FIS02012 - Cosmologia e Relatividade

Profa. Thaisa Storchi Bergmann

Bibliografia de consulta: Capítulo 3 do livro de Barbara Ryden, Introduction to Cosmology, e Cap. 3 do livro de Ronaldo de Souza, Introdução à Cosmologia

2) Curvatura e métrica (segundo Barbara Ryden)

Comecemos com a descrição da curvatura em espaços bidimensionais:

1) **Plano**: a geodésica é uma linha reta. Um triângulo construído unindo três pontos com geodésicas, tem a soma dos ângulos internos iguais a π.

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$ (Fig. 3.3, Barbara Ryden)

Distância entre dois pontos (x, y) e (x + dx, y + dy):

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Em coordenadas polares: (r, θ) e $(r + dr, \theta + d\theta)$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

2) **Superfície de uma esfera**: a geodésica é um grande círculo (cujo centro coincide com o da esfera). Triângulo desenhado na superfície

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + A / R^2$$

onde A: área do triângulo e R: raio da esfera.

Diz-se que este espaço tem "curvatura positiva" porque $\alpha + \beta + \gamma > \pi$. Na superfície da esfera também ocorre que a curvatura é homogênea e isotrópica.

Distância entre dois pontos (r, θ) e $(r + dr, \theta + d\theta)$ sendo r a distância ao pólo norte e θ o ângulo em relação a um meridiano escolhido, que chamamos de meridiano principal:

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \mathrm{sen}^2 (r / R) d\theta^2$$

Obs.: a superfície de uma esfera tem uma área finita igual a $4\pi R^2$ e uma distância máxima entre dois pontos que é πR. Em contrapartida, um plano tem área infinita e não tem distância limite entre pontos.

3) **Sela**: espaço de curvatura negativa, que contém um hiperbolóide. David Hilbert, matemático, provou que uma superfície de curvatura negativa constante não pode ser desenhada num espaço tridimensional. A sela contém curvatura constante somente na região central, que corresponde ao "assento".

Propriedades:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - A / R^2$$

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \operatorname{senh}^2(r / R) d\theta^2$$

Uma superfície de curvatura negativa constante tem área infinita, sem distância limite entre pontos.

Métrica:

Relações que dão a distância entre dois pontos no espaço, como as expressões para "ds" que obtivemos acima são chamadas de "métricas". No caso mais geral, a curvatura é uma propriedade local. Analogia: uma toalha de mesa pode estar amassada num canto e esticada noutro; um pneu tem curvatura negativa na parte interna e positiva na parte externa.
Para que um espaço bidimensional seja isotrópico e homogêneo, só há três possibilidades: 1) é uniformemente plano ou "chato"; 2) tem curvatura uniforme positiva; 3) ou tem curvatura uniforme negativa. Sua geometria fica especificada com somente duas quantidades: κ: constante de curvatura e R: raio de curvatura. A constante de curvatura pode assumir os valores:

$$\kappa = \begin{cases} +1 \rightarrow \text{curvatura positiva} \\ 0 \rightarrow \text{espaço chato ou plano} \\ -1 \rightarrow \text{curvatura negativa} \end{cases}$$

Passando para um espaço tridimensional, com $\kappa = 0$, a métrica fica:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \text{(coordenadas cartesianas)}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2\left[d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2\right]$$ (coordenadas esféricas)

Para $\kappa = +1$

$$ds^2 = dr^2 + R^2 sen^2(r/R)\left[d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2\right]$$

Um espaço tridimensional com curvatura positiva tem um volume finito. O ponto com $r = \pi R$ é o "antípoda" à origem (como no caso da superfície esférica). Viajando uma distância $C = 2\pi R$ é possível voltar ao ponto de origem neste espaço.

Para $\kappa = -1$:

$$ds^2 = dr^2 + R^2 senh^2(r/R)\left[d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2\right]$$

Este espaço tem volume infinito.

Podemos reunir as três métricas possíveis em:

$$ds^2 = dr^2 + S_k(r)^2 d\Omega^2$$

$$S_k(r) = \begin{cases} R\,sen(r/R) & \text{para } (\kappa = +1) \\ r & \text{para } (\kappa = 0) \\ R\,senh(r/R) & \text{para } (\kappa = -1) \end{cases}$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2$$

No limite $r \ll R$, $S_\kappa(r) \approx r$ (espaço é plano para regiões pequenas).

