Equação de Fokker-Planck

* 1 variável

Langevin Superamortecida

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \xi(x) \quad , \quad \langle \xi(t) \rangle = 0$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \Gamma \delta(t-t')$$

Fokker-Planck associada:

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\, P(x,t) \right] + \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x,t)$$

ex 4.2 $\quad f(x) = c$

$$\frac{dx}{dt} = c + \xi(t)$$

$$* \quad \frac{\partial P}{\partial t} = -c\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\Gamma}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

Função Caracteristica : $G(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x,t)\, e^{ikx}\, dx$

$$\Longleftrightarrow \quad P(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(k)\, e^{-ikx}\, dk$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} G(k,t)\, e^{-ikx}\, dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\,\frac{\partial G(k,t)}{\partial t}\, dk$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{+\infty} G(k,t)\, e^{-ikx}\, dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(k,t)\,\frac{\partial (e^{-ikx})}{\partial x}\, dk$$

$$= -\frac{ik}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(k,t)\, e^{-ikx}\, dk$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{(-1)^2 i^2 k^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(k,t)\, e^{-ikx}\, dk = -\frac{k^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(k,t)\, e^{-ikx}\, dk$$

→ Escrever a Fokker-Planck em termos da transformada inversa de $G(k,t)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -c\,\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{r}{2}\,\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

↳

$$\frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\,\frac{\partial G}{\partial t}\, dk = \frac{ick}{\cancel{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} G(k,t)\, e^{-ikx}\, dk - \frac{k^2}{2}\frac{r}{\cancel{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(k,t)\, e^{-ikx}\, dk$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \underbrace{\left[\frac{\partial G}{\partial t} - ickG + \frac{r}{2} k^2 G \right]}_{\equiv 0} dk = 0$$

EDO:

$$\frac{dY}{dt} = aY$$

$$Y = Y(0)\, e^{at}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = ickG - \frac{r}{2} k^2 G = \left(ick - \frac{r}{2} k^2 \right) G$$

é a equação obedecida pela função característica, que tem solução trivial

$$G(k,t) = G(k,0)\, e^{(ick - rk^2/2)t}$$

A condição inicial $x = x_0$ em $t = 0$

$$\Rightarrow P(x,0) = \delta(x - x_0)$$

$$G(k,0) = e^{ikx_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx_0} P(x,0)\, dk$$

$$G(k,t) = e^{ikx_0} e^{(ick - \Gamma k^2/2)t}$$

$$= e^{ik(x_0 + ct) - \frac{\Gamma}{2} k^2 t},$$

que é a transformada de Fourier de uma Gaussiana de média $x_0 + ct$ e variância Γt. Assim

$$\boxed{P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Gamma t}} e^{-[x - (x_0 + ct)]^2 / 2\Gamma t}}$$

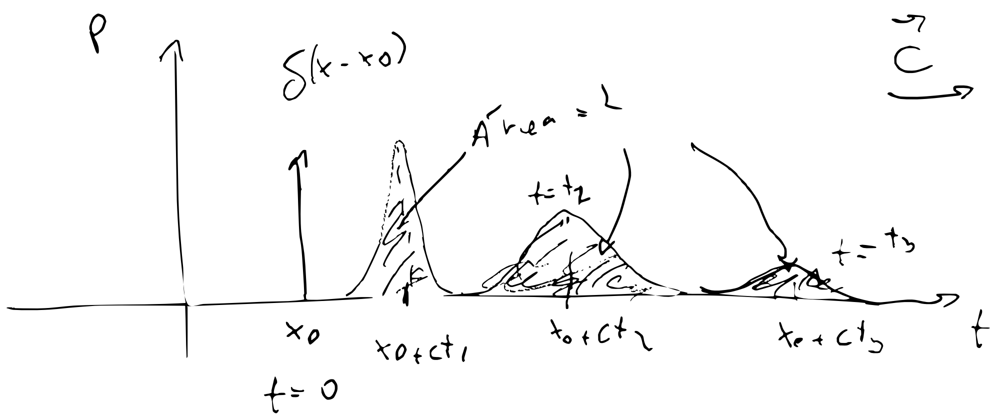
Partículas não confinadas

$$\Rightarrow \quad P(x,t) \xrightarrow{t \to \infty} 0, \quad \forall x$$

Não há distribuição estacionária.

* Partículas tendem a andar com velocidade c, mas há dispersão das partículas

→ gaussiana que anda e ao mesmo tempo se torna mais alargada.



Se escolho um sistema de coordenadas que anda com velocidade constante c, vejo o caso da gaussiana centrada na origem

Ex 4.3 $\frac{dx}{dt} = -\frac{K}{m} x + \xi(t)$ o oscilador harmônico com ruído.

$f(x)$ $\longrightarrow$ $k = \frac{K}{m}$

Partículas confinadas

$P(x,t) \xrightarrow{t \to \infty} P_\infty(x)$, distribuição estacionária, não tendendo à distribuição nula.

(contas semelhantes ao caso anterior)

$$P_\infty(x) = \sqrt{\frac{k}{\pi \Gamma}}\, e^{-kx^2/\Gamma}$$

Energia Potencial

$$= \sqrt{\frac{k}{\pi \Gamma}} \exp\left\{-\frac{\frac{1}{2}kx^2}{(\Gamma/2)}\right\}$$

lembra os pesos de Boltzmann

não é coincidência!

