Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein[1]

[1]Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

1. **Sistemas não-lineares de tempo discreto**
   - Dimensões de um atrator

Dimensões de um atrator

Definição (Dimensão)

Número mínimo de coordenadas para localizar os pontos de um conjunto.

- Uma curva é $1d$, pois cada ponto pode ser medido pela distância a um ponto fixo.

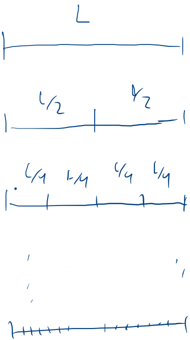
Definição (Dimensão de contagem de caixas)

Seja A um conjunto de pontos em um espaço de fase de dimensão n. A dimensão de Kolmogorov (1958) é dada por

$$D_0 = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)},$$

*onde $N(\epsilon)$ é o número mínimo de hipercubos idênticos de lado ϵ necessários para **cobrir** A.*

Exemplo 1: Segmento de reta de comprimento L



n	ε	$N(\varepsilon)$
0	L	1
1	$L/2$	2
2	$L/4$	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$L/2^n$	2^n

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log (1/\varepsilon)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\log 2^n}{\log (2^n/L)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n \log_2 2}{\log_2 2^n - \log_2 L}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n - \log_2 L} = 1$$

Exemplo 2: Quadrado de área L^2

	n	ε	$N(\varepsilon)$
L	1	L	1
$L/2$	2	$L/2$	4
$L/3$	3	$L/3$	9
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	n	L/n	n^2

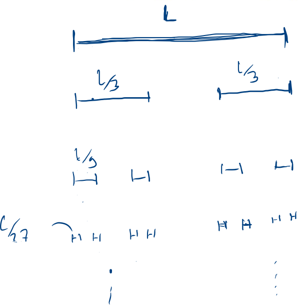
$$D_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log n^2}{\log(n/L)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\log n}{\log n - \log L}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1 - \log L/\log n} = 2$$

Exemplo 3: Conjunto de Cantor



n	ε	$N(\varepsilon)$
0	L	1
1	$L/3$	2
2	$L/9$	4
3	$L/27$	8
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$L/3^n$	2^n

$n \to \infty$: o conjunto de Cantor são os pontos que sobram

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log (1/\varepsilon)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\log 2^n}{\log (3^n/L)}$$

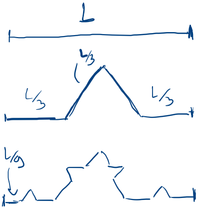
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n \log 2}{n \log 3 - \log L}$$

$$= \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,631$$

↳ Haussdorf (1918)

↳ Autossimilar : contém uma cópia de si mesmo em todas as escalas

Exemplo 3: Curva de Koch



n	ε	$N(\varepsilon)$
0	L	1
1	$L/3$	4
2	$L/9$	16
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$L/3^n$	4^n

$$D_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\log N(n)}{\log\left(1/\varepsilon(n)\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log 4^n}{\log\left(3^n/L\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n \log 4}{n \log 3 - \log L}$$

$$= \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26$$

Comprimento da curva:

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon N(\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{3^n} L$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n L \longrightarrow \infty$$

Fractal - Mandelbrot (1975)

Definição (Fractal)

*Um **fractal** é um objeto ou quantidade que apresenta **autossimilaridade**, em sentido técnico, em todas as escalas.*

Definição (Autossimilaridade)

Um objeto é dito autossimilar se aparenta ser aproximadamente o mesmo em qualquer escala. Fractais são uma classe particularmente interessante de objetos autossimilares. Objetos autossimilares com parâmetros N e s são descritos por leis de potência como

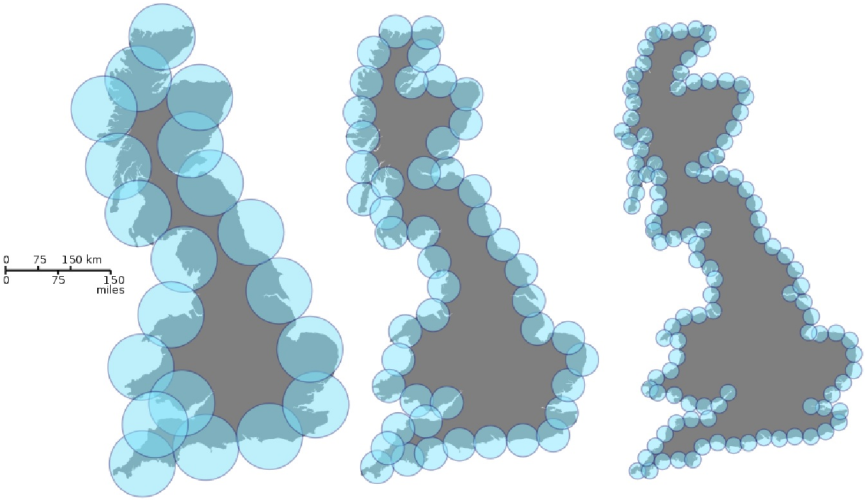
$$N = s^d, \quad \textit{onde} \quad d = \frac{\ln N}{\ln s}$$

