FIS02012 - Cosmologia e Relatividade

Profa. Thaisa Storchi Bergmann

Bibliografia: baseado no capítulo 10 do livro de Barbara Ryden

A Nucleossíntese

Como era o Universo antes de serem emitidos os fótons na superfície de último espalhamento? A superfície de último espalhamento, que corresponde a uma idade de 350 mil anos é o limite que podemos observar o Universo através dos fótons que chegam até nós.

Antes disso, em particular, quando a radiação dominava sobre a matéria ($a \ll a_{rm} = 2.8 \times 10^{-4}$ e $t \ll t_{rm} \approx 47$ mil anos), o fator de escala era proporcional a $t^{1/2}$. Para um Universo plano dominado pela radiação:

$$a(t) = \left(2\sqrt{\Omega_{r,0}}H_0 t\right)^{1/2} = \left(\frac{t}{7{,}64 \times 10^{11} \text{anos}}\right)^{1/2}$$

Deve-se observar que esta expressão vale para $t \ll 47000$ anos e não no limite em que $\varepsilon_r \approx \varepsilon_m$.

Então, na época dominada pela radiação, como $a(t) \propto t^{1/2}$. e como $T \propto a^{-1}$, $T \propto t^{1/2}$. Usando a expressão acima para a(t), chega-se a (fazer como exercício):

$$T(t) \cong 10^{10}\ \text{K} \left(\frac{t}{1\text{s}}\right)^{-1/2}$$

e,

$$kT(t) \cong 1\ \text{MeV} \left(\frac{t}{1\text{s}}\right)^{-1/2}$$

Vimos nos primeiros capítulos que a energia média do fóton emitido por um corpo negro de temperatura T é dada por:

$$E_{med}(t) \approx 2{,}7k\ T(t) \approx 3\ \text{MeV} \left(\frac{t}{1\text{s}}\right)^{-1/2}$$

Ou seja, quando a idade do Universo era da ordem de 1 segundo, a energia média do fóton era ≈ 3 MeV.

Podemos comparar esta energia com as energias de repouso do elétron ($m_e c^2$ = 0,511 MeV) e do próton ($m_p c^2$ =938,3 MeV) para concluir que a era hadrônica (da formação de hádrons, como os prótons) já tinha passado quando a idade era 1 segundo, mas a energia ainda era suficiente para formar léptons (partículas leves, como os elétrons).

Para exemplificar podemos considerar que para formar um par de próton/anti-próton precisamos de uma energia E(t) = 2 x 938,3 MeV ≈ 1876 MeV, o que corresponde a uma idade de:

$$E_{med}(t) = 1876 \text{ MeV} = 3 \text{ MeV} \left(\frac{t}{1s}\right)^{-1/2}$$

$$t(s) = (3/1876)^2 = 2{,}7 \times 10^{-6} s$$

Para formar um par elétron-pósitron precisamos menos energia E(t) = 2 x 0,511 MeV ≈ 1,022 MeV, o que corresponde a uma idade de:

$$t(s) = (3/1{,}022)^2 = 8{,}6 s$$

Física Nuclear e Cosmologia

Consideremos as definições da energia e tempo de Planck:

Se

$$\Delta E \Delta t \leq \hbar$$

Então:

$$\Delta t = t_P = 5{,}391 x 10^{-44}$$

$$E_P = \frac{\hbar}{t_P} = 1{,}22 \times 10^{28} \text{ eV}$$

$$T_P = \frac{E_P}{k} = 1{,}4 \times 10^{32} \text{ K}$$

Podemos considerar que, no início do Universo (tempo de Planck), a energia média dos fótons era igual à Energia de Planck e que o Universo se expandiu e esfriou resultando numa energia média por fóton na época atual de E_{med} = 2,7k x 2,725 K = 6 x 10^{-4} eV. São 31 ordens de magnitude em energia, e durante a expansão, algumas fases foram especialmente cruciais para a evolução do Universo.

Por exemplo, já falamos da era hadrônica e era leptônica. A próxima era importante é a era da nucleossíntese, quando ocorreram as reações nucleares. A ocorrência destas reações depende da energia de ligação dos núcleos. Por exemplo, quando um nêutron e um próton se fundem para formar um núcleo de Deutério, liberam uma energia de ligação de 2,22 MeV:

$$\mathbf{p+n \rightleftharpoons D+2{,}22\ MeV}$$

Agora, se temos 2,22 MeV de energia disponível, poderemos destruir o Deutério (reação inversa da acima). Há liberação de energia na síntese de núcleos cada vez mais pesados até chegar ao ^{56}Fe e ^{62}Ni, a partir dos quais a energia é liberada em processos de fissão nuclear e não mais de fusão. Então, à medida que a temperatura do Universo diminuiu, a energia média por fóton se tornou menor do que 2,22 MeV. Os núcleos de deutério formados não eram mais destruídos, iniciando-se a era da nucleossíntese primordial:

$$E_{med}(t) = 3\ \text{MeV}\left(\frac{t}{1s}\right)^{-1/2} = 2{,}22\ \text{MeV} \rightarrow t = \left(\frac{3}{2{,}22}\right)^{2} \approx 2\ s$$

