

**FIS02012 - Cosmologia e Relatividade**  
**Profa. Thaisa Storchi Bergmann**

Bibliografia: baseado no capítulo 10 do livro de Barbara Ryden

## A Nucleossíntese

Como era o Universo antes de serem emitidos os fótons na superfície de último espalhamento? A superfície de último espalhamento, que corresponde a uma idade de 350 mil anos é o limite que podemos observar o Universo através dos fótons que chegam até nós.

Antes disso, em particular, quando a radiação dominava sobre a matéria ( $a \ll a_{\text{rm}} = 2.8 \times 10^{-4}$  e  $t \ll t_{\text{rm}} \approx 47$  mil anos), o fator de escala era proporcional a  $t^{1/2}$ . Para um Universo plano dominado pela radiação:

$$a(t) = \left( 2\sqrt{\Omega_{r,0} H_0 t} \right)^{1/2} = \left( \frac{t}{7,64 \times 10^{11} \text{anos}} \right)^{1/2}$$

Deve-se observar que esta expressão vale para  $t \ll 47000$  anos e não no limite em que  $\epsilon_r \approx \epsilon_m$ .

Então, na época dominada pela radiação, como  $a(t) \propto t^{1/2}$  e como  $T \propto a^{-1}$ ,  $T \propto t^{-1/2}$ . Usando a expressão acima para  $a(t)$ , chega-se a (fazer como exercício):

$$T(t) \cong 10^{10} \text{ K} \left( \frac{t}{1\text{s}} \right)^{-1/2}$$

e,

$$kT(t) \cong 1 \text{ MeV} \left( \frac{t}{1\text{s}} \right)^{-1/2}$$

Vimos nos primeiros capítulos que a energia média do fóton emitido por um corpo negro de temperatura  $T$  é dada por:

$$E_{\text{med}}(t) \approx 2,7k T(t) \approx 3 \text{ MeV} \left( \frac{t}{1\text{s}} \right)^{-1/2}$$

Ou seja, quando a idade do Universo era da ordem de 1 segundo, a energia média do fóton era  $\approx 3$  MeV.

Podemos comparar esta energia com as energias de repouso do elétron ( $m_e c^2 = 0,511$  MeV) e do próton ( $m_p c^2 = 938,3$  MeV) para concluir que a era hadrônica (da formação de hádrons, como os prótons) já tinha passado quando a idade era 1 segundo, mas a energia ainda era suficiente para formar léptons (partículas leves, como os elétrons).

Para exemplificar podemos considerar que para formar um par de próton/anti-próton precisamos de uma energia  $E(t) = 2 \times 938,3$  MeV  $\approx 1876$  MeV, o que corresponde a uma idade de:

$$E_{\text{med}}(t) = 1876 \text{ MeV} = 3 \text{ MeV} \left( \frac{t}{1\text{s}} \right)^{-1/2}$$

$$t(\text{s}) = (3/1876)^2 = 2,7 \times 10^{-6} \text{s}$$

Para formar um par elétron-pósitron precisamos menos energia  $E(t) = 2 \times 0,511$  MeV  $\approx 1,022$  MeV, o que corresponde a uma idade de:

$$t(\text{s}) = (3/1,022)^2 = 8,6 \text{s}$$

## Física Nuclear e Cosmologia

Consideremos as definições da energia e tempo de Planck:

$$\Delta E \Delta t \leq \hbar$$

Se

$$\Delta t = t_p = 5,391 \times 10^{-44}$$

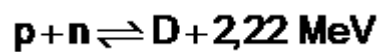
Então:

$$E_p = \frac{\hbar}{t_p} = 1,22 \times 10^{28} \text{ eV}$$

$$T_p = \frac{E_p}{k} = 1,4 \times 10^{32} \text{ K}$$

Podemos considerar que, no início do Universo (tempo de Planck), a energia média dos fótons era igual à Energia de Planck e que o Universo se expandiu e esfriou resultando numa energia média por fóton na época atual de  $E_{\text{med}} = 2,7k \times 2,725 \text{ K} = 6 \times 10^{-4} \text{ eV}$ . São 31 ordens de magnitude em energia, e durante a expansão, algumas fases foram especialmente cruciais para a evolução do Universo.