- Se $k = 0$ ou $\kappa = -1$, S_k cresce com r e vai a infinito quando r vai a infinito.

· Se k = +1, S_k máximo = R quando $r/R = \pi/2$ e daí decresce de novo a 0 quando $r/R = \pi$, o ponto oposto à origem.

Usamos o sistema de coordenadas (r, θ, ϕ). Se usarmos ao invés de r, $x = S_k(r)$, a métrica para um Universo homogêneo e isotrópico fica:

Para κ = +1:

$$ds^2 = dr^2 + S_k(r)^2 d\Omega^2$$

$$x = S_k(r)$$

$$\frac{dx}{dr} = \frac{d}{dr} S_\kappa(r) = \frac{d}{dr}\left[R\,\mathrm{sen}(r/R)\right] = \cos(r/R)$$

$$dr = \frac{dx}{\cos(r/R)}$$

$$dr^2 = \frac{dx^2}{1 - \mathrm{sen}^2(r/R)}$$

$$\mathrm{sen}^2(r/R) = \frac{S_k(r)^2}{R^2} = \frac{x^2}{R^2}$$

$$dr^2 = \frac{dx^2}{1 - \frac{x^2}{R^2}}$$

$$ds^2 = \frac{dx^2}{1 - \frac{x^2}{R^2}} + x^2 d\Omega^2$$

No caso genérico (para κ= +1, 0 ou -1):

$$ds^2 = \frac{dx^2}{1-\kappa\frac{x^2}{R^2}} + x^2 d\Omega^2$$

Incluindo o tempo, e a expansão do Universo através do fator de escala a(t), temos a métrica de Robertson-Walker:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2\left[\frac{dx^2}{1-\kappa x^2/R^2} + x^2 d\Omega^2\right]$$

Usando a métrica de Robertson-Walker para um tempo fixo t:

$$ds^2 = a(t)^2\left[dr^2 + S_k(r)^2 d\Omega^2\right]$$

Para medir a distância a uma galáxia, com θ e ϕ constantes, $d\Omega = 0$.

$$ds = a(t)dr$$

A distância própria é obtida integrando ao longo da coordenada radial comóvel r:

$$d_p(t) = a(t)\int_0^r dr = a(t)r$$

Taxa de variação da distância própria:

$$\dot{d}_p = \dot{a}r = \frac{\dot{a}}{a}d_p$$

No tempo atual:

$$\dot{d}_P(t_0) = v_P(t_0) = H_0 d_P(t_0) = \frac{\dot{a}}{a} d_P(t_0)$$

$$H_0 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{t=t_0}$$

Expansão do Universo: taxa de aumento da distância entre galáxias é a mesma do crescimento do raio de curvatura $R(t) = a(t)R_0$ do Universo.

Distância própria de Hubble

$$v_P(t_0) = H_0 d_H(t_0) = c$$

:

$$d_H(t_0) = \frac{c}{H_0}$$

Para distâncias maiores, $v_P > c$.

Exercício: Calcular a distância de Hubble.
Solução:

$$d_H = \frac{300000 \mathrm{kms}^{-1}}{70 \mathrm{kms}^{-1}} \mathrm{Mpc} = 4285 \mathrm{Mpc}$$

Galáxias mais distantes do que d_H estão se afastando com velocidades maiores que c. Poder-se-ia pensar que isto viola a lei de que objetos massivos não podem viajar a velocidades maiores que a da luz. Mas isto não é verdade. O limite de velocidade = c é resultado da relatividade especial e se refere a movimentos relativos de objetos num espaço estático. No contexto da relatividade geral, pode-se ter objetos se afastando uns dos outros com velocidade superluminal devido à expansão do espaço.

