FIS02012 - Cosmologia e Relatividade

Thaisa Storchi Bergmann

Bibliografia de consulta: Introduction to Cosmology, de Barbara Ryden; Introdução à Cosmologia de Ronaldo E. de Souza; Wikipedia; ilustrações obtidas da Internet.

A Gravitação e o Princípio da Equivalência

Nas escalas cosmológicas (~100 Mpc), a força dominante é a gravitacional. Em escalas pequenas, a força eletromagnética é muito maior. Por exemplo, a repulsão eletrostática entre 2 prótons é 10^{36} vezes maior que a atração gravitacional entre eles. Mas em grandes escalas, o Universo é neutro e a força gravitacional (a mais fraca do ponto de vista da física de partículas) domina. De acordo com Einstein, a gravidade é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo.

O Princípio da Equivalência

Na visão de Newton do Universo, o espaço é uma "entidade" imutável, com geometria Euclidiana. No espaço Euclidiano, a menor distância entre dois pontos é uma reta, a soma dos ângulos internos de um triângulo é π e a circunferência de um círculo é 2πr onde r é o raio.
Newton definiu a "massa gravitacional" de um objeto, como uma propriedade tal que a força gravitacional entre dois objetos de massas gravitacionais M_g e m_g é:

$$F = -\frac{GM_g m_g}{r^2}$$

onde o sinal negativo indica atração.

Newton também definiu a "massa inercial" m_i, e sua segunda lei diz que:

$$F = m_i a$$

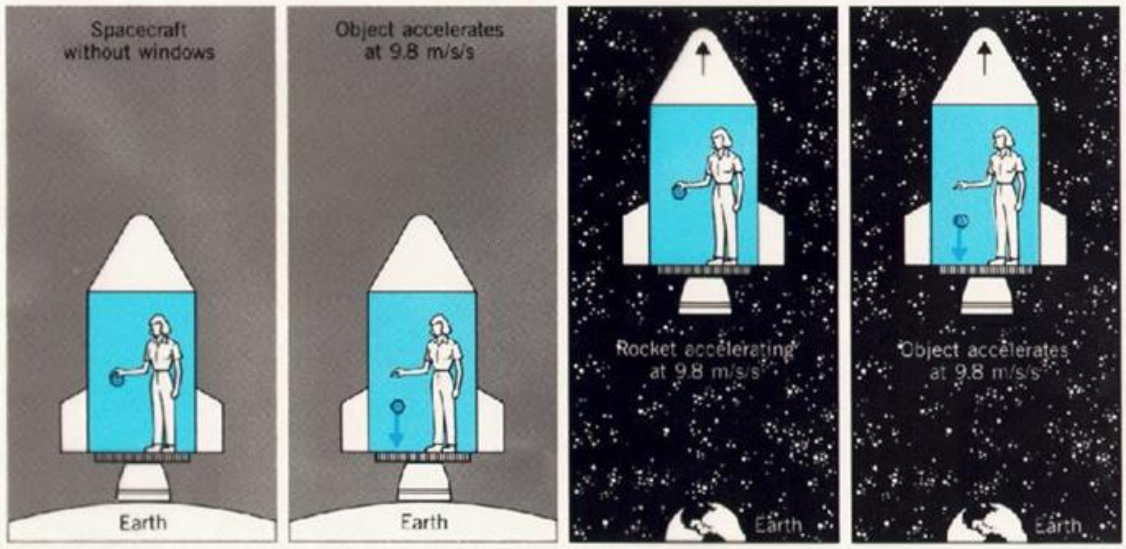
onde a = aceleração.

Sabemos que $m_g = m_i$, mas Einstein se deu conta que esta igualdade não era óbvia: a propriedade de um objeto que determina quão fortemente ele é atraído pela força gravitacional é igual à propriedade que determina sua resistência à aceleração por qualquer força (não só a gravitacional). Esta igualdade demonstra o "Princípio da Equivalência", o qual levou Einstein a propor a teoria da relatividade geral, cujos princípios fundamentais são:

1) Todas as interações (inclusive a gravitacional) se processam com velocidade máxima igual à da luz no vácuo. Não existe ação instantânea à distância. (Este princípio é também da relatividade restrita).

2) Princípio da equivalência: não é possível distinguir entre um campo gravitacional e um referencial acelerado. Em ambos os casos, devemos observar os mesmos fenômenos físicos. A experiência de um corpo em queda livre num campo gravitacional constante é equivalente à experiência feita por um outro observador em um referencial cuja aceleração seja idêntica.