Por exemplo, já falamos da era hadrônica e era leptônica. A próxima era importante é a era da nucleossíntese, quando ocorreram as reações nucleares. A ocorrência destas reações depende da energia de ligação dos núcleos. Por exemplo, quando um nêutron e um próton se fundem para formar um núcleo de Deutério, liberam uma energia de ligação de 2,22 MeV:



Agora, se temos 2,22 MeV de energia disponível, poderemos destruir o Deutério (reação inversa da acima). Há liberação de energia na síntese de núcleos cada vez mais pesados até chegar ao  $^{56}\text{Fe}$  e  $^{62}\text{Ni}$ , a partir dos quais a energia é liberada em processos de fissão nuclear e não mais de fusão. Então, à medida que a temperatura do Universo diminuiu, a energia média por fóton se tornou menor do que 2,22 MeV. Os núcleos de deutério formados não eram mais destruídos, iniciando-se a era da nucleossíntese primordial:

$$E_{\text{med}}(t) = 3 \text{ MeV} \left( \frac{t}{1\text{s}} \right)^{-1/2} = 2,22 \text{ MeV} \rightarrow t = \left( \frac{3}{2,22} \right)^2 \approx 2 \text{ s}$$

Como a energia de ligação de D é 2,22 MeV e a energia de ionização do H é 13,6 eV, a razão entre as duas energias dá a razão entre as temperaturas correspondentes à nucleossíntese e à recombinação:

$$\frac{T_{\text{NMC}}}{T_{\text{rec}}} = \frac{2,22 \text{ MeV}}{13,6 \text{ eV}} \rightarrow T_{\text{NMC}} = T_{\text{rec}} \times \frac{2,22 \times 10^6}{13,6} = 3740 \text{ K} \times 1,6 \times 10^5 \approx 6 \times 10^8 \text{ K}$$

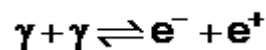
$$T_{\text{NMC}}(t) \cong 10^{10} \text{ K} [t_{\text{NMC}}(\text{s})]^{-1/2} \rightarrow t_{\text{NMC}}(\text{s}) = \left( \frac{10^{10} \text{ K}}{6 \times 10^8 \text{ K}} \right)^2 \approx 3 \text{ min}$$

Consideremos agora o Universo com uma idade de 0,1s:

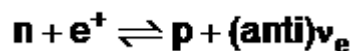
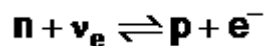
$$T(0,1 \text{ s}) = 10^{10} \text{ K} \left( \frac{0,1}{1} \right)^{-1/2} \approx 3 \times 10^{10} \text{ K}$$

$$E_{\text{med}} = 3 \text{ MeV} (0,1)^{-1/2} = 9,5 \text{ MeV}$$

A energia era muito maior do que a energia de repouso dos elétrons e pósitrons, que eram então criados aos pares:



Já existiam prótons e assim, os prótons se combinavam com os elétrons formando nêutrons, que se transformavam de novo em prótons através das reações:



Onde  $n_e$  é o neutrino do elétron e o (anti)  $n_e$  é o seu anti-neutrino.

Enquanto prótons e nêutrons se mantêm em equilíbrio através das reações acima, suas densidades podem ser descritas por distribuições de Maxwell-Boltzmann:

$$n_n = g_n \left( \frac{m_n kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{m_n c^2}{kT} \right)$$

$$n_p = g_p \left( \frac{m_p kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{m_p c^2}{kT} \right)$$

Onde os pesos estatísticos são  $g_n = g_p = 2$ . Fazendo a razão:

$$\frac{n_n}{n_p} = \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{(m_n - m_p)c^2}{kT} \right)$$

Chamando  $(m_n - m_p)c^2$  de  $Q_n = 1,29 \text{ MeV}$  e sendo:

$$\left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{3/2} = 1,002 \approx 1$$

Pode-se escrever:

$$\frac{n_n}{n_p} = \exp\left(-\frac{Q_n}{kT}\right)$$

Para:

$$kT \gg Q_n = 1,29 \text{ MeV} \rightarrow T \gg 1,3 \times 10^{10} \text{ K} \rightarrow t \ll 1 \text{ s}$$

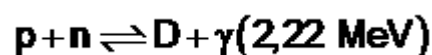
o número de nêutrons igualava ao de prótons, mas depois disto, o número de nêutrons cai exponencialmente em relação ao de prótons.

