FIS02012 - Cosmologia e Relatividade

Profa. Thaisa Storchi Bergmann

Bibliografia: baseado no capítulo 6 do livro de Barbara Ryden

Universos com mais de uma componente

A Equação de Friedmann pode ser escrita como:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0{}^2 a(t)^2}$$

No capítulo 4 vimos que:

$$\frac{\kappa}{R_0{}^2} = \frac{H_0{}^2}{c^2}(\Omega_0 - 1)$$

Substituindo acima e dividindo por H_0^2:

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{H_0^2 3c^2}\varepsilon(t) - \frac{(\Omega_0 - 1)}{a(t)^2} = \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_{c,0}} + \frac{1-\Omega_0}{a(t)^2}$$

Considerando que a densidade de energia total é a soma das densidades de energia nas componentes radiação, matéria e energia escura, expressando estas densidades de energia em termos da densidade atual e introduzindo os parâmetros de densidade, resulta:

$$\frac{H(t)^2}{H_0{}^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1-\Omega_0}{a^2}$$

Sabemos que $H(t) = \dot{a}/a$. Substituindo, multiplicando por a^2 e tirando a raiz quadrada podemos escrever:

$$H_0^{-1}\dot{a} = \left[\frac{\Omega_{r,0}}{a^2} + \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{\Lambda,0}a^2 + (1-\Omega_0)\right]^{1/2}$$

Separando os termos em *da* e em *dt* e integrando, poderemos calcular a idade do Universo:

$$t = \frac{1}{H_0}\int_0^a \frac{da}{[\Omega_{r,0}/a^2 + \Omega_{m,0}/a + \Omega_{\Lambda,0}a^2 + (1-\Omega_0)]^{1/2}}$$

Esta integral não tem solução analítica simples; integra-se numericamente para valores específicos dos parâmetros de densidade de energia. Por exemplo, na época dominada pela radiação:

$$H_0 t \approx \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_{r,0}/a^2}} = \int_0^a \frac{a\,da}{\sqrt{\Omega_{r,0}}} \approx \frac{1}{2\sqrt{\Omega_{r,0}}}a^2$$

$$a(t) \approx \left[2(\Omega_{r,0})^{1/2} H_0 t\right]^{1/2}$$

No limite em que $\Omega_{r,0} = 1$, esta solução se iguala à encontrada para um Universo plano dominado pela radiação.

Se o Universo continuar a se expandir para sempre, no limite em que o fator de escala a convergir para o infinito, a constante cosmológica dominará a expansão. Dependendo da idade do Universo, poderemos utilizar somente uma componente. Por exemplo, o domínio da radiação ocorre para $a < a_{rm}$, onde $a_{rm} \sim 2{,}8 \times 10^{-4}$ (matéria e radiação têm iguais densidades de energia). No intervalo $a_{rm} << a << a_{m\Lambda}$ (onde $a_{m\Lambda}$ corresponde à época em que a densidade de energia na matéria é igual à na constante cosmológica), domina a matéria. Mas para valores próximos a $a_{m\Lambda}$ temos que considerar duas componentes, matéria e constante cosmológica.

1) Universo dominado pela matéria mais curvatura:

Este foi o modelo mais explorado historicamente, dominado pela matéria e com possível curvatura $\kappa \neq 0$. Sabemos que a solução para este Universo, com curvatura $\kappa = 0$ é:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$$

O Universo expande para sempre (Big Chill).

Se houver curvatura, o destino do Universo dependerá do parâmetro de densidade atual. Retornando à equação de Friedmann para um Universo dominado pela matéria:

$$\frac{H(t)^2}{H_0^{\,2}} = \frac{\Omega_0}{a^3} + \frac{1-\Omega_0}{a^2}$$

Neste caso, para que o Universo pare de se expandir em um certo tempo t, obtemos o valor para o fator de escala máximo:

$$H(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = 0 \rightarrow 0 = \frac{\Omega_0}{a_{máx}^3} + \frac{1-\Omega_0}{a_{máx}^2} \rightarrow a_{máx} = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1}$$

Como $\Omega_0 > 0$ e *a* só pode ser positivo, $\Omega_0 - 1 > 0$ então $\Omega_0 > 1$ e portanto, $\kappa = +1$. E o fator de escala na época da máxima expansão terá o valor acima. Depois disto, o Universo irá colapsar até o “Big Crunch”.

E agora, o que acontecerá num Universo dominado pela matéria com $\Omega_0 < 1$ e $\kappa = -1$? Neste caso, os dois termos do lado direito da equação de Friedmann acima serão maior que zero e, se o Universo estiver expandindo em t_0, nunca vai parar de expandir.

