MECÂNICA CLÁSSICA-PROBLEMAS
TEORIA DE HAMILTON-JACOBI E TEORIAS DE PERTURBAÇÃO

1) Resolvam o problema da partícula livre em uma dimensão espacial x, usando exclusivamente a técnica de Hamilton-Jacobi. Ou seja, descubram qual a geratriz que anula o Hamiltoniano e encontrem a solução a partir daí.

2) Resolvam o problema unidimensional (x) de uma partícula acelerada por um campo uniforme, com potencial portanto proporcional a x:

$$H = \frac{p^2}{2} + \kappa x$$

(κ constante). Usem novamente apenas a técnica de Hamilton-Jacobi. Ou seja, descubram qual a geratriz que anula o Hamiltoniano e encontrem a solução a partir daí.

3) Considerem um Hamiltoniano em que o potencial cresce linearmente tanto no espaço quanto no tempo:

$$H = \frac{p^2}{2} + xt.$$

Encontrem a solução para o problema através da técnica de Hamilton-Jacobi, supondo uma geratriz $S(P, x, t)$ que cancele o Hamiltoniano e que tentativamente seja escrita na forma $S = a(P, t)x + b(P, t)$. A tarefa é a descobrir quais as formas da funções $a(t)$ e $b(t)$. Comparem o resultado com a integração direta do sistema via equações de Hamilton. P é constante de integração e denota o novo momentum, $p = \partial S/\partial x$ e $X = \partial S/\partial P$.

4) Calculem, via teoria de Ângulo-Ação, a freqüência de movimento de uma partícula submetida a um potencial linear atrativo $\kappa|x|$:

$$H = \frac{p^2}{2} + \kappa|x|.$$

5) Considerem o problema do oscilador harmônico com uma freqüência lentamente variável no tempo.

$$H = \frac{p^2}{2} + \omega^2(t)\frac{q^2}{2}.$$

A escala de tempo de variação da freqüência é suposta ser muito mais longa do que escala de tempo de vibração do oscilador, de forma que uma teoria adiabática possa ser usada. (i) Resolvam o problema na forma convencional estudada em aula. (ii) Resolvam da seguinte forma alternativa. Primeiro definam a energia do sistema

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \omega^2(t)\frac{x^2}{2}.$$

A seguir mostrem que

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}\ddot{x} + \omega^2 x\dot{x} + \omega x^2\frac{d\omega}{dt}.$$

Finalmente calculem a média $\overline{dE/dt}$ sobre um ciclo de movimento para concluirem que em média,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{E}{\omega}\frac{d\omega}{dt}.$$

Daí identifiquem E/ω como um invariante (adiabático) comparando-o com o obtido no ítem anterior. Notem que entre tantas outras coisas, vocês necessitarão da média $\overline{x^2}$.

6) Considerem uma partícula não relativística movimentando-se em uma dimensão x e submetida a um campo elétrico dado por $\mathbf{E} = E(x)\sin(\omega t)\hat{\mathbf{x}}$. Partindo diretamente da equação de movimento

$$m\ddot{\mathbf{x}} = q\mathbf{E}, \tag{3.1}$$

escrevam a solução na forma $x = x_{lento} + x_{rapido}$, supondo que x_{rapido} descreva pequenas oscilações em torno do "centro de oscilação x_{lento}, com $x_{rapido} \ll x_{lento}$.

Escrevam $E(x) \approx E(x_{lento}) + \frac{dE}{dx}x_{rapido}$ e mostrem que

$$\ddot{x}_{lento} = -\frac{1}{4m\omega^2}\frac{dE^2(x_{lento})}{dx_{lento}}, \tag{3.2}$$

se desprezarmos correções de mais alta ordem a x_{rapido}.

Resolvam o mesmo problema com as táticas desenvolvidas em aula para provar que os resultados são equivalentes.

7) Resolvam o problema do pêndulo, estudado em aula, mas agora com movimento de alta freqüência imposto ao eixo horizontal [$h(t)$ ao longo de x].

8) Resolvam os problemas presentes nas notas de aula.

9) Considerem a caixa de potencial e examinem o que acontece com uma órbita genérica à medida que o lado L reduz ou aumenta. Estejam atentos para problemas que envolvam este tipo de configuração.

10) Considerem o Hamiltoniano de uma partícula sujeita a um campo magnético que varie com a coordenada z, digamos. (i) Trabalhando com um sistema de unidades onde $q = c = m = 1$ (q denota carga), mostrem antes de mais nada que um potencial vetor do tipo $\mathbf{A}(x,z) = xB_o(z)\hat{\mathbf{y}}$ gera um campo magnético com componente z dada por $B_o(z)$. (ii) A seguir invoquem os resultados das primeiras listas e mostrem que o Hamiltoniano é escrito como

$$H = \sqrt{1 + p_z^2 + p_x^2 + (p_y^2 - A_y(x,z))^2}.$$

(iii) Finalmente tomem $p_y = \text{constante} = 0$ para concluirem que

$$H = \sqrt{1 + p_z^2 + p_x^2 + x^2B_o^2(z)}.$$

A idéia agora é a de supor lenta dependência de B_o em z. Se z fosse o tempo, poderíamos usar a teoria adiabática. Tentemos então reconstruir a teoria de uma forma tal que z passe a desempenhar o papel de tempo.