Como a energia de ligação de D é 2,22 MeV e a energia de ionização do H é 13,6 eV, a razão entre as duas energias dá a razão entre as temperaturas correspondentes à nucleossíntese e à recombinação:

$$\frac{T_{nuc}}{T_{rec}} = \frac{2{,}22\ \text{MeV}}{13{,}6\ \text{eV}} \rightarrow T_{nuc} = T_{rec} \times \frac{2{,}22\times 10^{6}}{13{,}6} = 3740\ \text{K} \times 1{,}6\times 10^{5} \approx 6\times 10^{8}\ \text{K}$$

$$T_{nuc}(t) \cong 10^{10}\ \text{K}\ \left[t_{nuc}(s)\right]^{-1/2} \rightarrow t_{nuc}(s) = \left(\frac{10^{10}\ \text{K}}{6\times 10^{8}\ \text{K}}\right)^{2} \approx 3\ \text{min}$$

Consideremos agora o Universo com uma idade de 0,1s:

$$T(0{,}1\ s) = 10^{10}\ K\ \left(\frac{0{,}1}{1}\right)^{-1/2} \approx 3 \times 10^{10}\ K$$

$$E_{med} = 3\ MeV\ (0{,}1)^{-1/2} = 9{,}5\ MeV$$

A energia era muito maior do que a energia de repouso dos elétrons e pósitrons, que eram então criados aos pares:

$$\gamma + \gamma \rightleftharpoons e^- + e^+$$

Já existiam prótons e assim, os prótons se combinavam com os elétrons formando nêutrons, que se transformavam de novo em prótons através das reações:

$$n + \nu_e \rightleftharpoons p + e^-$$

$$n + e^+ \rightleftharpoons p + (anti)\nu_e$$

Onde n_e é o neutrino do elétron e o (anti) n_e é o seu anti-neutrino.

Enquanto prótons e nêutrons se mantêm em equilíbrio através das reações acima, suas densidades podem ser descritas por distribuições de Maxwell-Boltzmann:

$$n_n = g_n \left(\frac{m_n kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_n c^2}{kT}\right)$$

$$n_p = g_p \left(\frac{m_p kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_p c^2}{kT}\right)$$

Onde os pesos estatísticos são $g_n = g_p = 2$. Fazendo a razão:

$$\frac{n_n}{n_p} = \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{(m_n - m_p)c^2}{kT}\right)$$

Chamando $(m_n - m_p)c^2$ de $Q_n = 1{,}29\ \mathrm{MeV}$ e sendo:

$$\left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{3/2} = 1{,}002 \approx 1$$

Pode-se escrever:

$$\frac{n_n}{n_p} = \exp\left(-\frac{Q_n}{kT}\right)$$

Para:

$$kT \gg Q_n = 1{,}29\ \mathrm{MeV} \rightarrow T \gg 1{,}3 \times 10^{10}\ \mathrm{K} \rightarrow t \ll 1\ \mathrm{s}$$

o número de nêutrons igualava ao de prótons, mas depois disto, o número de nêutrons cai exponencialmente em relação ao de prótons.

Entretanto, a relação acima só vale para o equilíbrio, e este durou pouco porque a interação de transformação $p \rightleftharpoons n$ envolve neutrinos, cuja taxa de interação cai rapidamente com o tempo. Quando a taxa de interação Γ fica igual a H, os neutrinos se “desacoplam” dos nêutrons e prótons e a razão n_n / n_p “congela” numa energia kT_f = 0,8 MeV, com $T_f = 9 \times 10^9$ K:

$$kT = 1\ \mathrm{MeV}\ t^{-1/2} \rightarrow t^{1/2} = \frac{1\ \mathrm{MeV}}{0{,}8} \rightarrow t \approx 2\ \mathrm{s}$$

$$\frac{n_n}{n_p} = \exp\left(-\frac{Q_n}{kT_f}\right) = \exp\left(-\frac{1{,}29}{0{,}8}\right) \approx 0{,}2$$

Os nêutrons decaem rapidamente, com meia vida de 617 s, e teriam logo desaparecido no Universo se não tivessem rapidamente se combinado com os prótons para formar deutério D:

$$p + n \rightleftharpoons D + \gamma(2{,}22\ \mathrm{MeV})$$

O deutério depois vai acabar formando ^{4}He. A partir da razão n/p=0,2, já podemos fazer uma estimativa da fração primordial de ^{4}He no Universo Y_p:

:

$$Y_p = \frac{\rho\left(^4\text{He}\right)}{\rho_{bar}}$$

Supomos para isto que cada 2 nêutrons criados após o congelamento vai acabar sendo incorporado num núcleo de ^{4}He. Como n_n / n_p = 1/5, para cada 2 nêutrons, há 10 prótons. Como eu preciso de 2n + 2p para formar um ^{4}He, a fração máxima será:

$$\left(Y_p\right)_{max} = \frac{2m_n + 2m_p}{2m_n + 10m_p} \approx 0{,}33$$

Para m_p=m_n, o que é uma boa aproximação.Para obter uma expressão genérica em termos de

$f = \frac{n_n}{n_p}$, fazemos:

$$Y_p = \frac{\rho\left(^4\text{He}\right)}{\rho_{bar}} = \frac{2m_n + 2m_n}{2m_n + \frac{2m_n}{f}} = \frac{2f}{(1+f)}$$

O valor observado para a abundância primordial de ^{4}He é $Y_p = 0{,}24$, menor que o valor máximo e isto pode ser entendido pelo fato de que parte dos nêutrons decaem antes de se combinar.

A Síntese do Deutério

Vimos acima que para t ≈ 2 s; n_n / n_p = 0,2, mas ao mesmo tempo:

$$p + n \rightleftharpoons D + \gamma(2{,}22\ \text{MeV})$$

A energia liberada vem de:

$$B_D = \left(m_n + m_p - m_D\right)c^2 = 2{,}22\ \text{MeV}$$

.

O número relativo de prótons, nêutrons e deutérios no processo depende da temperatura T e é dado por uma equação análoga à equação de Saha:

$$\frac{n_D}{n_p n_n} = \frac{g_D}{g_p g_n}\left(\frac{m_D}{m_p m_n}\right)^{3/2}\left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{-3/2}\exp\left(\frac{\left[m_p + m_n - m_D\right]c^2}{kT}\right)$$

Onde: $g_D = 3;\ g_p = g_n = 2;\ m_p \approx m_n \approx m_D / 2$

Substituindo, resulta

$$\frac{n_D}{n_p n_n} = 6\left(\frac{m_n kT}{\pi\hbar^2}\right)^{-3/2}\exp\left(\frac{B_D}{kT}\right)$$

A temperatura T_{nuc} da nucleossíntese do Deutério é definida como aquela em que $n_D = n_n$, ou seja, quando metade dos nêutrons livres foi capturada para formar D.

Na expressão acima, deixamos à esquerda só n_D / n_n e substituímos n_p por:

$$n_p \approx 0{,}8 n_{bar} = 0{,}8\eta n_\gamma = 0{,}8\eta\left[0{,}243\left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3\right]$$

Onde a expressão para n_g é a de um corpo negro de temperatura T. Então:

$$\frac{n_D}{n_n} = 6\times 0{,}8\eta\left[0{,}243\left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3\right]\left(\frac{m_n kT}{\pi\hbar^2}\right)^{-3/2}\exp\left(\frac{B_D}{kT}\right) = \frac{1{,}1664\eta}{\pi^{-3/2}}\left(\frac{kT}{m_n c^2}\right)^{3/2}\exp\left(\frac{B_D}{kT}\right)$$

Para obter Tnuc, fazemos $n_D = n_n$:

$$1 = \frac{n_D}{n_n} = 6{,}5\eta\left(\frac{kT_{nuc}}{m_n c^2}\right)^{3/2}\exp\left(\frac{B_D}{kT_{nuc}}\right)$$

Exercício: Mostrar que $T_{nuc} \approx 0{,}066$ MeV $\approx 7{,}6 \times 10^8$ K, para $m_nc^2 = 939{,}6$ MeV; $B_D = 2{,}22$ MeV e $\eta = 5{,}5 \times 10^{-10}$.

Para $T_{nuc} \approx 0{,}066$ MeV, a idade do Universo era t_{nuc} =(1MeV/0,066MeV) = 230 s (os "famosos" ~ 3 minutos iniciais do Universo). Este tempo não é desprezível frente ao tempo de decaimento do nêutron $\tau_n = 890\ \text{s}$:

$$n_n = n_{n_0} \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right)$$

Então, se no início das reações $\frac{n_{n_0}}{n_p} = 0{,}2$ =1/5, passados 200 segundos:

$$\frac{n_n}{n_p} \approx \frac{1}{5}\frac{\exp(-200/890)}{1-\exp(-200/890)} \approx 0{,}15$$

Onde multiplicamos o no. inicial de nêutrons pela fração que decaiu e o de prótons pela fração de nêutrons que se transformou em prótons.

