FIS02012 - Cosmologia e Relatividade

Profa. Thaisa Storchi Bergmann

Bibliografia: baseado no capítulo 7 do livro de Barbara Ryden

Medida de parâmetros cosmológicos

Um dos objetivos da Cosmologia é obter o fator de escala a(t), que pode ser derivado a partir da Equação de Friedmann. Adotam-se valores para os parâmetros que entram na equação, constituindo-se num modelo de Universo. As observações que fornecem vínculos aos modelos são o tema deste capítulo.

1) Dois parâmetros: H_0 e q_0

Sem assumir modelo algum para o Universo, podemos obter a(t) em função da constante de Hubble e de um novo parâmetro que vamos definir, o parâmetro de "desaceleração" do Universo q_0.Expandindo-se a(t) em série de Taylor em torno do momento presente t_0, tomando-se os três primeiros termos obtemos:

$$a(t) \approx a(t_0) + \left(\frac{da}{dt}\right)_{t=t_0}(t-t_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2a}{dt^2}\right)_{t=t_0}(t-t_0)^2 + \ldots$$

Dividindo por $a(t_0)$:

$$a(t) \approx 1 + \left(\frac{\bar{a}}{a}\right)_{t=t_0}(t-t_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{a}}{a}\right)_{t=t_0}(t-t_0)^2$$

$$a(t) \approx 1 + H_0(t-t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^{\,2}(t-t_0)^2$$

Onde,

$$H_0 = \left(\frac{\bar{a}}{a}\right)_{t=t_0}$$

$$q_0 \equiv -\left(\frac{\bar{a}a}{\bar{a}^2}\right)_{t=t_0} = -\left(\frac{\bar{a}}{aH^2}\right)_{t=t_0}$$

Sendo q_0 definido como parâmetro de desaceleração.

A definição como tendo sinal negativo tem razões históricas. Quando foi introduzido este parâmetro acreditava-se que o Universo era dominado pela matéria, e, portanto, a expansão devia estar se desacelerando! Observações atuais indicam que este parece não ser o caso, e o valor de q_0 é atualmente negativo, o que significa que a aceleração do Universo é positiva.

Alan Sandage nos anos 70 disse: Cosmologia é uma busca por dois números: H_0 e q_0! Vejamos como isto pode ser feito.
De acordo com o formalismo que desenvolvemos anteriormente, em particular a “equação da aceleração”:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\sum_{\omega}\varepsilon_{\omega}(1+3\omega)$$

Multiplicando por $-1/H^2$:

$$-\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{8\pi G}{3c^2H^2}\right]\sum_{\omega}\varepsilon_{\omega}(1+3\omega) = \frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon_c}\sum_{\omega}\varepsilon_{\omega}(1+3\omega)$$

E sendo $\Omega_{\omega} = \varepsilon_{\omega}/\varepsilon_c$, poderemos escrever:

$$-\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{1}{2}\sum_{\omega}\Omega_{\omega}(1+3\omega)$$

Para $t = t_0$:

$$q_0 = \frac{1}{2}\sum_{\omega}\Omega_{\omega,0}(1+3\omega)$$

Assim achamos uma expressão para o parametro de desaceleração em termos dos parâmetros de densidade do Universo. No Modelo Padrão, com $\omega = 1/3$ para a radiação, $\omega = 0$ para a matéria e $\omega = -1$ para a constante cosmológica, poderemos escrever:

$$q_0 = \Omega_{r,0} + \frac{1}{2}\Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0} = -0,55$$

que é o parâmetro de desaceleração neste modelo.

Qual o valor de H_0? Em princípio, é simples de medir usando a lei de Hubble:

$$v = H_0 d$$

A velocidade *v* é naturalmente obtida através do efeito Doppler, já a distância *d* é mais difícil de se obter. Por causa da dificuldade na medida das distâncias às galáxias, os primeiros valores determinados para a constante de Hubble eram muito distantes do valor correto. Poor exemplo, os primeiros valores medidos pelo próprio Hubble eram da ordem de 500 km s^{-1} Mpc^{-1}.

Além disso, é difícil definir-se distâncias num Universo em expansão.

Temos a Distância Própria, cuja expressão é:

$$d_p(t_0) = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

Usando a expansão de Taylor que obtivemos para a(t) e usando séries binomiais, obtém-se até segunda ordem em t:

$$\frac{1}{a(t)} \approx 1 - H_0(t - t_0) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right)H_0^2(t - t_0)^2$$

Exercício: Demonstre este resultado.

