



Cosmologia e Relatividade

Prof. Thaisa Bergmann

Da Geometria Euclidiana à
Teoria da Relatividade Geral



Cosmologia e Relatividade

Prof. Thaisa Bergmann

Euclides (séc. III a.C.)

Nascido no século III antes de Jesus Cristo, Euclides deixou-nos uma obra que já perdura à mais de dois milénios. Esta obra intitula-se Elementos. Autor de um célebre e monumental tratado em 13 volumes, intitulado elementos.

Expõem de uma forma lógica os principais conhecimentos da sua época de Geometria e Aritmética, tendo esta obra marcado esse campo de conhecimento até ao século XIX.



Cosmologia e Relatividade

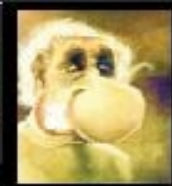
Prof. Thaisa Bergmann

Euclides (séc. III a.C.)

Foi o mais afamado dos tratadistas gregos em matéria de geometria, que habitou em Alexandria nos finais do séc. IV e princípios do séc. III a.C.

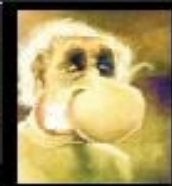
Foi ele quem introduziu o método da "redução ao absurdo", que permite evitar as considerações diretas do infinito e dos incomensuráveis.

Euclides ditou 35 definições e 15 postulados ou axiomas.



Postulados de Euclides

1. Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si.
2. Se juntarmos a duas quantidades iguais outras duas quantidades iguais, os totais obtidos serão iguais.
3. Se subtrairmos de duas quantidades iguais outras duas quantidades iguais, as diferenças obtidas serão iguais.
4. As coisas que se podem sobrepor umas às outras são iguais.
5. O todo é maior que a parte.



Cosmologia e Relatividade

Prof. Thaisa Bergmann

Postulados são específicos da geometria

- 6. Dados dois pontos, há um segmento de reta que os une;*
- 7. Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta;*
- 8. Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer pode-se construir um círculo de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada;*
- 9. Todos os ângulos retos são iguais;*
- 10. Se uma linha reta cortar duas outras retas de modo que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado seja menor do que dois ângulos retos, então essas duas retas, quando suficientemente prolongadas, cruzam-se do mesmo lado em que estão esses dois ângulos*

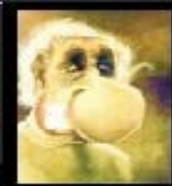


Cosmologia e Relatividade

Prof. Thaisa Bergmann

Próclo (410 - 485), criticou este postulado nos seguintes termos:

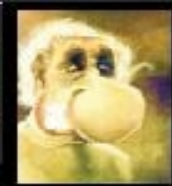
"Este postulado deve ser riscado da lista, pois é uma proposição com muitas dificuldades que Ptolomeu, em certo livro, se propôs resolver... A asserção de que duas linhas retas, por convergirem mais e mais à medida que forem sendo prolongadas, acabam por se encontrar, é plausível mas não necessária. (...) É claro, portanto, que devemos procurar uma demonstração do presente teorema, e que este é estranho ao caráter especial dos postulados."



Cosmologia e Relatividade

Prof. Thaisa Bergmann

O próprio Euclides e muitos dos seus sucessores tentaram demonstrar esta proposição a partir de outros axiomas da geometria. Mas sempre em vão. Esta impossibilidade foi durante séculos o escândalo da geometria e o desespero dos geometras.



Cosmologia e Relatividade

Prof. Thaisa Bergmann

A primeira tentativa de demonstração de que há conhecimento é de Ptolomeu de Alexandria (c. 90 - 168). Outro exemplo de uma tentativa frustrada de contornar o quinto postulado de Euclides é feita por John Wallis (1616 - 1703), matemático britânico antecessor de Isaac Newton (1643 - 1727). De facto, Wallis não fez mais do que propor um novo enunciado do quinto postulado de Euclides.



Cosmologia e Relatividade

Prof. Thaisa Bergmann

O padre jesuíta G. Saccheri (1667 - 1733) foi talvez o primeiro a ensaiar uma abordagem inteiramente nova. No seu último livro *Euclides ab omni naevo vindicatus* tentou utilizar a técnica de redução ao absurdo, admitindo a negação do postulado do paralelismo de Euclides com vista a obter algum absurdo ou contradição. Sem o saber Saccheri tinha descoberto a geometria não-euclidiana!



Cosmologia e Relatividade

Prof. Thaisa Bergmann

O trabalho de Saccheri permaneceu ignorado durante século e meio. Outros grandes matemáticos, como Karl Gauss (1777 - 1855), o príncipe dos matemáticos, redescobriram e desenvolveram a geometria em bases semelhantes às de Saccheri (negando o quinto postulado), sem nunca chegarem a uma contradição.

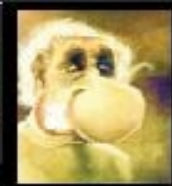


Cosmologia e Relatividade

Prof. Thaisa Bergmann

Gauss chega mesmo a escrever:

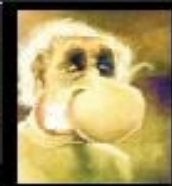
"Estou cada vez mais convencido de que a necessidade da nossa geometria (euclidiana) não pode ser demonstrada, pelo menos não pela razão humana, nem por culpa dela. Talvez, numa outra vida, consigamos obter a intuição sobre a natureza do espaço que, no presente, é inatingível."