Exemplo que demonstra o princípio da equivalência: se você estiver dentro de uma nave fechada (sem janelas) não vai saber a diferença entre estar parado na superfície da Terra, onde a aceleração é 9,8 ms^{-2} ou no espaço sendo acelerado para cima a 9,8 ms^{-2}.

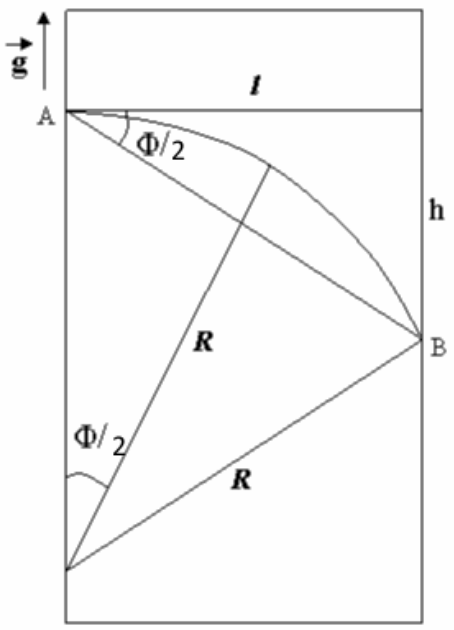


The principle of equivalence.

Ilustração do Princípio da equivalência, obtida de notas de aula do Dr. Imamura, Univ. de Oregon

3) **Corolário do Princípio da Equivalência**: campos gravitacionais devem provocar deflexão num feixe de luz: se você portar uma lanterna e emitir um facho de luz perpendicularmente à direção da aceleração, e se a nave está sendo acelerada para cima, você vai ver o facho de luz curvar para baixo. Como não há como distinguir esta aceleração para cima da provocada por um campo gravitacional, a conclusão que Einstein chegou é que a trajetória dos fótons são desviadas na presença de um campo gravitacional. Na linguagem da relatividade geral, dizemos que o campo gravitacional introduz uma curvatura no espaço que faz com que o feixe de luz siga uma geodésica que não é uma linha reta.

Seja uma nave acelerada onde entra um raio de luz em A e sai em B, como mostra a figura abaixo, onde o ângulo $\Phi/2$ está representado exageradamente grande para facilitar a ilustração.



Podemos calcular o raio de curvatura R a partir da figura acima, considerando que F é pequeno:

$$l = R\,\mathrm{sen}\,\Phi \cong R\Phi$$

$$\tan\left(\frac{\Phi}{2}\right) = \frac{h}{l} = \frac{1}{2}\frac{gt^2}{l}$$

$$t \approx \frac{l}{c} \rightarrow \tan\left(\frac{\Phi}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{gl}{c^2}$$

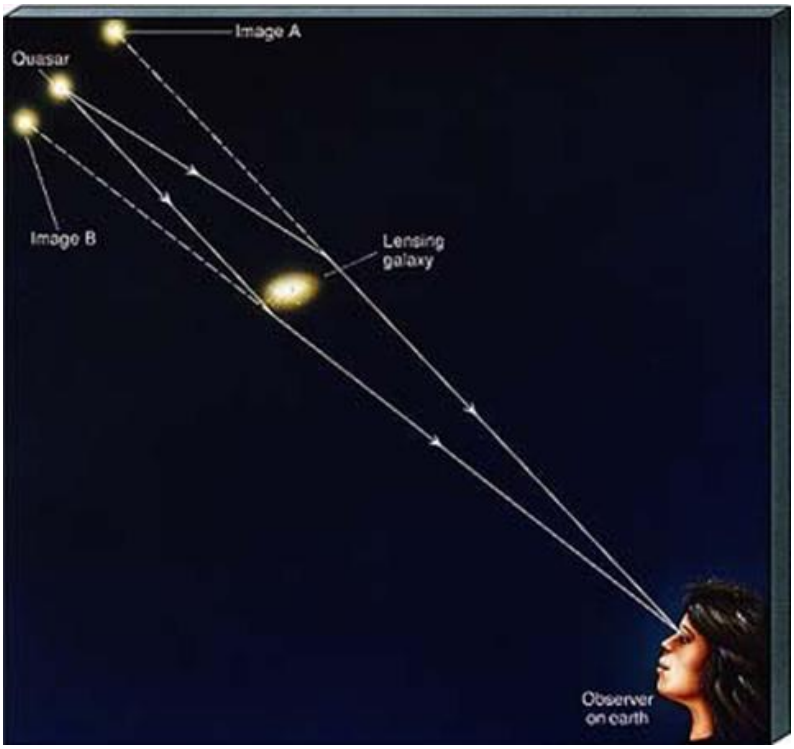
$$\tan\left(\frac{\Phi}{2}\right) \cong \frac{\Phi}{2} = \frac{1}{2}\frac{gl}{c^2} \rightarrow \Phi = \frac{gl}{c^2}$$

