FIS02012 - Cosmologia e Relatividade

Thaisa Storchi Bergmann

Relatividade Restrita:

Postulados:

1) Princípio da relatividade: As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais. Nenhum experimento pode medir a velocidade absoluta de nenhum referencial inercial (o éter não existe!). Referencial inercial significa não acelerado.
2) Lei da propagação da luz: a luz se propaga no vácuo com velocidade *c* em todos os referenciais inerciais. Dois observadores em movimento relativo medirão a mesma velocidade para luz = c.

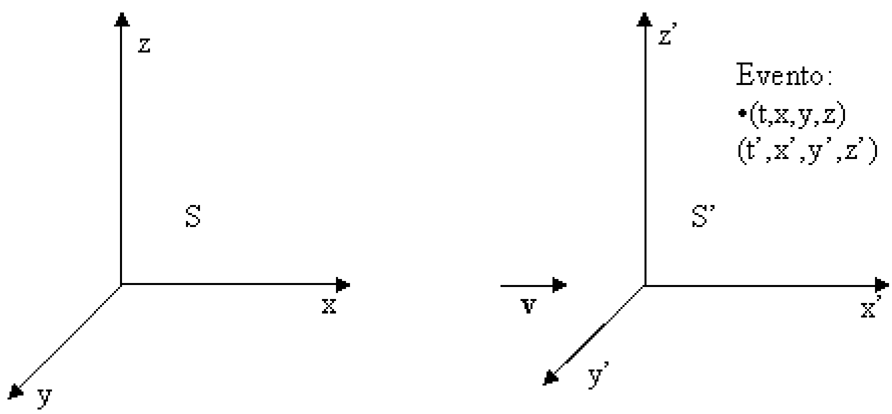
Estes dois postulados têm consequências como a contração do comprimento observado de um objeto em movimento e a dilatação do tempo (paradoxo dos gêmeos: tempo passa lento para observador do que para objeto em movimento). Ou seja, não existe espaço nem tempo absoluto.

Coordenadas: t, x, y, z; o tempo é colocado em pé de igualdade com as outras coordenadas→espaço-tempo.

Define-se: evento como sendo qualquer acontecimento cujas coordenadas são medidas (t, x, y, z).

Transformação de coordenadas:

Sejam dois referenciais inerciais: S (t,x,y,z) e S'(t',x',y',z'), S' se movendo com velocidade ***v*** em relação a S:



Transformações de Galileu:

$$t' = t$$
$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Simultaneidade Newtoniana: se dois eventos são simultâneos num certo referencial inercial (RI), eles são simultâneos em todos os RIs.

Por volta de 1860, Maxwell formula sua teoria sobre a luz, contendo uma hipótese implícita: a luz, como todas as ondas mecânicas, necessita de um meio material para se propagar – o "éter". A velocidade da luz medida como sendo ***c*** é em relação ao éter. O referencial do éter seria um referencial "absoluto".

Grande desafio do fim do século XIX e início do século XX: detectar o éter e medir suas propriedades. Em 1887 foi realizado o principal experimento, por Michelson e Morley, que não conseguiu detectar a presença do éter. O físico alemão Hendrick Lorentz, acreditando no éter, elaborou uma teoria em que efeitos de contração dos comprimentos e de dilatação do tempo conspiravam para que não consigamos detectar o éter, as famosas "trasnformações de Lorentz". Einstein, em 1905, concluiu que o éter não existia e que as transformações de coordenadas entre dois referenciais inerciais são dadaas pelas transformações de Lorentz.

Transformações de Lorentz:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$
$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$\gamma = \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1/2}$$

onde γ é o "fator de Lorentz".

As transformações de Lorentz são necessárias para manter a forma da equação da onda de Maxwell.
Exercício: Mostre que a equação da onda abaixo não mantém a sua forma no referencial S' com uma transformação de Galileu ($t'=t$ e $x'=x-vt$), mas mantém a sua forma com uma transformação de Lorentz.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Foi justamente o problema de manter as equações de Maxwell invariantes que levou Lorentz a propor as suas transformações.

