FIS02012 - Cosmologia e Relatividade

Profa. Thaisa Storchi Bergmann

Bibliografia: baseado no capítulo 11 do livro de Barbara Ryden

.3) A Solução da Inflação

Em 1981 Alan Guth propôs a idéia de que a solução dos três problemas: o da planaridade, do horizonte e dos monopolos magnéticos, seria um período de expansão acelerada bem cedo na história do Universo (por exemplo, 10^{-36} s!), ou seja, com $\ddot{a} > 0$.

Partindo da equação da aceleração:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3P)$$

Concluímos que $\ddot{a} > 0$ implica em $P < -\varepsilon / 3$. Como $P = \omega\varepsilon$, em conseqüência $\omega < -1/3$. A forma mais usual da teoria da inflação postula que $\omega = -1 \rightarrow$ o que é idêntico ao da constante cosmológica. Assume-se, então, que o Universo na época era dominado por uma outra constante cosmológica Λ_i. Podemos aplicar, então, o mesmo formalismo que obtivemos para a constante cosmológica no Cap. 4 (Barbara Ryden):

$$P_{\Lambda_i} = -\varepsilon_{\Lambda_i}$$

$$\varepsilon_{\Lambda_i} = \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda_i$$

O que resulta, na época dominada pela inflação em:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda_i}{3} > 0$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{\Lambda_i}{3}$$

Já que outros termos da equação de Friedmann são desprezíveis para esta época.

Ou seja, a constante de Hubble H_i era constante durante a inflação e igual a $\left(\frac{\Lambda_i}{3}\right)^{1/2}$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_i^2 = \frac{\Lambda_i}{3} \rightarrow H_i = \left(\frac{\Lambda_i}{3}\right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt} = H_i \rightarrow \int_{a_i}^{a(t)} \frac{da}{a} = H_i \int_{t_i}^{t} dt \rightarrow \int_{a_i}^{a(t)} \frac{da}{a} = H_i(t - t_i)$$

$$\ln\left(\frac{a(t)}{a_i}\right) = H_i(t - t_i) \Rightarrow a(t) = a_i e^{H_i(t-t_i)}$$

Assumindo que a inflação durou desde t_i (início da inflação) até t_f (fim da inflação), e considerando que a época era dentro da era da radiação para a qual $a(t) \propto t^{1/2}$, então:

$$a(t) = \begin{cases} a_i (t/t_i)^{1/2} & t < t_i \\ a_i e^{H_i(t-t_i)} & t_i < t < t_f \\ a_i e^{H_i(t_f-t_i)} (t/t_f)^{1/2} & t > t_f \end{cases}$$

Então, entre o início e o fim da inflação, o fator de escala cresceu:

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = \frac{a_i e^{H_i(t_f-t_i)}\left(\frac{t_f}{t_f}\right)^{1/2}}{a_i\left(\frac{t_i}{t_i}\right)^{1/2}} = e^{H_i(t_f-t_i)}$$

Em uma das formulações do modelo de inflação, ela teria começado no tempo da GUT (Unificação das forças forte e eletrofraca) em $t_i \approx t_{GUT} \approx 10^{-36}$s , quando o parâmetro de Hubble era $H_i \approx t^{-1}_{GUT} = 10^{36}$ s^{-1} e acabou em $t_f \approx 10^{-34}$ s, ou seja, durou ~100 tempos de Hubble:

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^{H_i(t_f-t_i)} = e^{10^{36}\left(10^{-34}-10^{-36}\right)} \approx e^{100} \approx 10^{43}$$

Ou seja, o Universo aumentou 10^{43} vezes de tamanho em 10^{-34} segundos!

O valor da constante cosmológica no tempo da inflação Λ_i era “infinitamente” maior do que a constante cosmológica que conhecemos atualmente dentro do Modelo Padrão. $\Lambda_i = 3H_i^2$, portanto a densidade de energia correspondente será (eq. 4.65 Barbara Ryden):

$$\varepsilon_{\Lambda_i} = \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda_i = \frac{3c^2 H_i^2}{8\pi G} \sim 10^{105}\ \text{TeV m}^{-3}$$

Enquanto que:

$$\varepsilon_{\Lambda,0} \approx 0{,}7\varepsilon_{c,0} \approx 0{,}004\ \text{TeV m}^{-3}$$

Solução do problema da planaridade

A partir da expressão seguinte da equação de Friedmann:

$$1-\Omega(t) = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2}$$

temos uma expressão para a diferença em relação à planaridade ($\Omega(t) = 1$).