$$R \cong \frac{l}{\Phi} = \frac{c^2}{g}$$

Exercício: Determinar o valor do raio de curvatura acima.

Einstein teve outro “insight” com base no “Princípio de Fermat” da ótica: “a luz viaja entre dois pontos pela trajetória que minimiza o tempo de viagem”. No espaço Euclidiano, esta trajetória é uma reta. Entretanto, na presença da gravidade, a trajetória é curva, o que fez Einstein concluir que o espaço não é Euclidiano. A presença da massa curva o espaço.

O desvio da luz ao passar por um campo gravitacional produz o efeito conhecido como **“lentes gravitacionais”**. O princípio está ilustrado abaixo:



Há várias geometrias possíveis para as lentes gravitacionais, algumas das quais ilustramos abaixo:

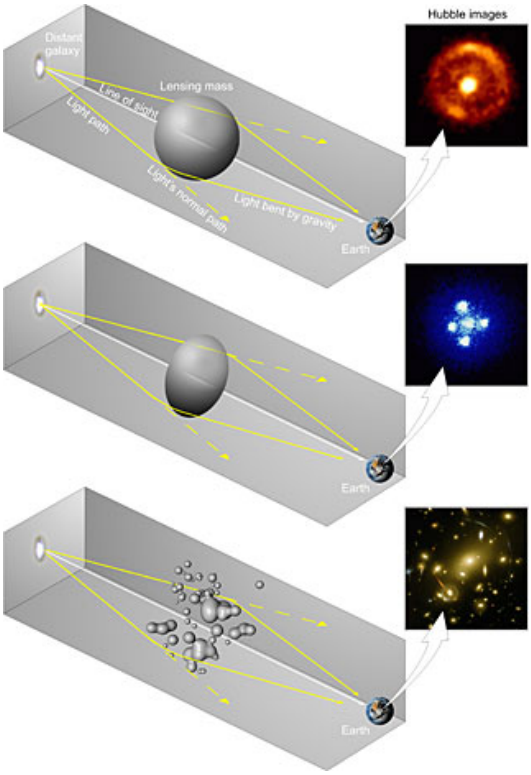
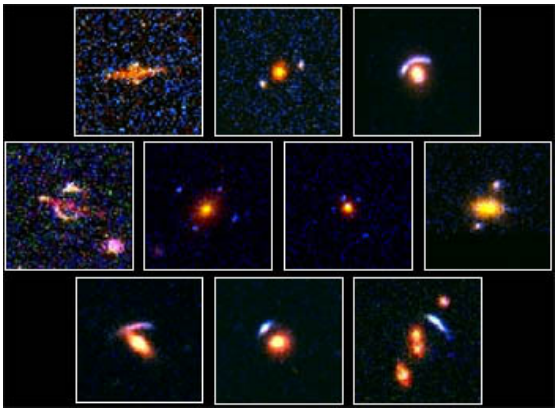


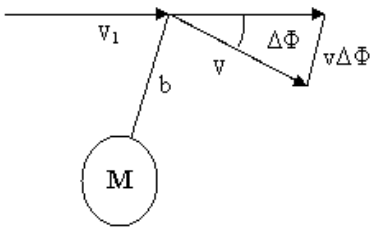
Ilustração obtida da "The Internet Encyclopedia of Science", crédito das images: European Space Agency. São ilustrados três casos de lentes gravitacionais. Se o objeto que produz a lente é esférico, a imagem aparece como um anel, conhecido como "Anel de Einstein"(figura de cima); se a lente é alongada, a imagem é uma "Cruz de Einstein" (figura do meio) e se a lente é um aglomerado de galáxias, como Abell 2218, então aparecerão arcos e arcos parciais (forma de banana) (figura de baixo).