Propriedades das transformações de Lorentz

1) Relatividade da simultaneidade: 2 eventos que acontecem num mesmo instante num dado referencial, não correspondem necessariamente a eventos simultâneos em outro referencial.
2) Limite Newtoniano: fazendo $c \rightarrow \infty$, as transformações concordam com as de Galileu.
3) Transformações das diferenças: como as transformações de Lorentz são lineares e homogêneas, tem-se que:

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)$$
$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$
$$\Delta y' = \Delta y$$
$$\Delta z' = \Delta z$$

Ou

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)$$
$$dx' = \gamma(dx - vdt)$$
$$dy' = dy$$
$$dz' = dz$$

4) Invariância do intervalo: pode-se demonstrar que:

$$-c^2\Delta t'^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$
$$-c^2 dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

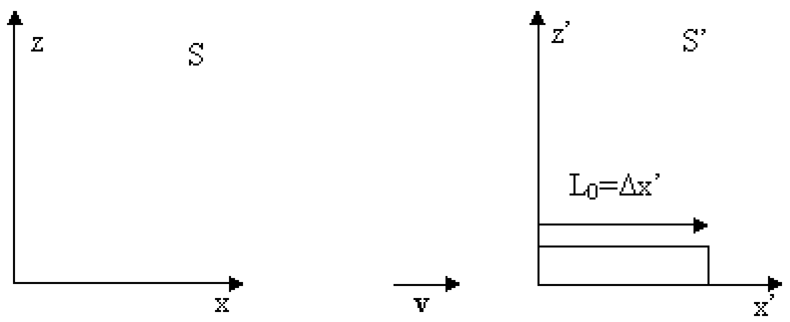
Definido:

$$\Delta s^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

como a distância entre dois eventos no espaço-tempo, verifica-se que as transformações de Lorentz deixam esta distância Δs^2 invariante.

Consequências da Relatividade Restrita: cinemática relativística:

1) *Contração dos comprimentos:* seja um bastão de comprimento L_0 no referencial S':



Queremos medir seu comprimento no referencial S, então, as suas extremidades devem ser observadas simultaneamente em S. Para dois eventos simultâneos em S devemos ter:

$$\Delta t = 0$$
$$\Delta x = L = ?$$
$$\Delta x' = L_0 = \gamma(\Delta x + v\Delta t) = \gamma(\Delta x) = \gamma L$$
$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

Ou seja, como $\gamma > 1$, o comprimento medido L é *menor* do que o "comprimento próprio" L_0. Comprimento próprio é aquele medido no referencial em que o objeto está em repouso.

2) *Dilatação do tempo:*

Na mesma situação acima de um referencial S' se movendo com velocidade v em relação a um referencial S, um intervalo de tempo $\Delta t' = T_0$ (tempo próprio: tempo no referencial em que o relógio está em repouso) em S', é medido em S de acordo com as transformações inversas de Lorentz:

$$\Delta z = \Delta z'$$

$$\Delta y = \Delta y'$$

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$$

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)$$

$$\Delta x' = 0$$

$$\Delta t' = T$$

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right) = \gamma\Delta t' = \gamma T_0$$

$$\Delta t = T = \gamma T_0$$

Ou seja, o intervalo de tempo medido em S é maior do que o medido em S': o tempo se dilatou: um relógio em movimento em relação a um referencial S parece se atrasar em relação aos relógios fixos.

Espaço-tempo (ET) de Minkowski

O matemático Herman Minkowski desenvolveu o arcabouço matemático mais utilizado na teoria da Relatividade Especial (RE) de Einstein, por volta de 1908.

O ET de Minkowski é plano (como requer a RE) e o tempo é tratado como uma coordenada adicional. As coordenadas então são:

$$x^0 = -ct$$

$$x^1 = x$$

$$x^2 = y$$

$$x^3 = z$$

Grandezas vetoriais no ET de Minkowski são os "tetravetores"ou 4-vetores, descritos por 4 componentes num certo RI. Os 4-vetores são representados por letras maiúsculas: $\vec{X}, \vec{P}, \vec{U}$. Ex:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \vec{U} = \begin{pmatrix} U^{0\prime} \\ U^{1\prime} \\ U^{2\prime} \\ U^{3\prime} \end{pmatrix}$$

nos referenciais S e S', respectivamente.

No ET de Minkowski, o elemento de linha ou é dado por:

$$ds^2 = -cdt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Na notação de Einstein:

$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor da métrica:

$$[g_{\alpha\beta}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O produto escalar neste ET é definido como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3$$

As grandezas escalares possuem o mesmo valor em qualquer RI. Diz-se também que os produtos escalares são invariantes.