2.4 – PASSEIO ALEATÓRIO UNIDIMENSIONAL

$$= \begin{cases} 1, & \text{com prob } p \\ -1, & \text{com prob } q = 1-p \end{cases}$$

$$\rho(x) = p\,\delta(x-1) + q\,\delta(x+1)$$

$$a := \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\rho(x)\,dx = \int dx\; p x\,\delta(x-1) + q x\,\delta(x+1)$$

$$= p - q$$

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 \rho(x)\,dx = \int dx\; p x^2 \delta(x-1) + q x\,\delta(x+1)$$

$$= p + q = 1$$

$$b = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 1 - (p-q)^2$$

$$= (p+q) - p^2 + 2pq - q^2$$

$$= p - p^2 + q - q^2 + 2pq$$

$$= p(1-p) + q(1-q) + 2pq$$

$$= pq + qp + 2pq = 4pq$$

Função característica.

$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\, e^{ikx}\, dx$$

$$= \int \left[p\,\delta(x-1) + q\,\delta(x+1)\right] e^{ikx}\, dx$$

$$g(k) = \left(p e^{ik} + q e^{-ik}\right)$$

A função característica de

$$y = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_N = \sum_{j=1}^{N} \sigma_j$$

é (aula passada)

$$G_y(k) = \left[g(k)\right]^N = \left(p e^{ik} + q e^{-ik}\right)^N$$

(binomial)

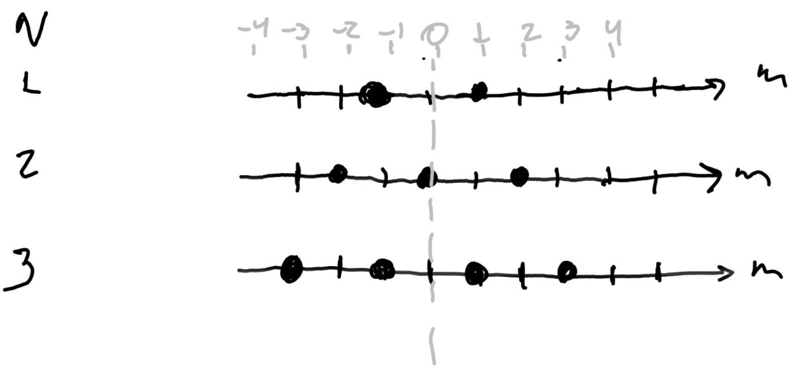
$$= \sum_{l=0}^{N} \binom{N}{l} \left(p e^{ik}\right)^l \left(q e^{-ik}\right)^{N-l}$$

$$= \sum_{l=0}^{N} \binom{N}{l} p^l q^{N-l} e^{ikl} e^{-ik(N-l)}$$

$$= \sum_{l=0}^{N} \binom{N}{l} p^l q^{N-l} e^{ik(2l-N)} \quad (*)$$

Como todos os passos têm tamanho +1 ou -1, os valores mínimo e máximo da variável y são $-N$ e N, respectivamente.

Se chamarmos de $P_N(m)$ a probabilidade de encontrar o caminhante na posição $y = m$ após N passos no instante $t = N\tau$, a densidade de probabilidade de y é



Se deu d passos à direita, o número de passos à esquerda é $e = N - d$ e a posição final é

$$
\begin{aligned}
m_N(d) &= d - e = d - N + d \\
&= 2d - N
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta m &= m_N(d \pm 1) - m_N(d) \\
&= 2(d \pm 1) - N - (2d - N) \\
&= 2d \pm 2 - N - 2d + N
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\Delta m = \pm 2} \leftarrow \begin{cases} \text{se } N \text{ é par, } m \text{ é par} \\ \text{se } N \text{ é impar, } m \text{ é impar} \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \rho_y(x) &= P_N(N)\,\delta(x - N) + P_N(N-2)\,\delta(x - N + 2) \\
&\quad + \dots + P_N(-N+2)\,\delta(x + N - 2) \\
&\quad + P_N(-N)\,\delta(x + N) \\
&= \sum_{\substack{m=-N \\ \Delta m = 2}}^{N} P_N(m)\,\delta(x - m)
\end{aligned}
$$

$$\rho_Y(x) = \sum_{\substack{m=-N \\ \Delta m = 2}}^{N} P_N(m)\,\delta(x-m).$$

Podemos calcular sua função característica pela definição:

$$G_Y(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \rho_Y(x)\, e^{ikx} = \langle e^{ikY} \rangle$$

