

Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein¹

¹Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

1

Sistemas não-lineares de tempo discreto

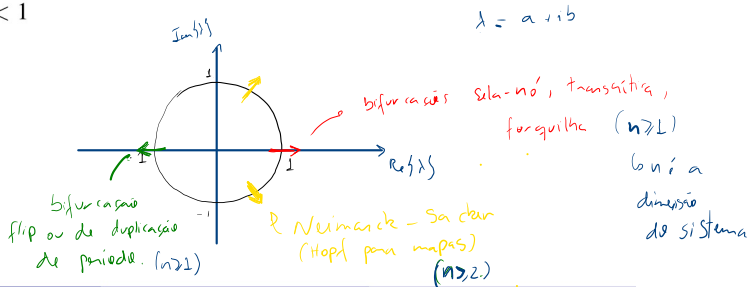
- Bifurcações de codimensão um
- Mapa logístico
- Bifurcações com um autovalor $\lambda = 1$

Bifurcações

Variando-se os parâmetros de um mapa, pode-se passar de ponto fixo hiperbólico para não hiperbólico; a solução assintótica do sistema muda qualitativamente: ocorre uma **bifurcação**.

Tem-se ponto fixo não hiperbólico quando:

- um autovalor vale $+1$ e os demais têm módulo < 1
- um autovalor vale -1 e os demais têm módulo < 1
- um par de autovalores complexos têm módulo 1 e os demais têm módulo < 1



Mapa logístico: forma normal

$$x \in [0, 1]$$

$$x_{n+1} = f(x_n) = 4\lambda x_n(1 - x_n)$$

Pontos fixos: $x^* = f(x^*)$

$$x^* = 4\lambda x^*(1 - x^*)$$

$$x_1^* = 0 \quad \text{ou}$$

$$1 = 4\lambda(1 - x^*)$$

$$1 = 4\lambda - 4\lambda x^*$$

$$4\lambda x^* = 4\lambda - 1$$

$$x_2^* = \frac{4\lambda - 1}{4\lambda} = 1 - \frac{1}{4\lambda}$$

$$x_1^* \geq 0 \Rightarrow 4\lambda \geq 1$$

$$\lambda \geq \frac{1}{4}$$

Passam o ponto de bifurcação (x^*, μ) para a origem $(x^*, \mu) \rightarrow (0, 0)$



Mudança de variáveis:

$$\mu = \lambda - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = \mu + \frac{1}{4}$$

$$x_{n+1} = 4\left(\mu + \frac{1}{4}\right)x_n(1 - x_n)$$

$$= (4\mu + 1)x_n(1 - x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n + 4\mu x_n - (4\mu + 1)x_n^2 = g(x_n, \mu)$$

Mapa logístico: forma normal

$$x \in [0, 1]$$

$$x_{n+1} = f(x_n) = 4\lambda x_n(1 - x_n)$$

Pontos fixos: $x^* = 0$:

$$g(0, \mu) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(0,0)} &= 1 + 4\mu - 2(4\mu+1) \cdot x \Big|_{(0,0)} \\ &= 1 \end{aligned} \right\}$$

↳ ponto fixo não-hiperbólico.

$$|g'(x)|_{(0,0)}| = 1$$

$x^* \neq 0$:

$$x^* = g(x^*, \mu)$$

$$\downarrow$$

$$g(x, \mu) - x = 0 = \underbrace{4\mu x - (4\mu+1)x^2}_{\text{se } x \neq 0} = h(x, \mu)$$

$$0 = 4\mu - (4\mu+1)x$$

$$4\mu = (4\mu+1)x \Leftrightarrow x = \frac{4\mu}{4\mu+1}$$

$$4\mu - 4\mu x = x$$

$$4\mu(1-x) = x$$

$$\mu = \frac{x}{4(1-x)}$$

curva dos pontos fixos que passam por (0,0)

