Processo de Poisson

→ Certo processo ocorre com taxa a.

→ Probabilidade de o processo ocorrer em Δt é $a\Delta t$

$P(n,t)$: prob. de ocorrer n eventos até o tempo t

$$n: \quad 0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{a} 3 \longrightarrow \cdots$$

$$t = \quad 0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3$$

→ "Caminhante aleatório completamente assimétrico"

Eq. Mestra

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} P(n,t) = a\,P(n-1,t) - a\,P(n,t) & n \neq 0 \\[2ex] \dfrac{d}{dt} P(0,t) = -a\,P(0,t) \end{cases}$$

Cond. inicial: $P(0,0) = 1$; $P(n,0) = 0$, $n \neq 0$

↳ $P(n,0) = \delta_{n0}$

1) Definimos a função geratriz

$$g(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n,t)\, z^n$$

com condição inicial

$$g(z,0) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n,0)\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n0}\, z^n = 1$$

2) Encontramos a eq. diferencial satisfeita por g:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum P(n,t)\, z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial t}(0,t) + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{\partial P}{\partial t}(n,t)$$

$$= -a\, P(0,t) + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \left[a\, P(n-1,t) - a\, P(n,t)\right]$$

$$= \underbrace{-a\,P(0,t)} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \left[a\,P(n-1,t) - a\,P(n,t) \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a z \left[z^{n-1} P(n-1,t) \right] - a \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(n,t)$$

$$= a z \sum_{m=0}^{\infty} z^m P(m,t) - a \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(n,t)$$

$m = n-1$

$$= a z\, g(z,t) - a\, g(z,t)$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial t} = -a(1-z)\, g(z,t)}$$

↳ Solução $\quad g(z,t) = e^{-a(1-z)t}$

$t \quad g(z,0) = 1$

$$g(z,t) = e^{-at} e^{azt}$$

$$= e^{-at} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(azt)^n}{n!}$$

$$= e^{-at} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!} z^n$$

$$\Rightarrow \boxed{P(n,t) = e^{-at} \frac{(at)^n}{n!}}$$ Dist. de Poisson

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P(n,t) = \frac{\partial}{\partial z}\Big[\sum P(n,t)\, z^n\Big]\Big|_{z=1}$$

$$= g'(1,t)$$

$$= \frac{d}{dz}\left[e^{-at} e^{azt}\right]\Big|_{z=1} = at\, e^{-at} e^{azt}\Big|_{z=1} = \underline{at}$$

$$\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = at$$

Processo de criação e aniquilação ("birth-death")

* Pode ser visto como passeio aleatório em que taxas de transição dependem da posição onde o caminhante se encontra

* Possíveis posições: nº não-negativos.

  - A cada intervalo Δt

    • salto à direita com prob. $(\Delta t)\, a_n$

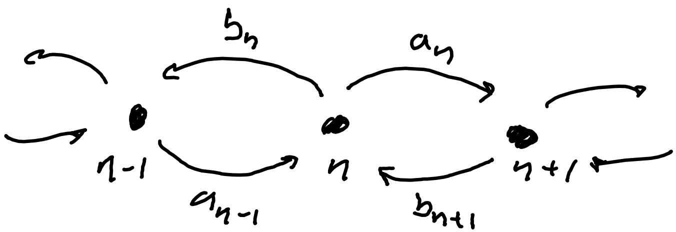
      $n \to n+1$

    • salto à esquerda com prob $(\Delta t)\, b_n$

      $n \to n-1$

$w_{n+1,n} = a_n$; $w_{n-1,n} = b_n$

$w_{n,m} = 0$, outros casos



Eq. Mestra:

$$\frac{dP(n,t)}{dt} = b_{n+1}\, P(n+1,t) + a_{n-1}\, P(n-1,t) - (a_n + b_n)\, P(n,t)$$

- Se a_n e b_n independem de n, recuperamos o passeio aleatório comum.

• Criação - aniquilação: interpretamos n como o número de partículas

A evolução temporal média de uma grandeza qualquer, $\langle f(n) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) P(n,t)$ é

$$\sum_n f(n) \frac{dP(n,t)}{dt} = \sum_n f(n) \Big[b_{n+1} P(n+1,t) + a_{n-1} P(n-1,t) - (a_n + b_n) P(n,t) \Big]$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\sum_n f(n) P(n,t)} = \sum_n f(n) b_{n+1} P(n+1,t) - \sum_n f(n) b_n P(n,t) + \sum_n f(n) a_{n-1} P(n-1,t) - \sum_n f(n) a_n P(n,t)$$

$$\frac{d}{dt} \langle f(n) \rangle = \sum_n f(n-1) b_n P(n,t) - \langle b_n f(n) \rangle + \sum_n f(n+1) a_n P(n,t) - \langle a_n f(n) \rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle f(n)\rangle = \langle f(n-1)\, b_n\rangle - \langle b_n f(n)\rangle + \langle f(n+1)\, a_n\rangle - \langle a_n f(n)\rangle$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\langle f(n)\rangle = \langle [f(n-1) - f(n)]\, b_n\rangle + \langle [f(n+1) - f(n)]\, a_n\rangle}$$

Daí, para o 1º momento

$$\frac{d}{dt}\langle n\rangle = \langle (\cancel{n}-1-\cancel{n})\, b_n\rangle + \langle (\cancel{n}+1-\cancel{n})\, a_n\rangle$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\langle n\rangle = \langle a_n - b_n\rangle}$$

Para o 2º momento.

$$\frac{d}{dt}\langle n^2\rangle = \langle [(n-1)^2 - n^2] b_n \rangle + \langle [(n+1)^2 - n^2) a_n \rangle$$

$$= \langle (-2n+1) b_n \rangle + \langle (2n+1) a_n \rangle$$

$$= 2 \langle n (a_n - b_n) \rangle + \langle a_n + b_n \rangle$$

→ Se a_n ou b_n não forem lineares em n, a eq. para um determinado momento pode depender de momentos superiores.