Entretanto, a relação acima só vale para o equilíbrio, e este durou pouco porque a interação de transformação  $p \rightleftharpoons n$  envolve neutrinos, cuja taxa de interação cai rapidamente com o tempo. Quando a taxa de interação  $\Gamma$  fica igual a  $H$ , os neutrinos se “desacoplam” dos nêutrons e prótons e a razão  $n_n / n_p$  “congela” numa energia  $kT_f = 0,8 \text{ MeV}$ , com  $T_f = 9 \times 10^9 \text{ K}$ :

$$kT = 1 \text{ MeV } t^{-1/2} \rightarrow t^{1/2} = \frac{1 \text{ MeV}}{0,8} \rightarrow t \approx 2 \text{ s}$$

$$\frac{n_n}{n_p} = \exp\left(-\frac{Q_n}{kT_f}\right) = \exp\left(-\frac{1,29}{0,8}\right) \approx 0,2$$

Os nêutrons decaem rapidamente, com meia vida de 617 s, e teriam logo desaparecido no Universo se não tivessem rapidamente se combinado com os prótons para formar deutério D:



O deutério depois vai acabar formando  ${}^4\text{He}$ . A partir da razão  $n/p=0,2$ , já podemos fazer uma estimativa da fração primordial de  ${}^4\text{He}$  no Universo  $Y_p$ :

:

$$Y_p = \frac{\rho({}^4\text{He})}{\rho_{\text{bar}}}$$

Supomos para isto que cada 2 nêutrons criados após o congelamento vai acabar sendo incorporado num núcleo de  ${}^4\text{He}$ . Como  $n_n / n_p = 1/5$ , para cada 2 nêutrons, há 10 prótons. Como eu preciso de  $2n + 2p$  para formar um  ${}^4\text{He}$ , a fração máxima será:

$$(Y_p)_{\text{max}} = \frac{2m_n + 2m_p}{2m_n + 10m_p} \approx 0,33$$

Para  $m_p=m_n$ , o que é uma boa aproximação. Para obter uma expressão genérica em termos de

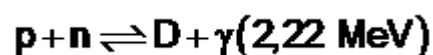
$f = \frac{n_n}{n_p}$ , fazemos:

$$Y_p = \frac{\rho({}^4\text{He})}{\rho_{\text{bar}}} = \frac{2m_n + 2m_n}{2m_n + \frac{2m_n}{f}} = \frac{2f}{(1+f)}$$

O valor observado para a abundância primordial de  ${}^4\text{He}$  é  $Y_p = 0,24$ , menor que o valor máximo e isto pode ser entendido pelo fato de que parte dos nêutrons decaem antes de se combinar.

## A Síntese do Deutério

Vimos acima que para  $t \approx 2$  s;  $n_n / n_p = 0,2$ , mas ao mesmo tempo:



A energia liberada vem de:

$$B_D = (m_n + m_p - m_D)c^2 = 2,22 \text{ MeV}$$

O número relativo de prótons, nêutrons e deutérios no processo depende da temperatura T e é dado por uma equação análoga à equação de Saha:

$$\frac{n_D}{n_p n_n} = \frac{g_D}{g_p g_n} \left( \frac{m_D}{m_p m_n} \right)^{3/2} \left( \frac{kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{-3/2} \exp\left( \frac{[m_p + m_n - m_D]c^2}{kT} \right)$$

Onde:  $g_D = 3$ ,  $g_p = g_n = 2$ ,  $m_p \approx m_n \approx m_D / 2$

Substituindo, resulta

$$\frac{n_D}{n_p n_n} = 6 \left( \frac{m_p kT}{\pi\hbar^2} \right)^{-3/2} \exp\left( \frac{B_D}{kT} \right)$$

A temperatura  $T_{nuc}$  da nucleossíntese do Deutério é definida como aquela em que  $n_D = n_n$ , ou seja, quando metade dos nêutrons livres foi capturada para formar D.