A figura acima ilustra várias lentes gravitacionais observadas com o Telescópio Espacial Hubble.

Segue abaixo uma derivação aproximada do desvio da luz devido a um campo gravitacional:

Seja um fóton que passa por um campo gravitacional e sofre um desvio na sua trajetória. Assumindo que possamos considerar um fóton como uma partícula se movendo com velocidade v, podemos dizer que houve uma variação na direção da sua velocidade de um ângulo DF devido ao campo gravitacional de uma massa M que pode ser representada como:



$$\Delta v = \vec{v} - \vec{v}_1 = v\Delta\Phi$$

onde a aceleração é devida à atração gravitacional da massa M:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{GM}{b^2}$$

$$\Delta v = v\Delta\Phi = \frac{GM}{b^2}\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{b}{v} \rightarrow v\Delta\Phi = \frac{GM}{bv}$$

$$\Delta\Phi = \frac{GM}{bv^2}$$

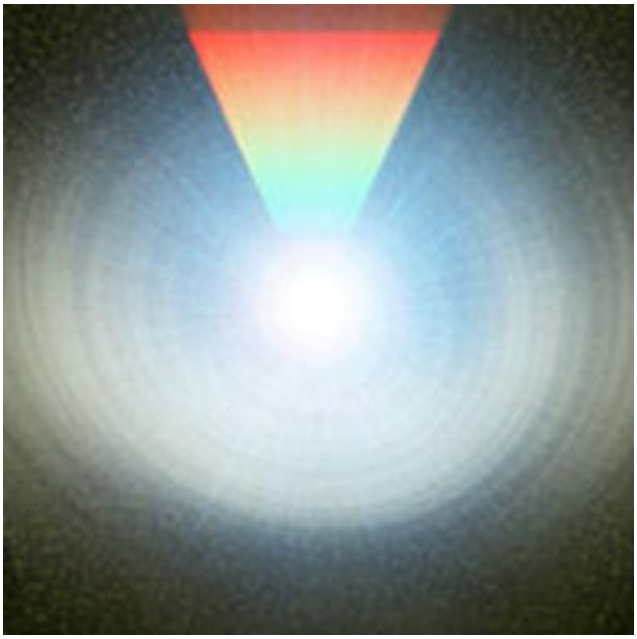
onde *b* é o parâmetro de impacto, ou a distância entre o raio de luz e a massa M.

Um cálculo mais preciso, utilizando a relatividade geral dá:

$$\Delta\Phi = 4\frac{GM}{bc^2}$$

Exercício: Calcule o desvio da luz de uma estrela que passe rasante à borda do Sol. Assuma b=raio do Sol. Obtenha este valor em segundos de arco. Esta medida foi feita por uma expedição que esteve no Brasil com a finalidade de testar a predição da teoria da Relatividade Geral de Einstein - de que o campo gravitacional do Sol deflexionaria a trajetória da radiação emitida pela estrela - durante um eclipse do Sol em 1919, na cidade de Sobral, no Ceará. A oportunidade do eclipse era essencial para tapar o disco do Sol, permitindo a observação da luz da estrela no momento de totalidade do eclipse.

4) **Redshift gravitacional:** Um outro efeito do campo gravitacional sobre a luz é o redshift gravitacional: a luz, ao deixar um campo gravitacional forte, sofre uma perda de energia, e portanto o comprimento de onda se desvia para o vermelho. Este efeito é importante para estrelas de nêutrons e buracos negros. Uma representação do redshift gravitacional é ilustrada na figura abaixo.



Representação do redshift gravitacional sofrido pela luz ao se afastar de uma estrela de nêutrons (obtida da Wikipedia).

Segue uma derivação aproximada da expressão do redshift gravitacional. Assumimos que possamos considerar o fóton como uma partícula de massa ou inércia igual à sua energia dividida por c^2 (lembrando que $E=mc^2$):

$$\frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

Quando o fóton é exposto a um campo gravitacional, uma variação na sua energia é compensada por uma variação na energia potencial gravitacional, sendo que a energia total se conserva. Por exemplo: um fóton que escapa da superfície de uma estrela de nêutrons, sofre uma diminuição de sua energia $\Delta h\nu$, enquanto que a energia potencial aumenta em $(h\nu/c^2)U$, onde U é o potencial gravitacional. Podemos expressar isto da seguinte maneira:

$$\Delta h\nu + \frac{h\nu}{c^2}\Delta U = 0$$

$$\Delta\nu = -\frac{\nu}{c^2}\Delta U \rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta U}{c^2}$$

