Modelagem computacional de processos estocásticos

Mendeli H. Vainstein[1]

[1] Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2021-2

1. **Mudança de variáveis**
   - Propriedades da delta de Dirac
   - Exercícios

Delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)\,dx = 1$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x)\,dx = f(0)$$

Propriedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a) \tag{1}$$
$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|} \tag{2}$$
$$\delta(g(x)) = \sum_{\substack{g(a)=0 \\ g'(a)\neq 0}} \frac{\delta(x-a)}{|g'(a)|} \tag{3}$$

Delta de Dirac

(I) $\int \delta(x-a) f(x)\, dx = \int \delta(y) f(y+a)\, dx$

$y = x-a$
$dy = dx$

$= f(0+a) = f(a)$

(II) $\delta(ax) = \dfrac{\delta(x)}{|a|}$

$\underline{a>0}$: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) f(x)\, dx =$

$y = ax \quad ; \; x \to \infty : y \to \infty$
$dy = a\,dx \quad ; \; \cancel{x} \to -\infty : y \to -\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\, f(y/a)\, \frac{dy}{a} = \frac{f(0)}{a} = \frac{f(0)}{|a|}$$

$\underline{a<0}$: $y = ax \;;\; x \to \infty \Rightarrow y \to -\infty$
$dy = a\,dx \;;\; x \to -\infty \Rightarrow y \to +\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax) f(x)\, dx = \int_{+\infty}^{-\infty} \delta(y) f(y/a) \frac{dy}{(-|a|)}$$

$$= -\int_{+\infty}^{-\infty} \cdots = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) f(y/a) \frac{dy}{|a|}$$

$$= \frac{f(0)}{|a|}$$

$$\Rightarrow \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$$

Delta de Dirac

III $\quad \delta(g(x)) = \sum\limits_{\substack{g(a)=0 \\ g'(a)\neq 0}} \dfrac{\delta(x-a)}{|g'(a)|}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(g(x))\, f(x)\, dx = \sum_{\substack{a,\\ g(a)=0}} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(g(x)) f(x)\, dx$$

para raízes a, de g posso fazer a expansão de Taylor

$$g(x) = \cancel{g(a)}^{\,0} + g'(a)(x-a) + \cdots$$

$$= g'(a)(x-a) + \cdots$$

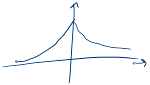
$$= \sum_{g(a)=0} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(g'(a)(x-a))\, f(x)\, dx =$$

$$= \sum \frac{1}{|g'(a)|} f(a)$$

Exemplos de mudança de variável

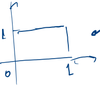
Há dois tipos de problemas:

1. Como gerar uma variável aleatória y com densidade de probabilidade $\rho_2(y)$ dada a partir de uma variável aleatória x com distribuição $\rho_1(x)$ uniforme?
2. Qual é a densidade de probabilidade $\rho_2(y)$ de uma variável $y = f(x)$, dado que x variável com distribuição conhecida $\rho_1(x)$?



$\rho_2(-y) = \rho_2(y)$

Exercício 1. Como geramos uma variável y com a distribuição de Laplace a partir de uma variável x uniformemente distribuída em $[0,1)$?



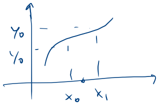
$$\rho_1(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \in [0,1) \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \rightarrow \rho_2(y) = \frac{1}{2\alpha} e^{-|y|/\alpha}$$: função par

Normalização: $$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_2(y)\, dy = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|/\alpha} dy = \frac{1}{2\alpha}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{y/\alpha} dy + \int_{0}^{\infty} e^{-y/\alpha} dy\right]$$

$$= \frac{1}{2\cancel{\alpha}}\left\{\left[\cancel{\alpha} e^{y/\alpha}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\cancel{\alpha} e^{-y/\alpha}\right]_{0}^{\infty}\right\} = \frac{1}{2}\left(e^0 - 0 - 0 + e^0\right) = \frac{2}{2} = 1 \;//$$

ok

Exercício 1 (cont.)



$$\rho_1(x)\,dx = \rho_2(y)\,dy$$

$$\int_{x_0}^{x} \rho_1(x')\,dx' = \int_{y_0}^{y} \rho_2(y')\,dy'$$

$$\int_0^x 1\,dx' = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{y} e^{-|y'|/\alpha}\,dy'$$

$* \; x \in [0, 1/2) \Rightarrow y \in (-\infty, 0)$:

$$x = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{y} e^{y'/\alpha}\,dy' = \frac{1}{2\alpha}\left[\alpha e^{y/\alpha}\right]$$

$$x = \frac{1}{2} e^{y/\alpha} \rightarrow 2x = e^{y/\alpha}$$

$$\frac{y}{\alpha} = \ln 2x$$

$$\boxed{y = \alpha \ln(2x), \quad x \in [0, 1/2)}$$

$* \; x \in [1/2, 1) \Rightarrow y \in (0, +\infty)$

$$x = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{y} e^{-|y|/\alpha}\,dy = \frac{1}{2\alpha}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{y/\alpha}\,dy + \int_0^y e^{-y/\alpha}\,dy\right] = \frac{1}{2\alpha}\left\{\left[\alpha e^{y/\alpha}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\alpha e^{-y/\alpha}\right]_0^y\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - e^{-y/\alpha} + 1\right]$$

$$x = 1 - \frac{1}{2} e^{-y/\alpha}.$$

Exercício 1 (cont.)

$$2x = 2 - e^{-y/\alpha}$$

$$e^{-y/\alpha} = 2 - 2x.$$

$$-\frac{y}{\alpha} = \ln\left[2(1-x)\right]$$

$$\boxed{y = -\alpha \ln\left(2(1-x)\right) \; ; \; x \in [1/2, 1)}$$

$$y = f(x) = \begin{cases} \alpha \ln(2x) \, , & 0 \leq x < 1/2 \\ -\alpha \ln\left(2(1-x)\right), & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

* Se sorteio x uniformemente em $(0,1)$, $y = f(x)$ tem a distribuição não-uniforme de Laplace

Ex: verifique com um programa.