↳ Taylor de $g(x, \mu)$ em redor do ponto de bifurcação (0,0):

$$g(x, \mu) = x + 4\mu x - (4\mu+1)x^2$$

Mapa logístico: forma normal

$$x \in [0, 1]$$

$$g(x, \mu) = x + 4\mu x - (4\mu + 1)x^2$$

$$x_{n+1} = f(x_n) = 4\lambda x_n(1 - x_n)$$

$$\begin{cases} g(0,0) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = [2 + 4\mu - 2(4\mu + 1)x] \Big|_{(0,0)} = 2 - 4\mu = 0 \end{cases}$$

condições de ponto fixo não-hiperbólico

Expansão:

$$g(x, \mu) = \cancel{g(0,0)} + \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(0,0)} x + \frac{\partial g}{\partial \mu} \Big|_{(0,0)} \mu + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} \frac{x^2}{2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \mu} \Big|_{(0,0)} \mu x + \frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2} \Big|_{(0,0)} \frac{\mu^2}{2} + o(3)$$

(ponto fixo)

$$g(x, \mu) = x - \frac{2}{2} x^2 + 4\mu x + o(3)$$

$$= x + 4\mu x - x^2 + o(3)$$

$$= \underbrace{x + \alpha x - x^2}_{\text{Forma normal da bifurcação}} + o(3)$$

para bif. transitiva

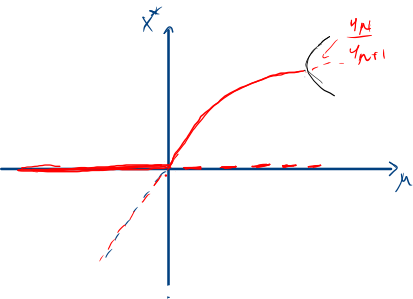
Para expansão em Série de Taylor:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} = -2(4\mu + 1) \Big|_{(0,0)} = -2 \neq 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mu} \Big|_{(0,0)} = (4x - 4x^2) \Big|_{(0,0)} = 0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \mu} \Big|_{(0,0)} = (4 - 8x) \Big|_{(0,0)} = 4 \neq 0$$

Mapa logístico: forma normal



Bifurcação transcritical:
pontos fixos já existentes
trocam de estabilidade.

Formas normais: bifurcações com um autovalor $\lambda = 1$

- Caso análogo ao das bifurcações em sistemas de tempo contínuo com um autovalor igual a 0.

Formas normais:

- $x_{j+1} = F(x_j) = x_j + \mu \mp x_j^2$ (sela-nó)
- $x_{j+1} = F(x_j) = x_j + \mu x_j \mp x_j^2$ (transcrítica)
- $x_{j+1} = F(x_j) = x_j + \mu x_j \mp x_j^3$ (forquilha)

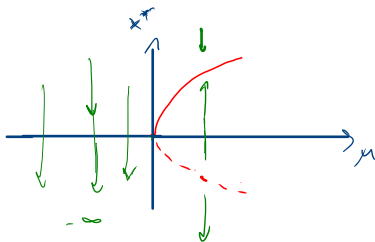
⇒ Para essas formas normais, o ponto de bifurcação é $(x^*, \mu) = (0, 0)$.

Condições para ocorrer bifurcação sela-nó

- Ponto fixo: $(x^*, \mu) = (0, 0)$

$$f_{\mu}(x^*) = 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x^*} \right|_{(x^*, \mu) = (0, 0)} = 1$$
$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_{(x^*, \mu) = (0, 0)} \neq 0, \quad \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^{*2}} \right|_{(x^*, \mu) = (0, 0)} \neq 0$$

- Supercrítica se: $(\partial^2 f / \partial x^{*2}) / (\partial f / \partial \mu) < 0$ em $(x^*, \mu) = (0, 0)$ e subcrítica, caso contrário.



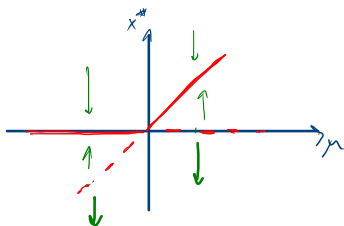
Condições para ocorrer bifurcação transcritical

- Ponto fixo: $(x^*, \mu) = (0, 0)$

$$f_\mu(x^*) = 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x^*} \right|_{(x^*, \mu) = (0, 0)} = 1$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_{(x^*, \mu) = (0, 0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^{*2}} \right|_{(x^*, \mu) = (0, 0)} \neq 0, \quad \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^* \partial \mu} \right|_{(x^*, \mu) = (0, 0)} \neq 0$$

- Supercrítica se: $(\partial^2 f / \partial x^{*2}) / (\partial^2 f / \partial x^* \partial \mu) < 0$ em $(x^*, \mu) = (0, 0)$ e subcrítica, caso contrário.

