(1+3\omega)}{2}}\right]$$

É a maior distância própria que pode ser observada, e corresponde à distância própria de um objeto que emitiu luz em t = 0 e só agora está nos atingindo:

$$\int_0^r dr = d_h = c\int_0^{t_0}\frac{dt}{a(t)}$$

Assim, a Distância do Horizonte em um Universo plano é:

$$d_h(t_0) = \frac{c}{H_0}\frac{2}{1+3\omega}$$

Para um Universo dominado pela matéria, a distância do horizonte é o dobro da distância de Hubble. O horizonte delimita o Universo visível para um observador; o Universo visível é formado por todos os pontos do espaço que tiveram já tempo de enviar informação, ou seja, que estão causalmente conectados. O que acontece além do horizonte não afeta o observador. Para $\omega = -1/3$ a distância do horizonte é infinita, poder-se-ia observar todo o Universo!

Universo plano com matéria somente

Considerando Universo plano e só com matéria não relativística.

· Idade do Universo:

$$t_0 = \frac{2}{3}\frac{1}{H_0}$$

· Distância do Horizonte:

$$d_h = \frac{2c}{H_0}$$

· Fator de escala em função do tempo:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}$$

· Distância própria em t_0:

$$d_p(t_0) = \frac{2c}{H_0}\left[1-(1+z)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

· Distância própria no tempo da emissão:

$$d_p(t_e) = a(t_e)\frac{2c}{H_0}\left[1-(1+z)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{1+z}\frac{2c}{H_0}\left[1-(1+z)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

Universo plano com radiação somente

Vimos que a densidade de energia em matéria era igual à densidade de energia em radiação para (1+z) ≈ 3600. Antes disso, a radiação domina, uma vez que $\varepsilon_r \propto a^{-4}$ e $\varepsilon_m \propto a^{-3}$.
Uma boa aproximação para o nosso Universo na época do domínio da radiação é um Universo plano com somente radiação. Neste caso, $\omega = 1/3$:

· Idade do Universo:

$$t_0 = \frac{1}{2H_0}$$

· Distância do Horizonte:

$$d_h = \frac{c}{H_0}$$

· Fator de escala em função do tempo:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

· Distância própria em t_0:

$$d_p(t_0) = \frac{c}{H_0}\frac{z}{1+z}$$

· Distância própria no tempo da emissão:

$$d_p(t_e) = \frac{c}{H_0}\frac{z}{(1+z)^2}$$

· Densidade de energia:

$$\varepsilon_r(a) = \varepsilon_0 a^{-4} = \varepsilon_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2}$$

Onde, para a densidade de energia, já tínhamos observado que o resultado é o mesmo independente de ω.

Podemos obter uma expressão para a evolução da temperatura no início do Universo em função do tempo usando a relação de corpo negro entre a densidade de energia e a temperatura dada

por $\varepsilon_r = \alpha T^4$. A densidade de energia inicial era 3/32 a densidade de energia de Planck

$$\varepsilon_r(t) = \alpha T^4 = \varepsilon_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2}$$

$$\alpha T^4 = \frac{3}{32}\frac{E_p}{l_p^3}\left(\frac{t}{t_p}\right)^{-2} = \frac{\pi^2}{15}\frac{k^2}{\hbar^3 c^3}T^4$$

$$\frac{3}{32}T_p^4\left(\frac{t}{t_p}\right)^{-2} = T^4 \rightarrow T = \left(\frac{3}{32}\right)^{1/4} T_p\left(\frac{t}{t_p}\right)^{-1/2}$$

$$T(t) \approx 0,61 T_p\left(\frac{t}{t_p}\right)^{-1/2}$$

Onde:

Temperatura de Planck: $T_p = 1,4 \times 10^{32}$ K

Energia média por fóton: $E_{med}(t) = 2,70$ kT

Substituindo o valor de T obtido:

$$E_{med}(t) \approx 2,70kT(t) = 2,70 \times 0,61kT_p\left(\frac{t}{t_p}\right)^{-1/2} = 1,66E_p\left(\frac{t}{t_p}\right)^{-1/2}$$

A densidade de fótons pode ser obtida dividindo a densidade de energia pela energia média dos fótons:

$$n(t) = \frac{\varepsilon_r(t)}{E_{med}(t)}$$

$$n(t) = \frac{0,094\frac{E_p}{l_p^3}\left(\frac{t}{t_p}\right)^{-2}}{1,66E_p\left(\frac{t}{t_p}\right)^{-1/2}} \approx \frac{0,057}{l_p^3}\left(\frac{t}{t_p}\right)^{-3/2}$$

Conclui-se que a densidade de energia, energia média por fóton e a densidade de fótons tende ao infinito quando t tende a zero, mas a teoria só vale para tempos maiores do que o tempo de Planck; este é o menor tempo que tem sentido na relatividade geral.

Universo plano com constante cosmológica somente:

Seja, na equação de Friedmann, ω = -1:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\varepsilon_\Lambda}{3c^2} a^2$$

Sabendo que ε_Λ é constante com o tempo, e usando $\frac{\dot{a}}{a} = H_0$, poderemos escrever:

$$H_0 = \left(\frac{8\pi G\varepsilon_\Lambda}{3c^2}\right)^{1/2}$$

Ou seja,

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = H_0^2 a^2$$

Portanto,

$$\int \frac{da}{a} = \int H_0 dt \rightarrow \ln a = H_0 t + cte$$

$$a = e^{H_0(t-t_0)}$$

a(t) cresce exponencialmente com t!

Idade:

$$t_0 = \frac{2}{3(1-1)} H_0^{-1} \rightarrow \infty$$

Distância do Horizonte**:**

$$d_h \propto ct_0 \rightarrow \infty$$

Distância própria:

$$d_p(t_0) = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{e^{H_0(t-t_0)}} = \frac{c}{H_0}[e^{H_0(t_0-t_e)} - 1] = \frac{c}{H_0}\left[\frac{1}{a(t)} - 1\right] = \frac{c}{H_0}z$$

Distância própria no tempo da emissão:

$$d_p(t_e) = d_p(t_0)\frac{1}{1+z} = \frac{c}{H_0}\frac{z}{1+z}$$