Na expressão acima, deixamos à esquerda só  $n_D / n_n$  e substituímos  $n_p$  por:

$$n_p \approx 0,8n_{bar} = 0,8\eta n_\gamma = 0,8\eta \left[ 0,243 \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \right]$$

Onde a expressão para  $n_\gamma$  é a de um corpo negro de temperatura T. Então:

$$\frac{n_D}{n_n} = 6 \times 0,8\eta \left[ 0,243 \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \right] \left( \frac{m_p kT}{\pi\hbar^2} \right)^{-3/2} \exp\left( \frac{B_D}{kT} \right) = \frac{1,1664\eta}{\pi^{-3/2}} \left( \frac{kT}{m_p c^2} \right)^{3/2} \exp\left( \frac{B_D}{kT} \right)$$

Para obter  $T_{nuc}$ , fazemos  $n_D = n_n$ :

$$1 = \frac{n_D}{n_n} = 6,5\eta \left( \frac{kT_{nuc}}{m_p c^2} \right)^{3/2} \exp\left( \frac{B_D}{kT_{nuc}} \right)$$

Exercício: Mostrar que  $T_{\text{nuc}} \approx 0,066 \text{ MeV} \approx 7,6 \times 10^8 \text{ K}$ , para  $m_n c^2 = 939,6 \text{ MeV}$ ;  $B_D = 2,22 \text{ MeV}$  e  $\eta = 5,5 \times 10^{-10}$ .

Para  $T_{\text{nuc}} \approx 0,066 \text{ MeV}$ , a idade do Universo era  $t_{\text{nuc}} = (1\text{MeV}/0,066\text{MeV}) = 230 \text{ s}$  (os “famosos” ~ 3 minutos iniciais do Universo). Este tempo não é desprezível frente ao tempo de decaimento do nêutron  $\tau_n = 890 \text{ s}$ :

$$n_n = n_{n_0} \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right)$$

Então, se no início das reações  $\frac{n_{n_0}}{n_p} = 0,2 = 1/5$ , passados 200 segundos:

$$\frac{n_n}{n_p} \approx \frac{1 \exp(-200/890)}{51 - \exp(-200/890)} \approx 0,15$$

Onde multiplicamos o no. inicial de nêutrons pela fração que decaiu e o de prótons pela fração de nêutrons que se transformou em prótons.

Esta nova razão diminui o número máximo de núcleos de  ${}^4\text{He}$ , e portanto  $Y_p$ . Lembrando que

$$f = \frac{n_n}{n_p} :$$

$$Y_{p,\text{max}} = \frac{2f}{(1+f)} = \frac{2n_n}{n_p \left(1 + \frac{n_n}{n_p}\right)} = \frac{2n_n}{n_p + n_n}$$

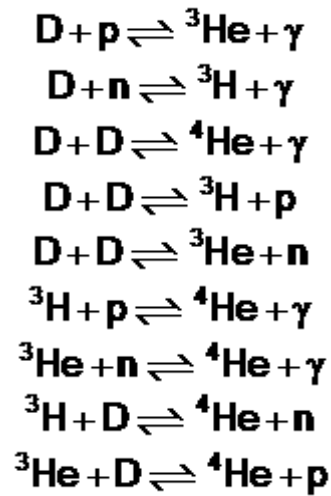
Se  $f = 0,20 \rightarrow Y_{\text{max}} = 0,33$  (sem considerar o decaimento dos nêutrons)

Se  $f = 0,15 \rightarrow Y_{\text{max}} = 0,26$ , valor mais próximo do observado de 0,24.