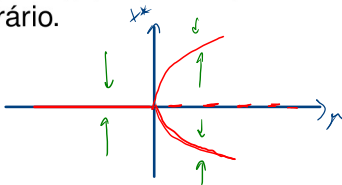


Condições para ocorrer bifurcação de forquilha

- Ponto fixo: $(x^*, \mu) = (0, 0)$

$$\begin{aligned} f_{\mu}(x^*) &= 0, & \left. \frac{\partial f}{\partial x^*} \right|_{(x^*, \mu)=(0,0)} &= 1, \\ \left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_{(x^*, \mu)=(0,0)} &= 0, & \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^{*2}} \right|_{(x^*, \mu)=(0,0)} &= 0, \\ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^* \partial \mu} \right|_{(x^*, \mu)=(0,0)} &\neq 0, & \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^{*3}} \right|_{(x^*, \mu)=(0,0)} &\neq 0, \end{aligned}$$

- Supercrítica se: $(\partial^3 f / \partial x^{*3}) / (\partial^2 f / \partial x^* \partial \mu) < 0$ em $(x^*, \mu) = (0, 0)$ e subcrítica, caso contrário.



Exemplo 9.6

Construa o diagrama de bifurcação (sela-nó supercrítica) do mapa

$$x_{j+1} = f(x_j) = x_j + \mu - x_j^2$$

Pontos fixos: $x^* = f(x^*)$

$$x^* = x^* + \mu - x^{*2}$$

$$x^{*2} = \mu$$

$$x^* = \pm \sqrt{\mu}$$

↳ só existem se $\mu \geq 0$

Estabilidade:

$$\left| \frac{df}{dx} \right|_{x^*} < 1$$

para ser estável.

$$f'(x) = 1 - 2x$$

$$|f'(x^*)| < 1$$

$$-1 < 1 - 2x^* < 1$$

$$-1 < 1 - 2(\pm\sqrt{\mu}) < 1$$

$$-1 < 1 \mp 2\sqrt{\mu} < 1$$

$$\underline{x^* = \sqrt{\mu}}:$$

$$-1 < 1 - 2\sqrt{\mu} < 1$$

$$-2 < -2\sqrt{\mu} < 0$$

$$1 > \sqrt{\mu} > 0 \Rightarrow$$

estável se
 $0 < \mu < 1$

Exemplo 9.6

Construa o diagrama de bifurcação (sela-nó supercrítica) do mapa

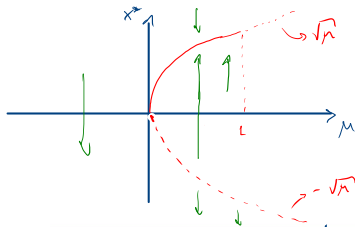
$$x^* = -\sqrt{\mu} : -1 < 1 + 2\sqrt{\mu} < 0 \quad x_{j+1} = f(x_j) = x_j + \mu - x_j^2$$

$$-2 < 2\sqrt{\mu} < 0$$

$$-1 < \sqrt{\mu} < 0$$

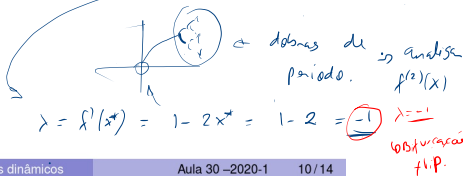
↳ IMPOSSÍVEL

$-\sqrt{\mu}$ é sempre instável.



→ Para $\mu > 1$, não há pontos fixos estáveis. Isto não ocorre em sistemas unidimensionais de tempo contínuo.

O que ocorre em $x^* = 1$ e $\mu = 1$?