Substituindo esta expressão na integral para a distância própria, teremos:

$$d_p(t_0) = c\int_{t_e}^{t_0} dt\left[1 - H_0(t - t_0) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right)H_0^2(t - t_0)^2\right]$$

$$d_p(t_0) \approx c(t_0 - t_e) + \frac{cH_0}{2}(t_0 - t_e)^2$$

Demonstre os resultados obtidos.

O primeiro termo é distância percorrida pelo fóton (distância num Universo estático) e o segundo é a correção pela expansão do Universo durante o tempo da viagem da luz.

Entretanto não conhecemos t_e; o que observamos é o *redshift* z:

$$\frac{1}{a(t_e)} = 1 + z$$

Usando a expressão anterior para $a(t)^{-1}$:

$$z \approx H_0(t_0 - t_e) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right)H_0^2(t_0 - t_e)^2$$

Para obtermos uma expressão para o *lookback* time, teremos que isolar (t_o – t_e) da equação acima. **Demonstre** que:

$$(t_0 - t_e) \approx H_0^{-1}\left[z - \left(\frac{1 + q_0}{2}\right)z^2\right]$$

Substituindo esta expressão na obtida acima para a distância própria $d_p(t_0)$:

$$d_p(t_0) \approx \frac{c}{H_0}\left[z-\left(1+\frac{q_0}{2}\right)z^2\right]+\frac{cH_0}{2}\left\{\frac{1}{H_0}\left[z-\left(1+\frac{q_0}{2}\right)z^2\right]\right\}^2$$

Para $z \ll \frac{2}{1+q_0}$:

$$d_p(t_0) \approx \frac{c}{H_0}z\left[1-\frac{1+q_0}{2}z\right]$$

2) Distância de Luminosidade d_L:

Não é possível medir-se a distância própria atual. Ela é obtida indiretamente através da distância de luminosidade.

Define-se:

$$d_L \equiv \left(\frac{L_e}{4\pi f}\right)^{1/2}$$

como sendo a distância de luminosidade, onde f é o fluxo observado da fonte e L_e a sua luminosidade. A expressão acima, em geral, é conhecida a partir da definição do fluxo de f:

$$f = \frac{L}{4\pi d_p^2}$$

Pode-se obter a distância de luminosidade medindo o fluxo observado de uma fonte com luminosidade conhecida, como as “Velas Padrão”, que são fontes para as quais se conhece L_e (luminosidade emitida) e que se assume tenham a mesma L_e mesmo a grandes distâncias. Exemplo: supernovas tipo Ia. Se o Universo não estivesse em expansão e fosse Euclidiano $d_p = d_L$.

Num Universo em expansão a energia emitida pelo fóton é:

$$E_e = \frac{hc}{\lambda_e}$$

$$\lambda_e = a(t_e)\lambda_0 = \frac{\lambda_0}{(1+z)}$$

Portanto,

$$E_e = \frac{hc}{\lambda_0}(1+z) = E_0(1+z)$$

Ou seja, a energia que recebemos é:

$$E_0 = \frac{E_e}{(1+z)}$$

Além disso, o intervalo de tempo entre duas detecções consecutivas de fótons é maior no tempo atual:

$$\Delta t_0 = \frac{1}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{c} \rightarrow \Delta t_e = \frac{1}{\nu_e} = \frac{\lambda_e}{c}$$

Assim,

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} = 1+z$$

A Luminosidade será então

$$L_0 = \frac{E_0}{\Delta t_0} = \frac{L_e}{(1+z)^2}$$

Portanto o fluxo f observado será:

$$f = \frac{L_0}{4\pi d_p^2} = \frac{L_e}{4\pi(1+z)^2 d_p^2}$$

Pela definição de d_L, concluímos que:

$$d_L \equiv \left(\frac{L_e}{4\pi f}\right)^{1/2} = \left(\frac{L_e}{4\pi \frac{L_e}{4\pi(1+z)^2 d_p^2}}\right)^{1/2} = (1+z)d_p(t_0)$$

3) Distância de Diâmetro Angular d_A:

Agora, ao invés de uma “Vela Padrão”, consideremos uma “Régua Padrão” com comprimento l, perpendicular à linha de visada. A distância de diâmetro angular, para ângulos menores que 1º é:

$$d_A = \frac{l}{\delta\theta}$$

Mas, no tempo t_e, em que a luz foi emitida:

$$l = a(t_e)d_p(t_0)\delta\theta = \frac{d_p(t_0)\delta\theta}{1+z}$$

$$d_A = \frac{l}{\delta\theta} = \frac{d_p(t_0)\delta\theta}{1+z}\frac{1}{\delta\theta} = \frac{d_p(t_0)}{1+z}$$

Ao medir a distância, assumindo um tamanho padrão, estamos medindo a distância d_A que é a distância própria da “Régua Padrão” no momento da emissão do fóton!

