

2.4 - PASSEIO ALEATÓRIO UNI DIMENSIONAL

$$= \begin{cases} 1, & \text{com prob } p \\ -1, & \text{com prob } q = 1-p \end{cases}$$

$$\rho(x) = p \delta(x-1) + q \delta(x+1)$$

$$a = \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \rho(x) dx = \int dx p x \delta(x-1) + q x \delta(x+1)$$

$$= p - q$$

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 \rho(x) dx = \int dx p x^2 \delta(x-1) + q x^2 \delta(x+1)$$

$$= p + q = 1$$

$$b = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 1 - (p - q)^2$$

$$= (p + q) - p^2 + 2pq - q^2$$

$$= p - p^2 + q - q^2 + 2pq$$

$$= p(1-p) + q(1-q) + 2pq$$

$$= pq + qp + 2pq = 4pq //$$

Função característica.

$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) e^{ikx} dx$$

$$= \int [p \delta(x-1) + q \delta(x+1)] e^{ikx} dx$$

$$g(k) = (p e^{ik} + q e^{-ik})$$

A função característica de

$$Y = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_N = \sum_{j=1}^N \sigma_j$$

é (cada passo)

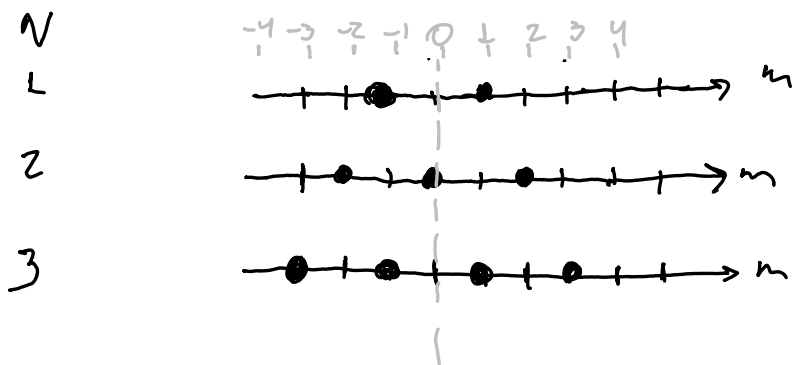
$$G_Y(k) = [g(k)]^N = (p e^{ik} + q e^{-ik})^N$$

$$\begin{aligned}
 & \text{(binomial)} \\
 &= \sum_{l=0}^N \binom{N}{l} (p e^{ik})^l (q e^{-ik})^{N-l} \\
 &= \sum_{l=0}^N \binom{N}{l} p^l q^{N-l} e^{ikl} e^{-ik(N-l)} \\
 &= \sum_{l=0}^N \binom{N}{l} p^l q^{N-l} e^{ik(2l-N)} \quad \text{(*)}
 \end{aligned}$$

Como todos os passos têm tamanho ± 1 e os valores $-N$ e N , respectivamente

Se chamarmos de $P_N(m)$ a

probabilidade de encontrar a caminhada na posição $Y=m$ após N passos no instante $t = N\tau$, a densidade de probabilidade de Y é



Se deu d passos à direita, e número de passos à esquerda é $e = N - d$ e a posição final é

$$m_N(d) = d - e = d - N + d \\ = 2d - N$$

$$\Delta m = m_N(i \pm 1) - m_N(d) \\ = 2(d \pm 1) - N - (2d - N) \\ = 2d \pm 2 - N - 2d + N$$

$$\boxed{\Delta m = \pm 2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{se } N \text{ é par, } m \text{ é par} \\ \text{se } N \text{ é ímpar, } m \text{ é ímpar} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f_y(x) = P_N(N) \delta(x - N) + P_N(N-2) \delta(x - N+2) \\ + \dots + P_N(-N+2) \delta(x + N-2) \\ + P_N(-N) \delta(x + N) \\ = \sum_{\substack{m=-N \\ \Delta m=2}}^N P_N(m) \delta(x - m)$$

$$g_Y(x) = \sum_{\substack{m=-N \\ \Delta m=2}}^N P_N(m) \delta(x-m).$$

Podemos calcular sua função característica pela definição:

$$\begin{aligned} G_Y(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx g_Y(x) e^{ikx} = \langle e^{ikY} \rangle \\ &= \sum_{\substack{m=-N \\ \Delta m=2}}^N P_N(m) e^{ikm} \end{aligned}$$