Cosmologia e Relatividade

Prof. Thaisa Bergmann

O jovem húngaro Janos Bolyai (1802 - 1860) admite a negação do postulado do paralelismo de Euclides como hipótese não absurda, isto é, como um novo postulado, a juntar aos postulados habituais da geometria absoluta. Pela mesma época, e trabalhando independentemente, o jovem russo Nicolai Lobachewski (1792 - 1856) publica em 1829 a sua versão da geometria não euclidiana à qual chama, primeiramente "imaginária" e depois "pangeometria". Actualmente, esta geometria é chamada Geometria Hiperbólica.



Cosmologia e Relatividade

Prof. Thaisa Bergmann

Foi necessário esperar até ao século XIX para que Karl Friedrich Gauss, Janos Bolyai, Bernard Riemann e Nicolai Ivanovich Lobachevski conseguissem demonstrar que se trata efectivamente de um axioma, necessário e independente dos outros. Supuseram que o postulado de Euclides não era verdadeiro e substituíram-no por outros axiomas.



Cosmologia e Relatividade

Prof. Thaisa Bergmann

Geometria Euclidiana (Parabólica):

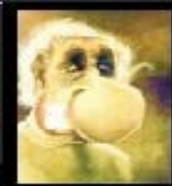
Por um ponto exterior a uma reta, podemos traçar uma paralela a essa reta a uma só.

Geometria de Lobachevski (Hiperbólica):

Por um ponto exterior a uma recta, podemos traçar uma infinidade de paralelas a esta recta.

Geometria de Riemann (Elíptica ou Esférica):

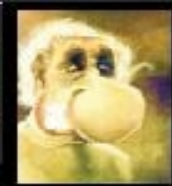
Por um ponto exterior a uma reta , não podemos traçar nenhuma paralela a esta reta.



Cosmologia e Relatividade

Prof. Thaisa Bergmann

De facto, conclui-se que o quinto postulado é o que distingue a Geometria não Euclidiana da Geometria Euclidiana.



Cosmologia e Relatividade

Prof. Thaisa Bergmann

Nenhum Sistema de coordenadas utilizados na Física Matemática é geral o bastante para causar alteração na geometria. Eles são formas de se aproveitarem as simetrias do problema e ajudam, portanto, a simplificar a solução. Na Relatividade Geral precisamos estender este conhecimento para transformações de coordenadas que alterem a geometria do espaço-tempo. Para isto são necessárias uma síntese e uma generalização deste conhecimento matemático em um novo cálculo, o Cálculo Tensorial.



Cosmologia e Relatividade

Prof. Thaisa Bergmann

Em 29 de março de 1873 nasceu Tullio Levi-Civita (morreu em 29/12/1941). Matemático italiano conhecido pelo seu trabalho no cálculo diferencial absoluto com suas aplicações para a teoria da relatividade. Em 1887, ele publicou um famoso paper no qual ele desenvolveu o cálculo de tensores e segue no trabalho de Christoffel, inclusive diferenciação de covariante. Em 1900 ele publicou, juntamente com Ricci, a teoria dos *Methodes de calcul differential absolu et leurs applications* em uma forma que foi usada por Einstein 15 anos depois. O trabalho de Levi-Civita foi de extrema importância na teoria da relatividade, e ele produziu uma série de documentos que tratam do problema do campo gravitacional estático.



Cosmologia e Relatividade

Prof. Thaisa Bergmann

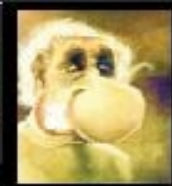
Já no artigo de 1913 Einstein e Grossmann usaram o *cálculo tensorial* criado em 1884 pelo geômetra italiano Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) e subsequentemente desenvolvido com o seu aluno Tullio Levi-Civita (1873-1941) em 1901, o qual era uma reformulação das idéias de Christoffel que permitia considerar objetos do cálculo diferencial em variedades independentemente da escolha de coordenadas.



Cosmologia e Relatividade

Prof. Thaisa Bergmann

A apresentação da teoria geral da relatividade foi iniciada por Einstein juntamente com o matemático alemão Marcel Grossmann (1878-1936) em *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und Theorie der Gravitation* (1913) e concluída com *Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie* (1916). O mais importante elemento dessa teoria é a interpretação geométrica da gravidade: a densidade da matéria numa certa região, e portanto a intensidade do campo gravitacional é proporcional à curvatura do espaço-tempo na métrica pseudo-Riemanniana.

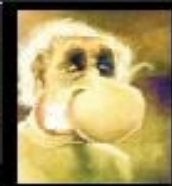


Cosmologia e Relatividade

Prof. Thaisa Bergmann

Equação de Campo de Einstein

$$R_{ik} - \frac{g_{ik}R}{2} + \Lambda g_{ik} = 8\pi \frac{G}{c^4} T_{ik}$$



Cosmologia e Relatividade

Prof. Thaisa Bergmann

Métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2,$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$



Cosmologia e Relatividade

Prof. Thaisa Bergmann

Periélio de Mercúrio

Segundo a TGD deve ocorrer um pequeno desvio em relação ao movimento orbital determinado pelas leis de Kepler e de Newton, de tal forma que o ângulo descrito pelo raio sol-planet entre um periélio e o seguinte difere de uma revolução completa pela quantidade de:

$$\frac{24\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1 - \epsilon^2)}$$