Solução Estacionária

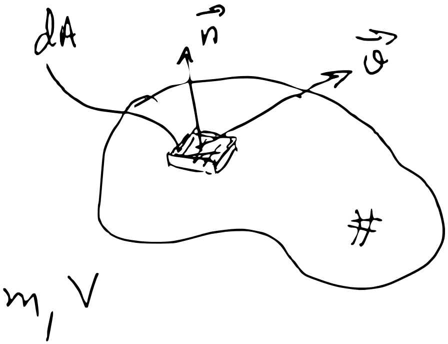
F.P. : $$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)P(x,t)\right] + \frac{\Gamma}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)P(x,t) + \frac{\Gamma}{2}\frac{\partial P}{\partial x}\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} J(x,t)}$$ onde $J(x,t)$

pode ser visto como uma corrente de probabilidade e a eq. FP como uma equação de continuidade.

Equação de continuidade



$$m = \int dm = \int_V \rho \, dV$$

→ variações são possíveis apenas por fluxos através da superfície, ou seja, não há criação nem destruição de fluido.

no volume

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \, dV = -\int_S \rho \vec{v}\cdot d\vec{A} = -\int_S \rho \vec{v}\cdot\vec{n} \, dA$$

teorema da divergência

$$= -\int_V \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) \, dV$$

$$\int_V dV \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right] = 0$$

esta integral deve vale para qualquer volume se não há criação nem destruição em qualquer lugar.

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})$$

Em <u>1D</u>: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} J \; ;$$

$$J = \rho v$$

Supomos que $x \in [a,b]$. Podemos

integrar

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} J$$

$$\int_a^b \frac{\partial P}{\partial t}\,dx = -\int_a^b \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right) dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_a^b P(x,t)\,dx = J(a,t) - J(b,t)$$

Como $\int_a^b P(x,t)\,dx = 1$, independente de t,

temos que

$$0 = J(a,t) - J(b,t)$$

$$\Rightarrow \boxed{J(a,t) = J(b,t)}.$$

Condição refletora

$$J(a,t) = J(b,t) = 0$$

Obs: se $a \to -\infty$ e $b \to +\infty$ é bastante natural imagina que não há fluxo nos extremos

Condição Absorvente

$$\begin{cases} J(a,t) = J(b,t) \neq 0 \\ P(a,t) = P(b,t) = 0 \end{cases}$$

Estado estacionário : $\dfrac{\partial P}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial J}{\partial x}(x,t) = 0$$

$\rightarrow$ $J(x,t)$ é independente de x para a condição REFLETORA $(J(a,t) = J(b,t) = 0)$

$$\Rightarrow \quad J(x) = 0$$ (reversibilidade microscópica)

Portanto:

$$J(x) = f(x)\,P_\infty(x) - \frac{\Gamma}{2}\frac{dP_\infty(x)}{dx} = 0$$

$$\frac{\Gamma}{2}\frac{dP_\infty(x)}{dx} = f(x)\,P_\infty(x)$$

$$\frac{1}{P_\infty(x)} \frac{dP_\infty(x)}{dx} = \frac{2}{\Gamma} f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\ln P_\infty(x)\right] = \frac{2}{\Gamma} f(x)$$

f é conservativa

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \xi(t)$$

→ em 1D, sempre posso escrever

$$f(x) = -\frac{d}{dx} V(x) \quad ; \quad V(x) = -\int f(x)\, dx$$

$$\frac{d}{dx}\left[\ln P_\infty(x)\right] = -\frac{2}{\Gamma} \frac{d}{dx} V(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\ln P_\infty(x) + \frac{2}{\Gamma} V(x)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ln P_\infty(x) + \frac{2}{\Gamma} V(x) = C \quad , \text{ constante}$$

$$\ln P_\infty(x) = -\frac{2}{\Gamma} V(x) + C$$

De modo que

$$P_\infty(x) = e^{-2V(x)/\Gamma + C}$$

$$\boxed{P_\infty(x) = A\, e^{-2V(x)/\Gamma}}$$

constante de normalização

Do ex 4.1

força externa

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha\frac{dx}{dt} + F(x) + F_a(t)$$

força aleatória

Se $m \ll 1$ e/ou $\alpha \gg 1$:

$$\cancel{\frac{d^2x}{dt^2}} = -\frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{m}F(x) + \frac{1}{m}F_a(t)$$

0

é desprezível e então a equação aproximada é

$$F(x) = -\frac{d}{dx}U(x)$$

$$U(x) = \alpha V(x)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\alpha}F(x) + \frac{1}{\alpha}F_a(t)$$

$$\equiv f(x) + \xi(t) \Leftarrow f(x) = -\frac{dV}{dt}$$

$$\boxed{P_\infty(x) = A\, e^{-2V(x)/r}}$$

Com $U(x) = \alpha V(x)$ se torna

$$P_\infty(x) = A\, e^{-2U/\alpha r}$$

, U é a energia potencial.

A partir da Mecânica Estatística, obtemos a distribuição de equilíbrio como

$$P_\infty(x) = \frac{1}{Z}\, e^{-U(x)/k_B T}$$

, k_B: const. Boltzmann
T: temperatura.

$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha \Gamma}{2} = k_B T$$, para que as duas expressões sejam iguais.

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma = \frac{2 k_B T}{\alpha}}$$

$\hookrightarrow$ A intensidade do ruído depende da temperatura.