Voltando à equação de Friedmann para este caso:

$$\frac{H(t)^2}{H_0^{\,2}} = \frac{\Omega_0}{a^3} + \frac{1-\Omega_0}{a^2} \rightarrow \frac{\dot{a}^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{a} + (1-\Omega_0)$$

$$H_0 t = \int_0^a \frac{da}{\left[\Omega_0 / a + (1-\Omega_0)\right]^{1/2}}$$

Para $\Omega_0 = 1$:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$$

Para $\Omega_0 > 1$ deve-se resolver a integral de forma paramétrica para obter:

$$a(\theta) = \frac{1}{2}\frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)}(1 - \cos\theta)$$

$$t(\theta) = \frac{1}{2H_0}\frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}}(\theta - \operatorname{sen}\theta)$$

Onde $0 < \theta < 2\pi$. Para resolver esta integral a sugestão é fazer:

$$\beta = \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0}$$

$$\beta a = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\theta)}{2}$$

Para $\theta = 2\pi$, os resultados correspondem ao Big Crunch.

Para $\Omega_0 < 1$ resulta:

$$a(\eta) = \frac{1}{2}\frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)}(\cosh\eta - 1)$$

$$t(\eta) = \frac{1}{2}\frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)^{3/2}}(\operatorname{senh}\eta - \eta)$$

Onde $0 < \eta < \infty$.

2) Matéria mais constante cosmológica

O Universo atual parece ser plano e dominado pela matéria e constante cosmológica com densidade de energia comparáveis. A equação de Friedmann neste caso, fica:

$$\frac{H^2}{H_0^{\,2}} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + (1 - \Omega_{m0})$$

O Universo vai expandir para sempre se os dois termos da direita forem maiores que zero. A condição para que isto aconteça é que $1 - \Omega_{m,0} = \Omega_{\Lambda,0} > 0$, ou seja, que $\Omega_{m,0} < 1$, o que parece ser o caso. Se $\Omega_{m,0} > 1$, a constante cosmológica negativa produziria uma força atrativa. Um Universo plano neste caso expandiria até um $a_{máx}$, correspondente a:

$$\frac{\Omega_{m,0}}{a_{máx}^3} = \Omega_{m,0} - 1 \rightarrow a_{máx} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1}\right)^{1/3}$$

Este Universo vai colapsar de volta a $a = 0$ num tempo cósmico:

$$t_{colapso} = \frac{2\pi}{3H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m,0} - 1}}$$

A equação de Friedmann, neste caso, tem como solução:

$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{m,0} - 1}} \operatorname{sen}^{-1}\left[\left(\frac{a}{a_{máx}}\right)^{3/2}\right]$$

Um Universo plano com $\Omega_{\Lambda,0} < 0$ resulta num "Big Crunch" muito mais rápido do que no caso dominado pela matéria, pois a constante cosmológica menor que zero produz uma força atrativa que se soma à gravitacional. Por exemplo: Universo plano com curvatura positiva e só matéria com $\Omega_{m,0} = 1{,}1$, $t_{colapso} \approx 110\ H_0^{-1}$, enquanto que um Universo plano com $\Omega_{m,0} = 1.1$ e $\Omega_{\Lambda,0} = -0{,}1$, $t_{colapso} \approx 7H_0^{-1}$.

Mas as observações sugerem que $\Omega_{\Lambda,0}$ seja maior que zero, e sabemos que a transição entre o domínio da matéria e o da constante cosmológica se verifica para:

$$a = a_{m,\Lambda} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{1/3} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{1 - \Omega_{m,0}}\right)^{1/3}$$

Exercícios:

1) Mostre que, para um Universo plano com parâmetro de densidade da constante cosmológica atual maior que zero, a solução da equação de Friedmann é:

$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{1 - \Omega_{m,0}}} \ln\left[\left(\frac{a}{a_{m\Lambda}}\right)^{3/2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{a_{m\Lambda}}\right)^3}\right]$$

2) A partir da expressão acima mostrar que para um Universo plano dominado pela matéria:

$$a(t) \approx \left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{m,0}}H_0 t\right)^{2/3}$$

3) E que para um Universo plano dominado pela constante cosmológica:

$$a(t) \approx a_{m\Lambda} \exp\left(\sqrt{1-\Omega_{m,0}}H_0 t\right)$$

4) Utilize a expressão acima para a idade do Universo para calcular a sua idade atual (se ele for plano e conter somente matéria e Λ, como parece ser o caso).

5) Calcule a idade do Universo quando a densidade de matéria era igual à da constante cosmológica.