Exercício 2

Exercício 2. Dado que $y = \cos(x)$ e x está uniformemente distribuída em $[0, 1)$, qual é a densidade de probabilidade $\rho_2(y)$?

$$\rho_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - f(x))\, \rho_1(x)\, dx$$

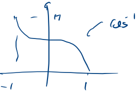
$$\rho_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - \cos(x))\, \rho_1(x)\, dx$$

Escrevo : $y' = \cos(x)$

$$x = \cos^{-1}(y')$$

$$dx = \left[\frac{d}{dy}\cos^{-1}(y)\right]_{y=y'} dy'$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-y'^2}}$$



→ função decrescente

$$\rho_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - y')\, \rho_1(\cos^{-1}(y'))\, \frac{dy'}{\left|-\sqrt{1-y'^2}\right|}$$

$y = y' = \cos(x)$

$$\rho_2(y) = \frac{\rho_1(\cos^{-1}(y))}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\rho_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0,1) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$0 \le \cos^{-1}(y) < 1$$

$$y \le \cos(0) = 1$$

$$y > \cos(1) \approx 0{,}54\ldots$$

Exercício 2 (cont.)

$$f_2(y) = \frac{g_1(\cos^{-1}(y))}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \cos(1) \leq y < 1$$

$$\boxed{f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \cos(1) \leq y < 1}$$

e

Exercício 2 (cont.)

De maneira mais geral:

$$\rho_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - f(x))\, \rho_1(x)\, dx$$

$$h(x) = y - f(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(h(x))\, \rho_1(x)\, dx$$

↓ propriedade III da δ

x_i são "raízes" de $h(x)$:

$$\underline{h(x_i) = 0} \Rightarrow y = f(x_i)$$

↑ diferentes ramos

$$\rho_2(y) = \sum_{\substack{x_i,\\ y=f(x_i)}} \frac{\delta(x - x_i)}{|h'(x_i)|}\, \rho(x_i)$$

↑ diferentes ramos

Exercício 2 (cont.)

$$\rho_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - f(x))\, \rho_1(x)\, dx \longrightarrow \rho_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - z)\, \rho_1(f^{-1}(z))\, \frac{dz}{|f'(f^{-1}(z))|}$$

$$z = f(x)\ ; \quad x = f^{-1}(z)$$

$$dz = \left(\frac{df}{dx}\right) dx$$

$$= f'(x)\, dx$$

$$= f'(f^{-1}(z))\, dx$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}\, dz$$

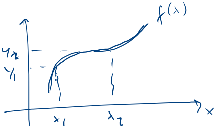
$$\underline{y = z = f(x)}$$

$$= \sum \frac{\rho_1(f^{-1}(y))}{|f'(f^{-1}(y))|} = \sum \frac{\rho_1(x)}{|f'(f^{-1}(y))|}$$

Soma sobre todos os ramos

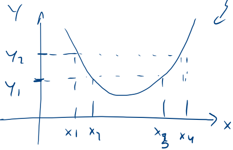
Exercício 2 (cont.)

caso do $\cos(x)$



$$P(y \in [y_1, y_2]) = P(x \in [x_1, x_2])$$

2 ramos!



$$P(y \in [y_1, y_2]) = P(x \in [x_1, x_2]) + P(x \in [x_3, x_4])$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \rho_2(y)\,dy = \int_{x_1}^{x_2} \rho_1(x)\,dx + \int_{x_3}^{x_4} \rho_1(x)\,dx$$

este é o caso de $y = x^2$ $\left\{ \begin{array}{l} x = -\sqrt{y} \\ x = \sqrt{y} \end{array} \right.$

Lista de exercícios

- cap 1: 1, 9, 10, 11, 13, 15

* Demonstre que

$$\delta_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{\pi x}$$

dá origem a uma distribuição delta, mostrando que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\text{sen}(nx)}{\pi x}\, dx = f(0).$$

Suponha que $f(x)$ é contínua em $x = 0$ e que vai a zero com $x \to \pm\infty$.

Dica: Substitua x por y/n e inverta a ordem da integração com o limite.

Referências

1. T. Tomé, M. J. de Oliveira, *Dinâmica estocástica e irreversibilidade*, 2^a edição, EdUSP, São Paulo, 2014. ISBN13: 9788531414800
   `https://www.edusp.com.br/livros/dinamica-estocastica-e-irreversibilidade/`
2. H. J. Weber, G. B. Arfken, *Essential Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, 2003.
3. E. W. Weisstein,"Delta Function." From MathWorld–A Wolfram Web Resource.
   `https://mathworld.wolfram.com/DeltaFunction.html`