Lista II – Plasmas 2009/2.

1. Derivamos as equação da aproximação de fluídos em um regime unidimensional. Mostrem que o formato do termo de pressão permanece o mesmo em três dimensões: $\frac{1}{nm}\nabla(n\kappa_b T)$, onde devemos supor isotropia $\overline{\delta v_i \delta v_k}=0$, $i\neq j$; $\overline{\delta v_j \delta v_j}=\kappa_b T/m$, *j=x,y,z*.

2. Examinemos o caso de propagação de ondas puramente elétricas em plasmas frios de elétrons e íons, *sendo ambas as espécies de partículas móveis*. Obtenham a relação de dispersão para ondas lineares.

3. Reexaminem o problema (1), agora incorporando uma temperatura constante (hipótese isotérmica) nos fluídos eletrônicos e iônicos. Como fica a relação de dispersão?

4. Examinem finalmente o caso adiabático (uma situação mais realística em flutuações de alta-freqüência) em uma dimensão, supondo elétrons móveis e íons fixos. Antes de mais nada usem a equação de energia do gás ideal $U=nV\kappa_B T$ em conjunção com a fórmula da pressão $p=n\kappa_B T$ e com a hipótese adiabática *dU = - p dV* (*dQ=0* para um processo adiabático), para mostrar que $p/n^3=p_0/n_0^3=\kappa_B T_0/n_0^2$, onde o subíndice ``*0*'' designa equilíbrio. A seguir, deduzam forma da relação de dispersão em termos da temperatura de equilíbrio.

5. Vamos agora examinar a propagação de ondas ``transversais'' planas em um plasma frio de íons fixos e elétrons móveis. Supostamente o campo elétrico está polarizado na direção z e a onda se propaga na direção x. Examinem com cuidado a relação de dispersão para mostrar que

$$\omega^2=\omega_p^2+k^2c^2 \quad .$$

6. Voltemos ao caso da quebra de ondas em plasmas. Suponham condições de contorno alternativas, mas que produzam o mesmo tipo de Física. Objetivamente suponham que agora todas as quantidades dependam apenas da coordenada *x*: $n=n(x), v=v(x), \varphi=\varphi(x)$. Suponham, no entando, que agora $v(x\to\infty)\to -V_\phi;\ V_\phi>0$. Ou seja, no fundo estamos no referencial em que a onda é estacionária, e estamos ``vendo'' o plasma fluir em nossa direção com velocidade $-V_\phi$. Obtenham, a partir destas considerações, o mesmo tipo de equação diferencial para o potencial $\varphi=\varphi(x)$.

7. A densidade de elétrons sempre oscila entre um valor máximo e um mínimo. Em aula mostramos que ao nos aproximarmos da situação crítica da quebra de ondas, o valor máximo tende para $n\to\infty$. Qual o valor mínimo para esta mesma situação?

8. Qual o valor máximo do campo elétrico (dimensional) para a situação crítica de quebra de onda?

9. Vamos resolver o problema de uma bola de plasma eletrônico confinada por uma força externa que advém de um potencial

$$U_{ext}(\vec{r})=\frac{\kappa}{2}(x^2+y^2+z^2)\equiv\frac{\kappa}{2}r^2 \quad , \qquad (1)$$

através de $\vec{F}_{ext}=-\nabla U_{ext}(\vec{r})$.

O plasma eletrônico é frio e deve ser portanto tratado como um fluído frio tri-dimensional governado pelas seguintes equações de movimento:

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla\cdot(n\vec{v})=0, \quad \text{(eq. Continuidade)} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}=\frac{\vec{F}_{total}}{m}=\frac{\vec{F}_{ext}}{m}+\frac{q}{m}\vec{E}(\vec{r},t) \quad \text{(eq. “Força”).} \tag{3}$$

Estas equações são simples extensões das equações unidimensionais que vimos em aula – podem omitir sua derivação. Na equação (3) $\vec{E}(\vec{r},t)$ é o campo elétrico em um ponto e instante quaisquer dentro do plasma eletrônico; *m* é a massa do elétron e *q* sua carga.

Agora suponhamos simetria esférica para uma bola de plasma centrada em ***r**=0* e também densidade homogênea: $n(\vec{r},t)=n(r,t)=n(t)$. Suponham também que o vetor velocidade tenha apenas uma única componente, radial, e que dependa do tempo e sómente do módulo do raio vetor: $\vec{v}(\vec{r},t)=v(r,t)\hat{r}$, onde $\hat{r}$ denota o versor na direção radial. Nestas condições valem as relações (que também não precisam ser demonstradas):

$$\nabla\cdot(n\vec{v})\rightarrow\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 n v), \tag{4}$$

$$\nabla\rightarrow\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}\Rightarrow\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\rightarrow\hat{r}\,v\frac{\partial v}{\partial r} \quad . \tag{5}$$

Suponham também que a bola homogênea de plasma tenha um raio $r_p(t)$, que pode muito bem ser uma função do tempo, o que implica em $n(t)=\dfrac{N}{\frac{4}{3}\pi r_p(t)^3}$, onde N é o número, constante, de elétrons na bola.

(i) Da relação (2), mostrem que

$$v(r,t)=\frac{\dot{r}_p(t)}{r_p(t)}r \quad . \tag{6}$$

(ii) Com isto, para que a relação (3) seja cumprida idênticamente, mostrem finalmente que

$$\ddot{r}_p(t)=-\frac{\kappa}{m}r_p(t)+\frac{K}{r_p^2(t)} \quad ; \tag{7}$$

calculem o campo elétrico em um ponto arbitrário de forma adequada! A equação (7) é chamada de equação de envelope para o plasma eletrônico, e K é a assim chamada “perveância” da bola,

$$K\equiv\frac{N q^2}{4\epsilon_0\pi m} \tag{8}$$

(iii) Encontrem o raio de equilíbrio r_{eq} da bola e calculem a freqüência ω de oscilação do envelope em torno deste equilíbrio. Mostrem que se esta freqüência for escrita em termos das quantidades presentes no lado direito de (8) e em termos r_{eq}, a menos de constantes numéricas de ordem unitária a expressão para freqüência assume uma forma do tipo

$$\omega^2 \sim \frac{N q^2}{\epsilon_0 m r_{eq}^3} \sim \frac{n q^2}{\epsilon_0 m} \quad , \tag{10}$$

onde $n \sim N / r_{eq}^3$, que é similar à freqüência de plasma obtida em aula.