3) Matéria mais curvatura mais constante cosmológica

Se um Universo contém matéria, constante cosmológica e curvatura:

$$\frac{H^2}{H_0{}^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{1-\Omega_{m,0}-\Omega_{\Lambda,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0}$$

Se $\Omega_{m,0} > 0$ e $\Omega_{\Lambda,0} > 0$, primeiro e último termos da equação são positivos. Porém, se $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} > 1$, o termo do meio será negativo. Então para alguns valores de a, H^2 será negativo, isto é, não físico. Isto implica na existência de valores "proibidos" de a.

4) Radiação mais matéria

O equilíbrio entre matéria e radiação ocorreu para: $a_{rm} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}} = 2{,}8\times10^{-4}$. A equação de Friedmann correspondente é:

$$\frac{H^2}{H_0{}^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} = \left(\frac{da}{aH_0 dt}\right)^2$$

$$H_0 dt = \frac{a da}{\Omega_{r,0}^{1/2}} \left[1 + \frac{a}{a_{rm}} \right]^{-1/2}$$

Integrando resulta:

$$H_0 t = \frac{4 a_{rm}^{\ 2}}{3\sqrt{\Omega_{r,0}}} \left[1 - \left(1 - \frac{a}{2a_{rm}} \right) \left(1 + \frac{a}{a_{rm}} \right)^{1/2} \right]$$

Quando a << a_{rm} obtemos o limite que corresponde ao domínio da radiação:

$$\left(1 + \frac{a}{a_{rm}} \right)^{1/2} \approx \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{a_{rm}} \right)$$

$$\left(1 - \frac{a}{2a_{rm}} \right) \left(1 + \frac{a}{2a_{rm}} \right) = 1^2 - \left(\frac{a}{a_{rm}} \right)^2$$

Logo,

$$H_0 t = \frac{4}{3} \frac{a_{rm}^2}{\Omega_{r,0}^{1/2}} \frac{a^2}{a_{rm}^2} \rightarrow a \propto t^{1/2}$$

Quando a >> a_{rm}:

$$\left[1 - \left(1 - \frac{a}{2a_{rm}} \right) \left(1 + \frac{a}{a_{rm}} \right)^{1/2} \right] \cong 1 + \frac{a^{3/2}}{2a_{rm}^{3/2}} \approx \frac{a^{3/2}}{2a_{rm}^{3/2}}$$

Assim,

$$H_0 t = \frac{2}{3} \frac{a^{3/2} a_{rm}^{1/2}}{\Omega_{r,0}^{1/2}} \rightarrow a \approx \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{m,0}} H_0 t \right)^{2/3}$$

Tempo de eqüipartição matéria-radiação corresponde a fazer a=a_{rm}:

$$t_{rm} = \frac{1}{H_0}\frac{4a_{rm}^2}{3\sqrt{\Omega_{r,0}}}\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\right)(1+1)^{1/2}\right] \approx 0,391\frac{a_{rm}^2}{\sqrt{\Omega_{r,0}^{1/2}}}H_0^{-1}$$

$$a_{rm} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}}$$

$$t_{rm} = 0,391\left(\frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}}\right)^2\frac{H_0^{-1}}{\sqrt{\Omega_{r,0}}} = 0,391\frac{\Omega_{r,0}^{3/2}}{\Omega_{m,0}^2}H_0^{-1}$$

Para o Modelo Padrão, onde $\Omega_{r,0} = 8,4 \times 10^{-5}$, $\Omega_{m,0} = 0,3$ e $1/H_0 = 14 \times 10^9$ anos:

$t_{rm} = 3,32 \times 10^{-6} \times 14 \times 10^9$ anos $= 47 \times 10^3$ anos

5) O Modelo Padrão:

É o que melhor se ajusta às observações atuais: é plano ($\kappa = 0$, $\Omega_0 = 1$), contém radiação, matéria e a constante cosmológica.

Tabela 1: Componentes e seus respectivos parâmetros de densidade de energia

Componente	**Parâmetro de densidade atual Ω**
Fótons	5×10^{-5}
Neutrinos	$3,4 \times 10^{-5}$
Total (radiação)	**$8,4 \times 10^{-5}$**
Matéria bariônica	0,04
Matéria não-bariônica	0,26
Total (matéria)	**0,30**
Constante cosmológica	0,70

Tabela 2: Épocas importantes e seus fatores de escala:

Época	a(t)	t
Igualdade radiação-matéria	$2,8 \times 10^{-4}$	$4,7 \times 10^4$ anos
Igualdade matéria-lambda	0,75	$9,8 \times 10^9$ anos
Época atual	1	$13,5 \times 10^9$ anos