*é a "dimensão" da lei de escala, conhecida como a **dimensão de Haussdorf**.*

Weisstein, Eric W. "Fractal."From MathWorld–A Wolfram Web Resource.
https://mathworld.wolfram.com/Fractal.html
Weisstein, Eric W. "Self-Similarity."From MathWorld–A Wolfram Web Resource.
https://mathworld.wolfram.com/Self-Similarity.html

Costa da Grã-Bretanha

- Estimativa da dimensão de Haussdorf

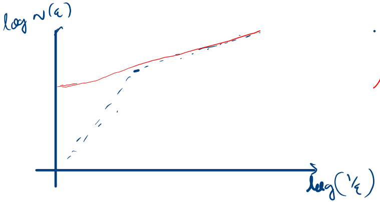


`https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bc/Great_Britain_Hausdorff.svg`

- Fractais podem ser gerados pelo comportamento assintótico de sistemas dinâmicos.

Método de cálculo

- Itera-se o mapa desprezando o transiente
- Guardam-se os pontos pertencentes ao atrator
- Divide-se a região do atrator em $N(\epsilon)$ caixas de dimensão ϵ
- Reduz-se ϵ e refazem-se os cálculos
- A dimensão D_0 corresponde a inclinação do gráfico:

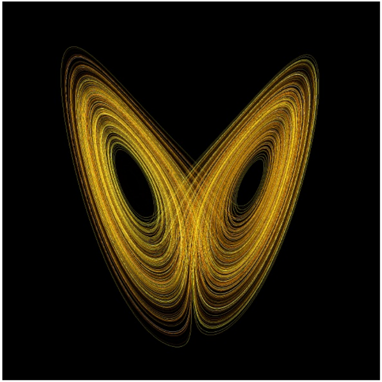


$\lim_{\epsilon \to 0} \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = \infty$

Caos e fractais

- Atrator de Lorenz
- Dimensão de Haussdorf $d = 2.06 \pm 0.01$ para $\rho = 40$, $\sigma = 16$ e $\beta = 4$.

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\
\frac{dy}{dt} &= x(r - z) - y \\
\frac{dz}{dt} &= xy - \beta z,
\end{aligned}
$$



McGuinness, M.J. . "The fractal dimension of the Lorenz attractor". Physics Letters. 99A (1): 5 (1983).
https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension
Imagem: Computed in Fractint by Wikimol, Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=165697

Método de Newton-Rhapson

O método é derivado da expansão de Taylor

$$f(x+\delta) = f(x) + f'(x)\delta + \frac{f''(x)}{2}\delta^2 + \cdots$$

Desprezando termos não lineares escrevemos $f(x+\delta) = 0$ e

$$\delta = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Dada uma aproximação para a raiz x_i, calcula-se a seguinte aproximação

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Método de Newton-Rhapson

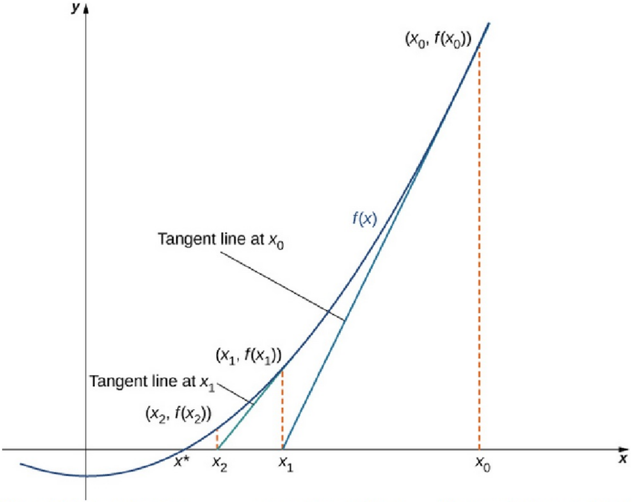


Figure 1. *The approximations x_0, x_1, x_2, approach the actual root $x*$. The approximations are derived by looking at tangent lines to the graph of f.*

Imagem: `https://opentextbc.ca/calculusv1openstax/chapter/newtons-method/`

Bacia de atração do método de Newton-Rhapson

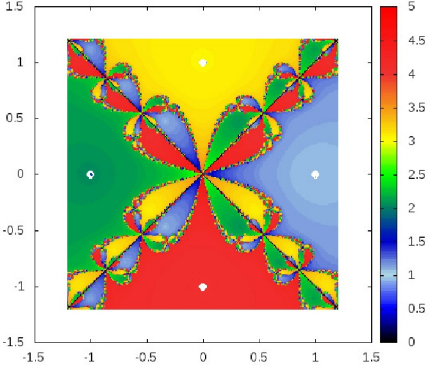
- O método funciona para números complexos também!

$$z_{n+1} = g(z_n) = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

$(z^4 - 1) = (z^2 - 1)(z^2 + 1)$

$= (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$

Para $f(z) = z^4 - 1$, temos



Referências

1. Luiz H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos*, 3^a ed., Editora Livraria da Física, São Paulo (2011)