(iv) Provem que se definirmos o Hamiltoniano

$$\mathcal{H} \equiv -p_z = -\sqrt{H^2 - 1 - [p_x^2 + x^2 B_o^2(z)]},$$

as equações de movimento podem ser obtidas na forma

$$dp_x/dz = -\partial\mathcal{H}/\partial x,$$

$$dx/dz = \partial\mathcal{H}/\partial p_x,$$

$$d(-H)/dz = -\partial\mathcal{H}/\partial t,$$

e

$$dt/dz = \partial\mathcal{H}/\partial(-H).$$

Ou seja, os novos momenta são p_x e $-H$ e as novas coordenadas x e t, enquanto o novo "tempo" passa a ser a antiga coordenada z; partam de considerações sobre a forma diferencial

$$dH = dx\partial H/\partial x + dp_x\partial H/\partial p_x + dz\partial H/\partial z + dp_z\partial H/\partial p_z + dt\partial H/\partial t.$$

(v) Finalmente mostrem que H é constante de movimento, notem que a parte em x e p_x representa um hamiltoniano de oscilador harmônico lentamente influenciado pelo "tempo" contido em B_o (substituam portanto esta parte pela sua representação em termos da variável de ação), e investiguem o que acontece quando uma partícula é injetada em uma região magnetizada, em que o campo magnético cresce lentamente ao longo da coordenada de injeção z. (Este é difícil, mas é muito curioso, com aplicações diretas em confinamento de partículas, aceleradores e eletrônica de vácuo.)

11) Relembremos mais uma vez o Hamiltoniano completamente adimensionalizado de uma partícula submetida à ação de um potencial vetor, assim como descrito no problema anterior. Suponham uma dinâmica não relativística, para a qual $|\mathbf{p}| \sim |\mathbf{A}| \ll 1$, e suponham também que o potencial vetor tenha a forma $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}} A_0 e^{-(x-v_g t)^2/\sigma^2}\cos(\omega t)$, onde A_0, v_g, e σ medem, respectivamente, a amplitude, velocidade de grupo e a largura do pulso. Escrevam o Hamiltoniano particularizado para o caso em que não haja movimento ao longo de y e que não haja movimento ao longo de z antes da chegada do pulso.

O pulso opera na faixa de altas freqüências, onde $\omega \to \infty$. Isto signifca que há inúmeras oscilações antes que o pulso cubra um comprimento σ, o que permite que o formalismo de perturbações de altas-freqüências possa ser aplicado. Usando então o formalismo, escrevam o Hamiltoniano efetivo para a dinâmica de baixas-freqüências.

Dentro da aproximação de baixas freqüências obtida acima, considerem uma partícula completamente estacionada antes da chegada do pulso. Descrevam então qual a relação limiar entre a velocidade de grupo e a altura do pulso para que a partícula seja "carregada" pelo pulso, não conseguindo atravessá-lo.

Em tempo: Após conversa com pessoal da turma, notamos que há algumas sutilezas a serem observadas: (i) Aqui o único potencial é o do laser - não há nenhum outro potencial externo. (ii) Após a expansão fracamente relativística, o potencial do laser aparece em uma forma quadrática proporcional a $\cos^2(\omega t)$. Este cosseno ao quadrado deve ser escrito em termos de funções trigonométricas lineares para que o formalismo perturbativo de altas-freqüências possa ser aplicado!

12) Imaginem um fluído eletrônico globalmente neutralizado por um mar iônico. Ions, pesados, não se movem, mas elétrons, leves, sim. O sistema é unidimensional (x) e é completamente homogêneo (e desta forma localmente neutro) na ausência de perturbações.

Suponham que o Hamiltoniano para um elétron (de carga q e massa m) do fluído eletrônico, sob a ação de um pulso ondulatório, e naturalmente sob a ação do potencial Coulombiano $\varphi = \varphi(x)$ que existe entre elétrons e íons, possa ser escrito como:

$$H = \frac{p^2}{2m} + q\, A_0\, e^{-x^2/\sigma^2} \cos(\omega t) + q\, \varphi(x),$$

onde A_0 é a amplitude do pulso e σ sua largura. Examinem então como fica a distribuição de cargas no regime estacionário, supondo um regime de altas-freqüências para o qual $\omega \to \infty$. Lembrem que $\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$, onde $\rho = \rho(x)$ denota a densidade líquida de cargas em uma determinada posição x.

13) Para o Hamiltoniano investigado em aula (com $T_\lambda = 1$),

$$H = \frac{I^2}{2} + \varepsilon \sum_{n \geq 0} \cos(\theta - 2\pi n t) + \varepsilon \sum_{n \geq 1} \cos(\theta + 2\pi n t).$$

obtenham a condição limiar de *overlap* de ressonâncias em termos de ε.

14) Substituam o Hamiltoniano não perturbado $H_0(I) = I^2/2$ estudado em aula, pelo de uma partícula relativística movendo-se sob a ação de um campo magnético externo: $H_0(I) = \sqrt{1 + 2\,\omega_c I}$. ω_c é a assim chamada freqüência de cíclotron e o Hamiltoniano completo final, perturbado por uma série periódica de δ's com $T_\lambda = 1$, e representado em termos da expansão harmônica, assume então o aspecto:

$$H = \sqrt{1 + 2\,\omega_c I} + \varepsilon \sum_{n \geq 0} \cos(\theta - 2\pi n t) + \varepsilon \sum_{n \geq 1} \cos(\theta + 2\pi n t).$$

(i) Que condição deve ser cumprida para a ausência de ressonâncias no espaço de fases?

(ii) Suponham $\omega_c = 9\pi$. Localizem as ressonâncias no espaço de fases.

(iii) Para uma ressonância genérica n, obtenham uma expressão para a largura da separatriz, assim com definida em aula. Para isto, usem a expansão

$$H_0(I) \sim H_0(I_n) + \frac{\partial H_0}{\partial I}\Big|_{I_n} \delta I + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}\Big|_{I_n} \delta I^2,$$

$\delta I \equiv I - I_n$. Deixem o resultado indicado em termos de I_n.