Comparando com (*), temos

$$\sum_{\substack{m=-N \\ \Delta m=2}}^N P_N(m) e^{ikm} = \sum_{l=0}^N \binom{N}{l} p^l q^{N-l} e^{ik(2l-N)}$$

o somatório vamos mudar a variável l de para

$$m = 2l - N \Leftrightarrow l = \frac{m+N}{2}$$

Neste caso os limites de somatório mudam

$$\begin{cases} l=0 \rightarrow m=-N \\ l=N \rightarrow m=N \end{cases}$$

$$\Delta l = 1 \Rightarrow \Delta m = 2 \quad \underline{\underline{ok}}$$

$$\sum_{m=-N}^N P_N(m) e^{ikm} = \sum_{l=0}^N \binom{N}{l} p^l q^{N-l} e^{ik(2l-N)}$$

$$\Delta m = 2$$

$$m = 2l - N \Leftrightarrow l = \frac{N+m}{2}$$

$$N-l = N - \frac{N+m}{2} = \frac{N-m}{2}$$

Então.

$$\sum_{m=-N}^N P_N(m) e^{ikm} = \sum_{m=-N}^N \binom{N}{\frac{N+m}{2}} p^{\frac{N+m}{2}} q^{\frac{N-m}{2}} e^{ikm}$$

$$\Delta m = 2$$

Para a igualdade se verificar para qualquer n , ela deve valer tanto a termo, portanto

$$P_N(m) = \binom{N}{\frac{N+m}{2}} p^{\frac{N+m}{2}} q^{\frac{N-m}{2}}$$

Onde m tem a mesma paridade de N .

Mais rigorosamente,

$$\neq N = 2\alpha + 1 : P_N(m) = \begin{cases} 0 & , m = 2\beta \\ \binom{N}{\frac{N+m}{2}} p^{\frac{N+m}{2}} q^{\frac{N-m}{2}} & , m = 2\beta + 1 \end{cases}$$

$$* N = 2\alpha \rightarrow P_N(m) = \begin{cases} 0 & , m = 2\beta + 1 \\ \binom{N}{\frac{N-m}{2}} p^{(N+m)/2} q^{(N-m)/2} & , m = 2\beta \end{cases}$$

Como a variável y é a soma de variáveis independentes e idênticas

$$\mu = \langle y \rangle = \langle m \rangle = Na = N(p-q)$$

$$\sigma^2 = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 = 4Npq //$$

O limite quando $N \gg 1$ (Teorema central do limite) é

$$P_N(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Nb}} e^{-\frac{(m - Na)^2}{2Nb}}$$

$$P_N(m) = \frac{1}{\sqrt{8\pi Npq}} e^{-\frac{[m - N(p-q)]^2}{8Npq}}$$

Podemos passar a um "limite contínuo" se tomarmos

$$x = mh, \quad dx = h dm$$

$$t = N\tau, \quad dt = \tau dN$$

Com $h \ll 1$ e $\tau \ll 1$

$$\rho(x,t) dx = \rho(m,n) dm$$
$$\rho(x,t) h dm = \rho(m,N) dm$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \rho(x) dx = 1 \\ \int \rho(x,t) dt \neq 1! \\ \text{—} \\ \text{1 não} \\ \text{é} \\ \text{prob} \end{array} \right.$$

$$\rho(x,t) = \frac{1}{h} \rho(m,n)$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{8\pi N p q}} e^{-[m - n(p-q)]^2 / 8N p q}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi \frac{h^2}{\tau} p q}} e^{-[x/h - t/\tau(p-q)]^2 / 8(t/\tau) p q}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot (2 \frac{h^2}{\tau} p q) t}} \exp\left\{ - \frac{\frac{1}{h^2} \left[x - \frac{t}{\tau} (p-q) \right]^2}{4 \left(2 \frac{p q}{\tau} \right) t} \right\}$$

Se definirmos:

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \frac{h}{\tau} (p-q) \\ D = 2 p q \frac{h^2}{\tau} \end{array} \right.$$

NÃO ESTÁ
CERTO
PARA
 $h \rightarrow 0$ e
 $\tau \rightarrow 0$?

\rightarrow Se $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} 2 p q \frac{h^2}{\tau} = D$ então

$$C = \lim_{\substack{h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0}} \frac{h}{\tau} (p-q) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \frac{h^2}{\tau} \frac{p-q}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \frac{D(p-q)}{h} \rightarrow \infty$$

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-ct)^2}{4Dt}}$$

De modo que

$$\langle x \rangle = ct \quad \& \quad c: \text{velocidade média de caminhada}$$

$$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 2Dt \quad \& \quad D: \text{constante de difusão}$$

↳ O caso geral com deslocamentos quaisquer Δx_j podem ser tratados por meio da expansão da função característica, como no teorema central do limite

(é necessário que média e variância de Δx_j existam!)