\

Relação entre a(t) e z:

Consideremos a luz emitida por uma galáxia num tempo t_e, observada por nós em t_0. A luz viaja ao longo de uma geodésica nula, com $ds = 0$. Considerando propagação somente na direção

radial:

$$c\frac{dt}{a(t)} = dr$$

Seja uma frente de onda emitida em t_e e observada em t_0:

$$c\int_{t_e}^{t_0}\frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r$$

Seja a “onda seguinte” emitida em $t_e + \lambda_e / c$, que vai ser observada em: $t_0 + \lambda_0 / c$:

$$c\int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0+\lambda_0/c}\frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r$$

Conclui-se que:

$$\int_{t_e}^{t_0}\frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0+\lambda_0/c}\frac{dt}{a(t)}$$

Subtraindo dos dois lados: $\int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0}\frac{dt}{a(t)}$

Resulta:

$$\int_{t_e}^{t_{e+\lambda_e/c}}\frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+\lambda_0/c}\frac{dt}{a(t)}$$

No intervalo de tempo correspondente a λ_e e λ_0 podemos assumir $a(t) \approx$ constante e assim:

$$\frac{1}{a(t_e)}\frac{\lambda_e}{c} = \frac{1}{a(t_0)}\frac{\lambda_0}{c} \rightarrow \frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{1} \rightarrow \lambda_e = \lambda_0 a(t_e)$$

Então, devido à expansão do Universo, λ_e expande também.

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = 1 + z = \frac{1}{a(t_e)}$$

Então, ao observar uma galáxia a um redshift z = 2, por exemplo,

$$a(t_e) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{3}$$

Ou seja, o Universo tinha 1/3 do seu tamanho total.

Curvatura e métrica (segundo Ronaldo de Souza)

1) Universo unidimensional curvo:

No caso de um Universo cujo espaço é unidimensional, descrito por um círculo imerso em um plano, o raio de curvatura seria:

$$\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 = R^2$$

Onde:

$$x^1 = R\cos\phi$$

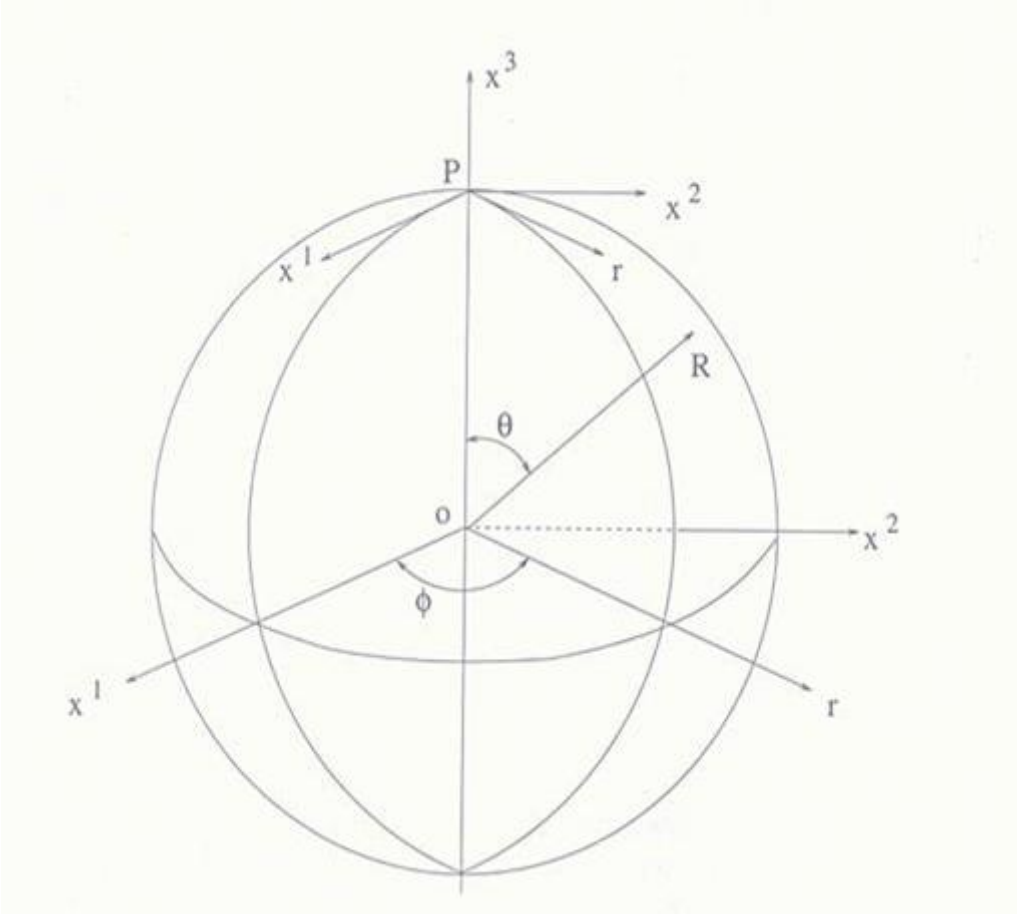
$$x^2 = R\,\mathrm{sen}\,\phi$$

R seria o raio do círculo, x^1 e x^2, as projeções de R nos dois eixos de coordenadas, e ϕ a posição angular. Um habitante deste hipotético Universo perceberia a existência de apenas uma dimensão para descrever o seu espaço físico, apesar de que ele se encontra, de fato, imerso em um espaço de duas dimensões, um plano. Portanto, o seu elemento de linha, ou seja, o elemento de deslocamento espacial no seu Universo restrito, pode ser descrito por:

$$dl^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 = R^2 (d\phi)^2$$

Que é a métrica neste espaço.

2) Universo bi-dimensional curvo sobre a superfície de uma esfera:



Este mesmo exercício pode ser repetido para o caso um pouco mais complexo, mas que ainda podemos visualizar na figura acima, de um Universo em que os habitantes estão restritos a se movimentar sobre a superfície de uma esfera, a qual se encontra imersa em um espaço em três dimensões. Nessa situação, o sistema de coordenadas mais adequado seria:

$$\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2 = R^2$$

Sendo,

$$x^1 = R \operatorname{sen}\theta \cos\phi$$

$$x^2 = R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi$$

$$x^3 = R\cos\theta$$

Estas relações nos permitem escrever o elemento de deslocamento sobre a superfície da esfera:

$$dl^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2 = R^2\left(d\theta\right)^2 + R^2\,\mathrm{sen}^2\theta\left(d\phi\right)^2$$

Exercício: Obter a expressão acima.

Observe que, tal qual ocorria no exemplo anterior, um observador preso à superfície desta esfera não teria acesso às três coordenadas que definem seu espaço. Na percepção dele, seu espaço físico é constituído por apenas duas dimensões, a superfície da esfera que define o seu Universo. Se orientarmos o pólo do nosso sistema de coordenadas tridimensional de tal maneira que o eixo x^3 passe através da posição do observador, podemos ver que as coordenadas x^1, x^2 e ϕ podem ser medidas, pois estão contidas no plano tangente, mas não x^3ou θ. A única forma de ele perceber a presença desta coordenada oculta é através da sua projeção $r = R\,\mathrm{sen}\,\theta$ sobre o seu espaço bidimensional.

Podemos verificar que, se esse observador se afastar ligeiramente do pólo, ele deverá perceber que seu deslocamento espacial é dado por, dl^2 » $(dx^1)^2 + (dx^2)^2$ ou seja, em pequenas escalas o seu Universo é euclidiano. Nessas escalas, o nosso observador não precisa considerar o efeito do raio de curvatura da esfera. Isto se deve a que um pequeno afastamento pode ser descrito por um deslocamento sobre o plano tangente que passa pela posição polar. No entanto, se ele se movimentar o suficiente perceberá que seu Universo é um pouco mais complicado do que imaginava. Nesse caso, o plano tangente se afasta apreciavelmente da superfície da esfera, e o observador simplesmente não conseguirá descrever o deslocamento através da aproximação euclidiana. Para entender corretamente o processo ele precisa utilizar a relação mais geral, na qual está embutido o raio de curvatura R de seu Universo. De início ele pode se sentir um pouco perplexo por fazer uso de uma coordenada adicional, a qual simplesmente não consegue enxergar. Entretanto, essa é a solução matematicamente correta para descrever completamente o seu Universo.