Verifica-se que d_A atinge um máximo para z = 1,6 no Modelo Padrão e depois começa a decrescer, com d_A(máx) = 0,41d_H (distância de Hubble)= 1800 Mpc. Se isolarmos $\delta\theta$ na relação $l = a(t_e)d_p(t_0)\delta\theta$:

$$\delta\theta = \frac{l}{a(t_e)d_p(t_0)} = \frac{l(1+z)}{d_p(t_0)}$$

No Modelo Padrão, q_0 = - 0,55, então, sendo:

$$d_A = \frac{l}{\delta\theta} = \frac{d_p(t_0)}{1+z} \approx \frac{\frac{c}{H_0}z\left(1-\frac{1+q_0}{2}z\right)}{1+z} = \frac{z\left(1-\frac{1+q_0}{2}z\right)d_H}{1+z}$$

Então podemos obter como varia o diâmetro angular observado correspondente a um comprimento l em função do redshift:

$$z = 0{,}5 \rightarrow \frac{\delta\theta}{l} = 3{,}38 / d_H$$

$$z = 1{,}0 \rightarrow \frac{\delta\theta}{l} = 2{,}581 / d_H$$

$$z = 1{,}6 \rightarrow \frac{\delta\theta}{l} = 2{,}539 / d_H$$

$$z = 2{,}0 \rightarrow \frac{\delta\theta}{l} = 2{,}73 / d_H$$

$$z = 3{,}0 \rightarrow \frac{\delta\theta}{l} = 4{,}10 / d_H$$

Ou seja, o diâmetro angular observado para um mesmo comprimento l diminui com o redshift até um valor mínimo que corresponde a z=1.6, mas para redshifts maiores começa de novo a aumentar, contrariando o “sendo comum”. Este surpreendente resultado permite que possamos resolver espacialmente galáxias muito distantes. Ao contrário do que se poderia esperar, seu tamanho aparente não vai diminuir cada vez mais com a distância: vai chegar a um mínimo e depois não diminui mais. Na aproximação acima, o diâmetro angular até aumenta para z> 1,6, mas se não usarmos aproximações veremos que o diâmetro angular tende a um valor constante, aumentando só um pouquinho com z.

Exercício: Fazer um gráfico de $\frac{\delta\theta}{l}$ versus z em unidades de segundos de arco por kpc versus z.

Escala: a expressão para a distância de diâmetro angular é muito usada para obtermos o que chamamos de Escala, que é, por exemplo, quantos kiloparsecs correspondem a cada segundo de arco. Nestas unidades a escala pode ser obtida de:

$$\text{Escala}\left(\frac{\text{kpc}}{''}\right) = \frac{l(\text{Mpc})\text{x}1000\text{kpc}/\text{Mpc}}{\delta\theta(\text{rad})\text{x}206265''/\text{rad}} = 4{,}848\text{x}10^{-3} d_A(\text{Mpc})$$

4) Velas Padrão para determinar H_0 e q_0:

Para determinarmos H_0 livre do efeito do *Virgocentric flow* precisamos tomar distâncias numa região com d_L > 100 Mpc, enquanto que para a obtenção de q_0 deveremos considerar distâncias d_L > 1000 Mpc.

Para d_L > 1000 Mpc necessitamos de “velas padrão” muito luminosas. Inicialmente, tentou-se usar galáxias, mas não há uma luminosidade padrão para galáxias; além disso, elas evoluem com o tempo. A vela padrão luminosa mais usada atualmente são as supernovas de tipo Ia: sistema binário em que uma das estrelas é uma anã branca que recebe massa da companheira. Quando a massa da anã branca excede o limite de Chandrasekhar de 1,4 M_{SOL} (maior massa suportada pela pressão dos elétrons degenerados) a anã branca colapsa e o aumento da densidade provoca o início de fusões nucleares sem controle que destroem completamente a estrela.