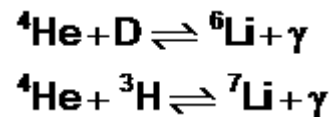
Formação de  ${}^4\text{He}$



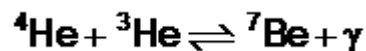
O deutério, uma vez formado, acaba entrando em outras reações que vão resultar na produção de  ${}^4\text{He}$  através de:



O  ${}^4\text{He}$  tem uma energia de ligação grande, e não há núcleo estável com  $A = 5$ , portanto não há reações  ${}^4\text{He} + \text{p}$  ou  ${}^4\text{He} + \text{n}$ . Só são formadas pequenas quantidades de  ${}^6\text{Li}$  e  ${}^7\text{Li}$ :



E, igualmente, pequenas quantidades de  ${}^7\text{Be}$ :



Também não há núcleo estável com  $A = 8$ , e o resultado é que a nucleossíntese começa com D e essencialmente acaba em  ${}^4\text{He}$ , sendo que os detalhes dependem de seções de choque que são funções da temperatura  $T$ .

Quando  $T \sim 4 \times 10^8$  K, para  $t \sim 10$  min, a nucleossíntese essencialmente termina, e abundâncias primordiais de D,  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^6\text{Li}$  e  ${}^7\text{Li}$  dependem de parâmetros físicos, e, em particular, do valor de  $\eta$ , que pode ser obtido se tivermos observações de abundâncias primordiais, em especial a de D, cuja abundância depende fortemente de  $\eta$ . Uma dificuldade observacional com relação ao deutério D é que ele é destruído nas estrelas, e assim precisamos observar o meio inter-galáctico para obter sua abundância primordial

Valores obtidos a partir do meio intergaláctico (medindo absorção produzida na da luz de Quasares distantes pelo meio intergaláctico que se interpõe):

$$\frac{D}{H} = (3 \pm 0,4) \times 10^{-5} \rightarrow \eta = (5,5 \pm 0,5) \times 10^{-10}$$

## Assimetria Bárion/Anti-bárion

Há duas questões fundamentais não respondidas no modelo do Big Bang quente e na teoria de formação das partículas no Universo:

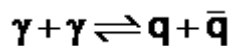
- 1) Por que  $\eta$  é tão pequeno?
- 2) Por que o Universo “preferiu” bárions a anti-bárions?

Para discutir esta questão, devemos considerar que os prótons e nêutrons são formados por quarks:

Próton: 2 quarks up e 1 quark down;

Nêutron: 1 quark up e 2 quarks down.

No Universo primordial, quando  $kT \geq 150$  MeV, os quarks não estavam confinados. Havia uma “sopa de quarks”, os quais eram produzidos e aniquilados:



Deve ter ocorrido nesta época uma pequena assimetria entre quarks e anti-quarks:

$$\delta_q \equiv \frac{n_q - n_{\bar{q}}}{n_q + n_{\bar{q}}} \ll 1$$

À medida que o Universo se expandiu e esfriou, não se produziram mais pares quarks/anti-quarks. Os que existiam se aniquilaram em fótons, mas por causa do pequeno excesso:

$$\delta_q = \frac{n_q}{n_\gamma}$$

restaram estes quarks para formar a matéria bariônica que hoje observamos.

Para exemplificar a dimensão da assimetria: considerando que  $1/\eta \approx 2 \times 10^9$ , concluímos que haviam  $(1 \times 10^9)$  quarks para  $(1 \times 10^9 - 3)$  anti-quarks. A cada bilhão de aniquilações entre quarks e anti-quarks, que resultaram em 2 bilhões de fótons, sobraram 3 quarks. Estes 3 quarks depois se juntaram para formar um bárion em  $kT \sim 150 \text{ MeV}$ , resultando em  $\eta \approx 5 \times 10^{-10}$  (razão entre no. de bárions e no. de fótons). É uma assimetria bem pequena, mas fundamental para criar o Universo como o conhecemos!