3) Espaço tridimensional, como o nosso, imerso em um Universo de quatro dimensões:

$$\left(x^0\right)^2 + \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2 = R^2$$

Com,

$$x^0 = R\cos\psi$$

$$x^1 = R\,\mathrm{sen}\,\psi\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi$$

$$x^2 = R\,\mathrm{sen}\,\psi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi$$

$$x^3 = R\,\mathrm{sen}\,\psi\cos\theta$$

Correspondendo a um elemento de deslocamento espacial,

$$dl^2 = R^2(d\psi)^2 + R^2\,\mathrm{sen}^2\psi(d\theta)^2 + R^2\,\mathrm{sen}^2\psi\,\mathrm{sen}^2\theta(d\phi)^2$$

Exercício: Obter a expressão acima.

Neste caso, devemos lembrar que devido às nossas limitações, o raio tridimensional, $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$, é o único ao qual temos acesso visual. E este, por sua vez, é a projeção do "raio" quadridimensional R sobre o nosso espaço tridimensional, através do ângulo ψ:. $r = R\,\mathrm{sen}\,\psi$

$$r = R\,\mathrm{sen}\,\psi \rightarrow \mathrm{sen}\,\psi = \frac{r}{R}$$

$$dr = R\cos\psi d\psi \rightarrow dr^2 = R^2\cos^2\psi d\psi^2 \rightarrow R^2 d\psi^2 = \frac{dr^2}{\cos^2\psi}$$

$$R^2 d\psi^2 = \frac{dr^2}{\cos^2\psi} = \frac{dr^2}{1-\mathrm{sen}^2\psi} = \frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R^2}}$$

Substituindo a expressão acima para $R^2(d\psi)^2$ na expressão para o deslocamento no nosso espaço tridimensional obtemos:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{\ }} + r^2 d\theta^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2\theta d\phi^2$$

$$R^2$$

que é a expressão final adequada para descrever os deslocamentos espaciais num Universo tridimensional com curvatura positiva. Nessa expressão, R é o raio de curvatura que precisamos avaliar, mesmo sabendo que jamais poderemos visualizá-lo. Note que quando realizamos observações locais, o termo de curvatura é desprezível, e recuperamos a expressão para o deslocamento na geometria euclidiana. Quando a dimensão amostrada é comparável ao raio de curvatura, detectamos uma diferença apreciável em relação à métrica euclidiana. Suponha, para simplificar a discussão, que $d\theta = d\varphi = 0$ correspondendo a observações ao longo da direção radial. Nesse caso, ao realizar observações locais, obtemos que dl » dr = $[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2]^{1/2}$, ou seja, a distância percorrida é exatamente igual à variação da sua coordenada radial, resultado bastante intuitivo na geometria euclidiana. Quando a distância é grande, precisamos utilizar a relação correta:

$$dl = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}}$$

.

Percebemos, portanto, que a distância percorrida é diferente da variação na coordenada radial. Para se entender o que está ocorrendo precisamos retornar à figura da esfera, que ilustra o mesmo efeito para um observador condenado a viver em um espaço bidimensional imerso em um Universo tridimensional. Também ele sentirá o mesmo efeito, quando observa objetos mais distantes, e este resultado é motivado pela necessidade da sua coordenada l acompanhar a superfície da esfera, afastando-se, portanto, da solução euclidiana local, representada ali pela coordenada r contida no plano tangente.

3) A métrica de Robertson-Walker

Incluindo o tempo, podemos calcular a distância entre dois eventos no espaço-tempo: entre (t, r, θ, ϕ) e $(t + dt, r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$. Na relatividade especial, onde não há curvatura (o espaço é plano), e a separação entre dois eventos no espaço-tempo é:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

sendo,

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$$

Esta é a Métrica de Minkowski, que se aplica no caso do espaço plano (não há gravidade) e estático (não há expansão do espaço) da relatividade especial.