Na época da inflação:

$$a(t) \propto e^{H_i t}$$

$$\left|1-\Omega(t)\right| \propto a^{-2} \propto e^{-2H_i t}$$

A diferença entre $\Omega(t)$ e 1 decresce exponencialmente com o tempo. Para:

$$\left|1-\Omega(t)\right| \propto e^{-2H_i t} \rightarrow \left|1-\Omega(t_f)\right| = e^{-2H_i(t_f-t_i)}\left|1-\Omega(t_i)\right|$$

$$\left|1-\Omega(t_f)\right| = e^{-200}\left|1-\Omega(t_i)\right|$$

Então, mesmo que no início o Universo tivesse uma curvatura tal que $|1 - \Omega(t_i)| > 1$ ou < 1, ele ficou extremamente plano após a inflação, quando o fator de escala cresceu de um fator e^{100}.

Solução do problema do Horizonte

Antes da inflação o Universo era dominado pela radiação. Então, a distância do horizonte quando começou a inflação era:

$$d_{hor}(t_i) = a_i c \int_0^{t_i} \frac{dt}{a_i (t/t_i)^{1/2}} = 2ct_i$$

Quando terminou a inflação, a distância do horizonte era:

$$d_{hor}(t_f) = a_i e^{H_i(t_f-t_i)} c \left(\int_0^{t_i} \frac{dt}{a_i (t/t_i)^{1/2}} + \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a_i e^{H_i(t-t_i)}} \right)$$

Simplificando a_i do numerador com do denominador dentro das integrais e resolvendo-as:

$$\int_0^{t_i} \frac{dt}{(t/t_i)^{1/2}} = 2t_i$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{e^{H_i(t-t_i)}} = \int_{t_i}^{t_f} e^{-H_i(t-t_i)}dt = \left[\frac{e^{-H_i(t-t_i)}}{-H_i}\right]_{t_i}^{t_f} = \frac{e^{-H_i(t_f-t_i)} - e^{-H_i(t_i-t_i)}}{-H_i} = \frac{e^{-100}}{-H_i} + \frac{e^0}{H_i} \approx H_i^{-1}$$

Fazendo:

$$N = H_i(t_f - t_i)$$

$$d_{hor}(t_f) = e^N c\left(2t_i + H_i^{-1}\right) = 3e^N ct_i$$

Para $t_i = 10^{-36}$ s; $H_i \approx 10^{36}$ s^{-1} e $N \approx 100$; logo antes da inflação a distância do horizonte era:

$$d_{hor}(t_i) = 2ct_i = 6 \times 10^{-28} \text{ m}$$

E logo depois da inflação fica:

$$\frac{d_{hor}(t_f)}{d_{hor}(t_i)} = \frac{e^N 3ct_i}{2ct_i} = \frac{3}{2}e^N$$

$$d_{hor}(t_f) = 3 \times e^{100} \times 3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1} \times 10^{-36} \text{ s} \approx 2{,}7 \times 10^{18} \text{ cm} \approx 0{,}8 \text{ pc}$$

Se fôssemos calcular a velocidade correspondente do horizonte:

$$v = \frac{d_{hor}(t_f) - d_{hor}(t_i)}{10^{-34}\text{ s}} = \frac{0{,}8\text{ pc}}{10^{-34}\text{ s}} = 2 \times 10^{50} \text{ m s}^{-1} = 6{,}7 \times 10^{41} c$$

Ou seja, a inflação fez crescer a distância do horizonte de um fator ~ e^{100} . Então, lembrando que a distância do horizonte na superfície de último espalhamento era 0,4 Mpc, se multiplicarmos este valor por e^{100} obtemos ~ 10^{43} Mpc, o que permitiria que toda a superfície de último espalhamento estivesse em contato.