Esta nova razão diminui o número máximo de núcleos de ^{4}He, e portanto Y_p. Lembrando que

$f = \frac{n_n}{n_p}$:

$$Y_{p,max} = \frac{2f}{(1+f)} = \frac{2n_n}{n_p\left(1+\frac{n_n}{n_p}\right)} = \frac{2n_n}{n_p + n_n}$$

Se f = 0,20 → Y_{max} = 0,33 (sem considerar o decaimento dos nêutrons)

Se f = 0,15 → Y_{max} = 0,26, valor mais próximo do observado de 0,24.

Formação de ^{4}He

O deutério, uma vez formado, acaba entrando em outras reações que vão resultar na produção de ^{4}He através de:

$$D + p \rightleftharpoons {}^3He + \gamma$$
$$D + n \rightleftharpoons {}^3H + \gamma$$
$$D + D \rightleftharpoons {}^4He + \gamma$$
$$D + D \rightleftharpoons {}^3H + p$$
$$D + D \rightleftharpoons {}^3He + n$$
$${}^3H + p \rightleftharpoons {}^4He + \gamma$$
$${}^3He + n \rightleftharpoons {}^4He + \gamma$$
$${}^3H + D \rightleftharpoons {}^4He + n$$
$${}^3He + D \rightleftharpoons {}^4He + p$$

O ^{4}He tem uma energia de ligação grande, e não há núcleo estável com A = 5, portanto não há reações ^{4}He + p ou ^{4}He + n. Só são formadas pequenas quantidades de ^{6}Li e ^{7}Li:

$${}^4He + D \rightleftharpoons {}^6Li + \gamma$$
$${}^4He + {}^3H \rightleftharpoons {}^7Li + \gamma$$

E, igualmente, pequenas quantidades de ^{7}Be:

$${}^4He + {}^3He \rightleftharpoons {}^7Be + \gamma$$

Também não há núcleo estável com A = 8, e o resultado é que a nucleossíntese começa com D e essencialmente acaba em ^{4}He, sendo que os detalhes dependem de seções de choque que são funções da temperatura T.

Quando T ~ 4×10^8 K, para t ~ 10min, a nucleossíntese essencialmente termina, e abundâncias primordiais de D, ^{3}He, ^{4}He, ^{6}Li e ^{7}Li dependem de parâmetros físicos, e, em particular, do valor de $\boldsymbol{\eta}$, que pode ser obtido se tivermos observações de abundâncias primordiais, em especial a de D, cuja abundância depende fortemente de $\boldsymbol{\eta}$. Uma dificuldade observacional com relação ao deutério D é que ele é destruído nas estrelas, e assim precisamos observar o meio inter-galáctico para obter sua abundância primordial
\

Valores obtidos a partir do meio intergaláctico (medindo absorção produzida na da luz de Quasares distantes pelo meio intergaláctico que se interpõe):

$$\frac{D}{H} = (3 \pm 0{,}4) \times 10^{-5} \rightarrow \eta = (5{,}5 \pm 0{,}5) \times 10^{-10}$$

Assimetria Bárion/Anti-bárion

Há duas questões fundamentais não respondidas no modelo do Big Bang quente e na teoria de formação das partíuculas no Universo:

1) Por que η é tão pequeno?
2) Por que o Universo "preferiu" bárions a anti-bárions?

Para discutir esta questão, devemos considerar que os prótons e nêutrons são formados por quarks:

Próton: 2 quarks up e 1 quark down;
Nêutron: 1 quark up e 2 quarks down.

No Universo primordial, quando kT ≥ 150 MeV, os quarks não estavam confinados. Havia uma "sopa de quarks", os quais eram produzidos e aniquilados:

$$\gamma + \gamma \rightleftharpoons q + \bar{q}$$

Deve ter ocorrido nesta época uma pequena assimetria entre quarks e anti-quarks:

$$\delta_q \equiv \frac{n_q - n_q}{n_q + n_q} \ll 1$$

À medida que o Universo se expandiu e esfriou, não se produziram mais pares quarks/anti-quarks. Os que existiam se aniquilaram em fótons, mas por causa do pequeno excesso:

$$\delta_q = \frac{n_q}{n_\gamma}$$

restaram estes quarks para formar a matéria bariônica que hoje observamos.

Para exemplificar a dimensão da assimetria: considerando que $1/\eta \approx 2 \times 10^9$, concluímos que haviam (1×10^9) quarks para ($1 \times 10^9 - 3$) anti-quarks. A cada bilhão de aniquilações entre quarks e anti-quarks, que resultaram em 2 bilhões de fótons, sobraram 3 quarks. Estes 3 quarks depois se juntaram para formar um bárion em $kT \sim 150$ MeV, resultando em $\eta \approx 5 \times 10^{-10}$ (razão entre no. de bárions e no. de fótons). É uma assimetria bem pequena, mas fundamental para criar o Universo como o conhecemos!