$$= \sum_{\substack{m=-N \\ \Delta m = 2}}^{N} P_N(m)\, e^{ikm}$$

Comparando com (*), temos

$$\sum_{\substack{m=-N \\ \Delta m = 2}}^{N} P_N(m)\, e^{ikm} = \sum_{l=0}^{N} \binom{N}{l} p^l q^{N-l}\, e^{ik(2l-N)}$$

vamos mudar a variável l do 2º somatório para

$$m = 2l - N \iff l = \frac{m+N}{2}$$

Neste caso os limites do somatório mudam

$$\begin{cases} l = 0 \Rightarrow m = -N \\ l = N \Rightarrow m = N \end{cases}$$

$$\Delta l = 1 \Rightarrow \Delta m = 2, \ \underline{\underline{ok}}$$

$$\sum_{\substack{m=-N\\ \Delta m=2}}^{N} P_N(m)\, e^{ikm} = \sum_{l=0}^{N} \binom{N}{l} p^l q^{N-l}\, e^{ik(2l-N)}$$

$$m = 2l - N \iff l = \frac{N+m}{2}$$

$$N - l = N - \frac{m+N}{2} = \frac{N-m}{2}$$

Então.

$$\sum_{\substack{m=-N\\ \Delta m=2}}^{N} P_N(m)\, e^{ikm} = \sum_{\substack{m=-N\\ \Delta m=2}}^{N} \binom{N}{\frac{N+m}{2}} p^{\frac{N+m}{2}} q^{\frac{N-m}{2}} e^{ikm}$$

Para a igualdade se verificar para qualquer k, ela deve valer termo a termo, portanto

$$\boxed{P_N(m) = \binom{N}{\frac{N+m}{2}} p^{\frac{N+m}{2}} q^{\frac{N-m}{2}}}$$

Onde m tem a mesma paridade de N.

Mais rigorosamente,

* $N = 2\alpha + 1$: $$P_N(m) = \begin{cases} 0, & m = 2\beta \\ \binom{N}{\frac{N+m}{2}} p^{N+m/2} q^{N-m/2}, & m = 2\beta+1 \end{cases}$$

$$* \; N = 2\alpha \rightarrow \quad P_N(m) = \begin{cases} 0 & , \; m = 2\beta + 1 \\ \binom{N}{\frac{N+m}{2}} p^{N+m/2} q^{N-m/2} & , \; m = 2\beta \end{cases}$$

Como a variável y é a soma de variáveis independentes e idênticas

$$\mu = \langle y \rangle = \langle m \rangle = Na = N(p-q)$$

$$\sigma^2 = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 = 4Npq$$

O limite quando $N \gg 1$ (Teorema central do limite) é

$$P_N(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N b}} e^{-(m-Na)^2/2Nb}$$

$$P_N(m) = \frac{1}{\sqrt{8\pi N p q}} e^{-[m-N(p-q)]^2/8Npq}$$

Podemos passar a um "limite contínuo" se tomarmos

$$x = mh \quad , \quad dx = h\,dm$$

$$t = N\tau \quad , \quad dt = \tau\,dN$$

Com $h \ll 1$ e $\tau \ll 1$

$\int \rho(x)\,dx = 1$

$\int \rho(x,t)\,dt \neq 1!$

t não é p..s

$$\rho(x,t)\,dx = \rho(m,N)\,dm$$

$$\rho(x,t)\,h\,dm = \rho(m,N)\,dm$$

$$\rho(x,t) = \frac{1}{h}\,\rho(m,N)$$

$$= \frac{1}{h}\cdot\frac{1}{\sqrt{8\pi N p q}}\,e^{-[m-N(p-q)]^2/8Npq}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi \frac{t}{\tau} h^2 pq}}\,e^{-\left[x/h - t/\tau (p-q)\right]^2/8(t/\tau)pq}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\cdot\left(2\frac{h^2}{\tau}pq\right)t}}\exp\left\{-\frac{\frac{1}{h^2}\left[x-\frac{t}{\tau}(p-q)\right]^2}{4\left(2\frac{pq}{\tau}\right)t}\right\}$$

Se definirmos:

$$\begin{cases} C = \frac{h}{\tau}(p-q) \\ D = 2pq\frac{h^2}{\tau} \end{cases}$$

NÃO ESTÁ CERTO PARA $h \to 0$ e $\tau \to 0$!