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta U}{c^2}$$

$$U = -\frac{GM}{R} \rightarrow \Delta U = U(\infty) - U(R) = 0 + \frac{GM}{R}$$

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{GM}{Rc^2}$$

$$\frac{\lambda_\infty - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{GM}{Rc^2} \rightarrow \frac{\lambda_\infty}{\lambda_0} = 1 + \frac{GM}{Rc^2}$$

Esta expressão vale para campos gravitacionais fracos. Uma derivação mais rigorosa dá:

$$\frac{\lambda_\infty}{\lambda_0} = \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{-1/2}$$

$$\frac{\nu_\infty}{\nu_0} = \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{1/2}$$

Exercícios:

1) Qual é o redshift gravitacional sofrido pela linha Hα do Hidrogênio (λ_0=6563A) emitida por uma estrela anã branca com massa igual à do Sol e raio R=2,9x10^6m? Qual é o comprimento de onda observado?

2) Qual seria o redshift gravitacional da linha Hα se ela pudesse ser emitida a partir da borda interna de um disco de acreção em torno de um buraco negro, que se encontra a 3 raios de Schwarzchild do buraco negro?.

3) Utilize a fórmula correta para obter o comprimento de onda observado (λ_∞) no limite em que a distância ao buraco negro seja $R=R_{Sch}=2GM/c^2$.

4) Compare as duas expressões (para campos gravitacionais fracos e fortes) para o redshift gravitacional e obtenha o limite de R a partir do qual não se pode utilizar a expressão para campos fracos.

5) Dilatação do tempo:

O efeito da diminuição na freqüência da radiação pode ser também interpretado como uma dilatação do tempo. Por exemplo, seja um intervalo de tempo igual ao período da onda:

$$\delta t = \frac{1}{\nu}$$

O observador está no infinito, e portanto, o intervalo de tempo observado é:

$$\delta t_\infty = \frac{1}{\nu_\infty}$$

Enquanto que o intervalo de tempo perto da fonte é:

$$\delta t_0 = \frac{1}{\nu_0}$$

Portanto:

$$\frac{\delta t_\infty}{\delta t_0} = \frac{\nu_0}{\nu_\infty}$$

Ou seja, se a freqüência da radiação diminuiu devido ao redshift gravitacional ($n_¥ < n_0$), ocorreu uma dilatação do tempo observado ($\delta t_\infty > \delta t_0$). No terceiro exercício acima, demonstra-se que a energia do fóton tende a zero no horizonte de eventos de um buraco negro, ou seja, sua freqüência observada tende a zero. Isto corresponde a um intervalo de tempo infinito para quem está longe e significa que, para um observador distante, um objeto capturado por um buraco negro prestes a atravessar o horizonte de eventos, parece demorar um tempo infinito para isto.

Curvatura do espaço-tempo:

Na teoria da relatividade geral, massa e energia são equivalentes, através da famosa equação: $E = mc^2$.
Além disso, espaço e tempo formam um espaço-tempo tetradimensional (visão de Newton: duas entidades separadas).
Visão de Einstein: “a presença da matéria-energia causa a curvatura do espaço-tempo”.

Como funciona a gravidade:

a) Segundo Newton: A massa “diz” para a gravidade como exercer uma força e a força diz para a massa como se acelerar.

$$F = \frac{-GMm}{r^2}$$

b) Segundo Einstein: A massa-energia diz para o espaço-tempo como se curvar, e o espaço-tempo curvo diz para a massa-energia como se mover.

Então se deixarmos um objeto cair dentro da nossa caixa acelerada, há 3 possíveis interpretações: (1) A caixa está parada (ou com velocidade constante) e o objeto está acelerado para baixo por uma força gravitacional constante; (2) O objeto está parado (ou com velocidade constante) e a caixa está acelerada para cima a uma taxa constante ou (3) o objeto está simplesmente seguindo uma geodésica no espaço-tempo.

Na descrição Newtoniana $m_g = m_i$ é uma coincidência (o princípio da equivalência). Na descrição de Einstein da relatividade geral, não é coincidência, a aceleração de um objeto é independente da sua massa e da sua composição. O objeto simplesmente segue uma geodésica, o que é ditado pela geometria do espaço-tempo.