Modelagem computacional de processos estocásticos

Mendeli H. Vainstein[1]

[1] Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2021-2

1. **Variáveis aleatórias contínuas**
   - Médias e momentos de uma distribuição
   - Função característica
2. **Variáveis aleatórias discretas**
   - Função geratriz

Médias e momentos de uma distribuição

Dadas uma função $f(x)$, e a densidade de probabilidade $\rho(x)$, a média da função $f(x)$ é dada por

$$\langle f(x) \rangle = \int f(x)\rho(x)dx$$

dP

probabilidade de x

Os momentos da distribuição são definidos como

$$\mu_n = \int x^n \rho(x)dx$$

- Média: $\mu_1 = \int x\rho(x)dx$
- Variância: $\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \equiv \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \mu_2 - \mu_1^2$
- Desvio padrão: $\sigma = \sqrt{\mu_2 - \mu_1^2}$

Exemplo 1.9: Momentos da distribuição Gaussiana

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

Temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}\alpha^{-1/2}, \quad \alpha > 0$$

(Dica: integre $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\alpha(x^2+y^2)} dxdy$ em coordenadas polares.)

Derivando em relação a α:

$$\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{x^2}{2} e^{-\alpha x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)\alpha^{-3/2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}\,\alpha^{-3/2}$$

$$\frac{d}{d\alpha}\Big\{$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{x^4}{2} e^{-\alpha x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}\left(-\frac{3}{2}\right)\alpha^{-5/2} \Rightarrow \int x^4 e^{-\alpha x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}\, 3\alpha^{-5/2}$$

Exemplo 1.9: Momentos da distribuição Gaussiana (cont.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m} e^{-\alpha x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1) \, \alpha^{-(2m+1)/2}$$

$$= \sqrt{2\pi} \, (2m-1)!! \, \alpha^{-m} \alpha^{-1/2}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \int x^{2m} e^{-\alpha x^2/2} dx = (2m-1)!! \, \alpha^{-m} \qquad \alpha^{-1} = \sigma^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int x^{2m} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = (2m-1)!! \, \sigma^{2m}$$

$\rho(x)$

$$\langle x^{2m} \rangle = \int x^{2m} \rho(x) dx = (2m-1)!! \, \sigma^{2m}$$

$\langle x^{2m+1} \rangle = 0$, pois neste caso $\rho(x)$ é par!

Referências

1. T. Tomé, M. J. de Oliveira, *Dinâmica estocástica e irreversibilidade*, 2^a edição, EdUSP, São Paulo, 2014. ISBN13: 9788531414800
`https://www.edusp.com.br/livros/dinamica-estocastica-e-irreversibilidade/`
2. L. E. Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics*, 2^a edição, Wiley-Interscience, New York, 1998. ISBN13: 9780471595205
Link para 4^a edição:
`https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9783527690497`