Bifurcação de Neimark-Sacker ($n \geq 2$)

Exercício 9.26 Seja o mapa em coordenadas polares

$$r_{j+1} = r_j[1 + d\mu + a(\mu)r_j^2] = f(r_j)$$

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \phi_0 + \phi_1\mu + br_j^2,$$

onde a, b, d, ϕ_0 e ϕ_1 são constantes e μ é um parâmetro pequeno ($|\mu| \ll 1$).

1 Mostre que $r_0^* = 0$ é não hiperbólico se $\mu = 0$.

$$\begin{cases} r^* = r^*(1 - d\mu + a r^{*2}) \\ \theta^* = \theta^* + \phi_0 + \phi_1\mu + b r^{*2} \end{cases}$$

$\rightarrow \underline{r^* = 0}$ e θ^* qualquer
é ponto no origem

Estabilidade:

$$|f'(r^*)| < 1$$

$$|1 + d\mu + 3ar^{*2}| < 1$$

$$-1 < 1 + d\mu < 1$$

$$-2 < d\mu < 0 \rightarrow$$

se $\mu = 0$:
estabilidade não
é possível

$r^* = 0$ em
 $\mu = 0$ é
não-hiperbi-
lico.

Exercício 9.26 (cont.)

* $-2 < d\mu < 0$: $n_i^* = 0$ é estável

* $d\mu > 0$: $n_i^* = 0$ é instável

$n_i^* \neq 0$: $1 + d\mu + a n_i^{*2} = 1$

$$n_i^* = \sqrt{\frac{-d\mu}{a}}$$

Se $\frac{d\mu}{a} < 0$

Estabilidade de n_i^* :

$$|f'(n_i^*)| < 1$$

$$\left| 1 + d\mu + 3a \left(\frac{-d\mu}{a} \right) \right| < 1$$

$$-1 < 1 + d\mu - 3d\mu < 1$$

$$-2 < -2d\mu < 0$$

$$L > d\mu > 0 \quad ; \quad \frac{d\mu}{a} < 0$$

* se $d\mu > 0$ e $a < 0$ (n_i^* é estável)

* se $d\mu < 0$ e $a > 0$ (n_i^* é instável)

i) $d > 0; a > 0$ * n_i^* $\left\{ \begin{array}{l} \text{instável se } \mu > 0 \\ \text{assint. estável se } \mu < 0 \end{array} \right.$ ($|f| < 1$)

* n_i^* existe se $\mu < 0$ e instável

ii) $d > 0; a < 0$ * n_i^* $\left\{ \begin{array}{l} \text{instável se } \mu > 0 \\ \text{assint. estável se } \mu < 0 \end{array} \right.$

* n_i^* existe se $\mu > 0$ e é assint. estável

Exercício 9.26 (cont.)

iii) $d < 0$ e $a > 0$

* π_0^* $\begin{cases} \text{instável se } \mu < 0 \\ \text{assint. estável se } \mu > 0 \end{cases}$

* π_1^* existe se $\mu > 0$ e é instável.

iv) $d < 0$ e $a < 0$

* π_0^* $\begin{cases} \text{instável se } \mu < 0 \\ \text{assint. estável se } \mu > 0 \end{cases}$

* π_1^* existe se $\mu < 0$ e é assint. estável.

π_1^* (solução não trivial) é assintoticamente estável se $a < 0$ e instável se $a > 0$. (quando existe)

$$c) \quad \pi_1^* = \sqrt{-\frac{d\mu}{a}}$$

$$\begin{aligned} \theta_{j+1} &= \theta_j + \phi_0 + \phi_1 \mu + b \left(-\frac{d\mu}{a} \right) \\ &= \theta_j + \phi_0 + \underbrace{\left(\phi_1 - \frac{db}{a} \right)}_{\pi_1^*} \mu \end{aligned}$$

$$\text{se } \theta_0 + \left(\phi_1 - \frac{db}{a} \right) \mu \text{ é}$$

$\begin{cases} \text{racional:} & \text{periódica} \\ \text{irracional:} & \text{cobre o círculo } \pi_1^* \text{ densamente} \end{cases}$

Referências

- 1 Luiz H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos*, 3^a ed., Editora Livraria da Física, São Paulo (2011)
- 2 Yuri A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 2nd ed., Springer, New York (1998)