Na Via Láctea, o número esperado de SN Ia é de uma por século. A luminosidade situa-se em torno de L = 4 x 10^9 L_{SOL}. No pico poderá ultrapassar brilho das demais estrelas combinadas da galáxia por alguns dias. Podem ser facilmente observadas até z = 1. No aglomerado de Virgem há pelo menos uma SN Ia por ano.

Observando SN Ia até z ~ 0,1 pode-se determinar o valor de H_0. Se a distância ao aglomerado de Virgem é d_L = 15 Mpc, fluxos e *redshifts* observados de SN Ia a z ~ 0,1 indicam $H_0 = 70 \pm 7$ $kms^{-1}Mpc^{-1}$. Como se obtém o valor para H_0?

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi f}\right)^{1/2} \rightarrow \frac{d_L(z=0{,}1)}{d_L(Virgo)} = \frac{\left(\frac{L}{4\pi f_{0,1}}\right)^{1/2}}{\left(\frac{L}{4\pi f_{Virgo}}\right)^{1/2}} = \left(\frac{f_{Virgo}}{f_{0,1}}\right)^{1/2}$$

Assumindo um valor d_{LVirgo} = 15 Mpc (Cefeídas)e observando $f_{0,1}$ (fluxo das SN a z = 0,1) e o fluxo das SN em Virgo, obtêm-se d_L. E sabemos que:

$$d_L = (1+z)d_p = (1+z)\frac{cz}{H_0}\left(1+\frac{1+q_0}{2}z\right)$$

Para z=0,1:

$$d_L \cong \frac{c}{H_0}z\left[1+\frac{1-q_0}{2}z\right] = \frac{c}{H_0}\left[0{,}1+\frac{1-q_0}{2}(0{,}1)^2\right] = 0{,}1\frac{c}{H_0}$$

Para obter o valor de H_0 podemos desprezar o termo em z^2, e então:

$$H_0 = \frac{0{,}1c}{d_L}$$

Para obter-se q_0, é preciso ir a redshifts mais altos. Para entender como isto é feito, revisemos a definição de magnitude bolométrica, ou seja, integrada em todas as freqüências:

$$m \equiv -2{,}5\log\left(\frac{f}{f_x}\right)$$

sendo $f_x = 2{,}53\times10^{-8}\,Wm^{-2}$ (fluxo de referência).

Esta é a magnitude aparente m, baseada na medida do fluxo. Define-se magnitude absoluta M como sendo aquela que a fonte teria se estivesse a d_L = 10 pc:

$$M = -2{,}5\log\left(\frac{L}{L_x}\right)$$

com $L_x = 78{,}7L_{sol}$.

A relação entre m e M é estabelecida por:

$$M = m - 5\log\left(\frac{d_L}{10pc}\right) = m - 5\log\left(\frac{d_L}{Mpc}\right) - 25$$

Desta forma, o Módulo de distância será:

$$m - M = 5\log\left(\frac{d_L}{Mpc}\right) + 25$$

Substituindo a expressão para d_L na fórmula acima:

$$m - M = 5\log\left[\frac{\frac{cz}{H_0}\left(1+\frac{1-q_0}{2}z\right)}{Mpc}\right] + 25 = 5\log\frac{cz}{H_0} + 5\log\left(1+\frac{1-q_0}{2}z\right) + 25$$

$$= 5\log c - 5\log H_0 + 5\log z + 5\log\left(1+\frac{1-q_0}{2}z\right) + 25$$

$$= 27{,}38 + 25 - 5\log\left(\frac{H_0}{70}\right) - 9{,}23 + 5\log z + 5\log\left(1+\frac{1-q_0}{2}z\right)$$

$$m - M \approx 43{,}17 - 5\log\left(\frac{H_0}{70}\right) + 5\log z + 5\log\left(1+\frac{1-q_0}{2}z\right) \approx 43{,}17 - 5\log\left(\frac{H_0}{70}\right) + 5\log z + 1{,}086(1-q_0)z$$

A expressão acima pode ser usada para obter q_0, conhecidos m (medido), M (conhecida da vela padrão), H_0 e z. Um Universo em aceleração ($q_0 < 0$) vai resultar em magnitudes “m” maiores (mais fracas) do que um Universo em desaceleração. Resultado que levou à descoberta da aceleração do Universo: o fato de que as SN Ia com z maior ou da ordem de 0,5 tem fluxos ~25% menores do que os esperados para um Universo em desaceleração.