O caminho de um fóton no espaço-tempo é uma geodésica quadridimensional, mas um tipo especial de geodésica – a geodésica nula:

$$ds^2 = 0 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2d\Omega^2$$

Se a trajetória é radial, dΩ = 0, então:

$$\frac{dr}{dt} = c$$

Na presença de gravidade, assumindo um Universo homogêneo e isotrópico em expansão com três dimensões espaciais e uma temporal, a métrica fica:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2\left[\frac{dr^2}{1-\kappa r^2/R^2} + r^2d\Omega^2\right]$$

para um espaço com raio de curvatura R_0 e $\kappa = 0, +1, -1$ (curvatura nula, positiva ou negativa). Esta é a **métrica de Robertson-Walker**, derivada por estes dois físicos por volta de 1939 para um Universo homogêneo e isotrópico em expansão, com fator de escala a(t), onde a variável 't' é o tempo cósmico ou tempo próprio e as variáveis (r, θ, Φ) são coordenadas comóveis (ver Fig. 3.13 do livro do Ronaldo) ;

Num Universo homogêneo e isotrópico toda a informação sobre sua geometria está contida em $a(t)$, κ e R_0. O objetivo da Cosmologia moderna é estudar estes valores.

Observação: note que a expressão final para a métrica é a mesma obtida por Barbara Ryden, usando um método um pouco diferente.

4) Distância própria $d_P(t)$:

A distância própria entre dois pontos num tempo ‘t’ é o comprimento da geodésica entre estes pontos para um valor do fator de escala igual a a(t).

Movimento dos fótons: para os fótons, o deslocamento no espaço-tempo é nulo:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dl^2 = 0 \rightarrow dl = cdt$$

Na métrica de Robertson-Walker, a distância própria d_P é obtida de:

$$dl^2 = c^2dt^2 = a(t)^2\left(\frac{dr^2}{1-\kappa r^2/R^2}\right)$$

$$\frac{c^2dt^2}{a(t)^2} = \frac{dr^2}{1-\kappa r^2/R^2} \rightarrow \frac{cdt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1-\kappa r^2/R^2}}$$

$$\int_{t_e}^{t}\frac{cdt}{a(t)} = \int_{0}^{d_P(t)}\frac{dr}{1-\kappa r^2/R^2}$$

onde assumimos dθ e dΦ nulos (para fóton se movendo somente na direção radial) e t_e é o tempo da emissão do fóton. A distância comóvel r* é igual à distância própria no tempo atual t_0. Para um Universo plano $(\kappa = 0)$:

$$r^* = d_P(t_0) = \int_{t_e}^{t_0}\frac{cdt}{a(t)}$$

Precisamos, então, conhecer a dependência de a(t) com o tempo para podermos obter a expressão para as distâncias própria e comóvel.

O significado da distância comóvel pode ser compreendido através da figura 3.13 do livro do Ronaldo: à medida que o Universo se expande, as distâncias se expandem com ele. A distância comóvel é maior do que a distância percorrida pelo fóton:

$$d_{fóton} = \int_{t_e}^{t_0} c\,dt = c(t_0 - t_e)$$

Porque, à medida que o fóton viaja pelo Universo, o Universo se expande fazendo com que a distância da galáxia que emitiu o fóton seja maior do que o caminho percorrido pelo fóton no intervalo de tempo $(t_0 - t_e)$.

Questão (Diefferson): As distâncias mencionadas em notícias astronômicas são as distâncias próprias?

Resposta: Quando observamos a luz de uma galáxia, a única coisa que conseguimos medir é o redshift. Já sabemos que o redshift z se relaciona com o fator de escala do Universo: $a(t_e) = 1/(1+z)$. Assim, podemos calcular qual é o fator de escala do Universo na época que a luz foi emitida $a(t_e)$. O que se faz, em geral, é usar um modelo cosmológico para calcular a idade do Universo no tempo em que o fóton foi emitido t_e, ou o lookback time: $(t_0 - t_e)$. Poder-se ia dar já o valor da distância própria ou comóvel, mas em geral o que se dá é a distância percorrida pelo fóton $r = c(t_0 - t_e)$. Para distâncias pequenas (até centenas de parsecs), a distância comóvel é quase igual à percorrida pelo fóton. Para distâncias progressivamente maiores, a distância comóvel vai se tornando progressivamente maior do que a percorrida pelo fóton. Uma ilustração disto pode ser obtida através de programas elaborados para o cálculo de parâmetros cosmológicos como o Ned Wright's Cosmology Calculator, que pode ser acessado através do endereço eletrônico: http://www.astro.ucla.edu/~wright/CosmoCalc.html.