$\to$ se $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ \tau\to 0}} 2pq\frac{h^2}{\tau} = D$ então

$$C = \lim_{h\to 0,\,\tau\to 0}\frac{h}{\tau}(p-q) = \lim_{\substack{h\to 0\\ \tau\to 0}}\frac{h^2}{\tau}\,\frac{p-q}{h} = \lim \frac{D(p-q)}{h} \to \infty$$

$$\boxed{\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}}\, e^{-(x-ct)^2/4Dt}}$$

De modo que

$\langle x \rangle = ct$ ← c: velocidade média da caminhada

$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 2Dt$ ↖ D: constante de difusão

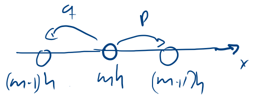
O caso geral com deslocamentos quaisquer Δx_j podem ser tratados por meio da expansão da função característica, como no teorema central do limite (é necessário que média e variância de Δx_j existam!)

→ Exercício 6:

Verificar que $\rho(x,t)$ satisfaz a

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - c \frac{\partial \rho}{\partial x}}$$

Vamos tentar tomar o limite contínuo.
Para encontrar a equação diferencial.



, $p+q=1$

p, q: taxas de transição para $\delta t = \tau$

Vamos definir

$P(mh; n\tau)$: probabilidade de a partícula estar em $x = mh$ no tempo $t = n\tau$

$P(mh; (n+1)\tau)$ = probabilidade de entrar em mh

− ~~probabilidade de sair de mh~~

+ ~~probabilidade de permanecer em mh~~

(entre $n\tau$ e $(n+1)\tau$)

no modelo considerado, apenas a primeira é possível

$$\boxed{P(mh; (n+1)\tau) = p\,P((m-1)h; n\tau) + q\,P((m+1)h; n\tau)}$$

//

Aproximação de derivadas por diferenças finitas

→ Partimos da série de Taylor:

Ⓐ $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{h^2}{2} f''(x) + R(h^3)$

Ⓑ $f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{h^2}{2} f''(x) + R(h^3)$

Ⓐ → $f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + R(h)$

diferença à direita

Ⓑ → $f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + R(h)$

diferença à esquerda

Ⓐ+Ⓑ

$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + R(h^4)$

$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + R(h^2)$

aproximação por diferença centrada

$P(mh;(n+1)\tau) - P(mh;n\tau) =$

$p\,P((m-1)h;n\tau) + q\,P((m+1)h;n\tau) - P(mh;n\tau)$

$1 = p+q$

$\frac{P(mh;(n+1)\tau) - P(mh;n\tau)}{\tau}\,\tau =$

$p\,P((m-1)h;n\tau) - 2p\,P(mh;n\tau) + p\,P((m+1)h,n\tau)$

$+ q\,P((m+1)h;n\tau) - 2q\,P(mh;n\tau) + q\,P((m-1)h;n\tau)$

$- p\,P((m+1)h,n\tau) - q\,P((m-1)h;n\tau)$

$+ p\,P(mh;n\tau) + q\,P(mh;n\tau)$

$$\frac{P(mh;(n+1)\tau) - P(mh;n\tau)}{\tau} =$$

$$\frac{h^2}{\tau}(p+q)\left[\frac{P((m+1)h;n\tau) - 2P(mh;n\tau) + P((m-1)h,n\tau)}{h^2}\right]$$

1

$$-\frac{p}{\tau}\left[P((m+1)h;n\tau) - P(mh,\tau)\right]\frac{h}{h}$$

$$+\frac{q}{\tau}\left[P(mh;n\tau) - P((m-1)\tau;n\tau)\right]\frac{h}{h}$$

$$\xrightarrow[\tau\to 0]{h\to 0}$$

$$\xcancel{\frac{\partial P}{\partial t} = K_1\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - K_2(p-q)\frac{\partial P}{\partial x} \qquad K_1 = \frac{h^2}{\tau} \qquad K_2 = \frac{h}{\tau}}$$

- Se $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ \tau\to 0}} K = \lim \frac{h^2}{\tau}$ = constante

então

$$\lim K_2 = \lim \frac{h}{\tau} = \lim \frac{h^2}{\tau}\frac{1}{h} \to \infty$$

- $K_1 = \frac{h^2}{\tau}$, mas no modelo

$$D = 2pq\frac{h^2}{\tau}$$

Onde foi para a dependência de p e q, que definem a variância?

A tomada do limite está errada, com exceção do caso simétrico $p = q = \frac{1}{2}$:

$$var = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 4pq = 4 \frac{1}{2} \frac{1}{2} = 1$$

$$K_2 = (p-q) \frac{h}{\tau} \equiv 0$$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}}$$

$$D = var \frac{h^2}{\tau}$$

1 se $p = q = \frac{1}{2}$.