

# Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

## 1 Sistemas não-lineares de tempo discreto

- Caso bidimensional linear
- Caso bidimensional não-linear

## Mapas bidimensionais lineares

Seja o mapa

$$x_{n+1} = ax_n + by_n,$$

$$y_{n+1} = cx_n + dy_n.$$

Em notação matricial, temos

$$\vec{z}_{n+1} = \overset{\leftrightarrow}{A} \vec{z}_n,$$

onde

$$\vec{z}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \overset{\leftrightarrow}{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Dada a condição inicial  $\vec{z}_0$ , a solução pode ser escrita como

$$\vec{z}_n = (\overset{\leftrightarrow}{A})^n \vec{z}_0 \tag{1}$$

## Mapas bidimensionais lineares

A matriz  $\overleftrightarrow{A}$  pode ser escrita na forma canônica de Jordan (exercício 4.36 - Aula 9) de uma das seguintes formas

$$\overleftrightarrow{J}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \overleftrightarrow{J}_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \text{ou} \quad \overleftrightarrow{J}_3 = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}. \quad \lambda = \alpha \pm i\beta$$

Aqui,

$$\overleftrightarrow{J} = (\overleftrightarrow{P})^{-1} \overleftrightarrow{A} \overleftrightarrow{P} \quad \Leftrightarrow \quad \overleftrightarrow{A} = \overleftrightarrow{P} \overleftrightarrow{J} \overleftrightarrow{P}^{-1}$$

e as colunas da matriz  $\overleftrightarrow{P}$  são os autovetores de  $\overleftrightarrow{A}$ .

Exercício: Prove que

$$(\overleftrightarrow{A})^n = \overleftrightarrow{P} (\overleftrightarrow{J})^n (\overleftrightarrow{P})^{-1}$$

e escreva a solução geral da equação (1) em termos dos autovalores de  $\overleftrightarrow{A}$ .

## Exercício

1) Suponha que vale

$$\tilde{A}^n = \tilde{P} \tilde{J}^n \tilde{P}^{-1}$$

2) Base de indução:

$$\tilde{A}^2 = \tilde{A} \tilde{A} = (\tilde{P} \tilde{J} \tilde{P}^{-1}) (\tilde{P} \tilde{J} \tilde{P}^{-1})$$

$$= \tilde{P} \tilde{J} (\tilde{P}^{-1} \tilde{P}) \tilde{J} \tilde{P}^{-1}$$

$$= \tilde{P} \tilde{J} \tilde{J} \tilde{P}^{-1}$$

$$\tilde{A}^2 = \tilde{P} \tilde{J}^2 \tilde{P}^{-1}$$

$\rightarrow$  vale para  $n=2$

$$\begin{aligned} 3) \tilde{A}^{n+1} &= \tilde{A}^n \tilde{A} \\ &= (\tilde{P} \tilde{J}^n \tilde{P}^{-1}) (\tilde{P} \tilde{J} \tilde{P}^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{n+1} &= \tilde{P} \tilde{J}^n \tilde{J} \tilde{P}^{-1} \\ &= \tilde{P} \tilde{J}^{(n+1)} \tilde{P}^{-1} \end{aligned}$$

Se vale para  $n$ , vale para  $n+1$ .

$$\text{ou } \rightarrow \text{provado. } \Rightarrow \boxed{\tilde{z}_n = (\tilde{P} \tilde{J}^n \tilde{P}^{-1}) \tilde{z}_0}$$

A)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ;  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\tilde{J}_1^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$$

B)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

1) Base de indução

$$\tilde{J}_2^2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

## Exercício (cont.)

2) Suponha que

$$\tilde{J}_2^n = \lambda^{n-1} \begin{bmatrix} \lambda & n \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

3)  $\tilde{J}_2^{n+1} = \tilde{J}_2^n \tilde{J}_2$

$$= \lambda^{n-1} \begin{bmatrix} \lambda & n \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^{n-1} \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda(n+1) \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^n \begin{bmatrix} \lambda & n+1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Se vale para  $n$ , vale para  $n+1$ .  $\rightarrow$  O.K.

c) Autovalores complexos:  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$\tilde{J}_3 = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$



$$z = \alpha + i\beta = r e^{i\theta} = r (\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$\tilde{J}_3 = \begin{bmatrix} r \cos\theta & -r \sin\theta \\ r \sin\theta & r \cos\theta \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} R_\theta$$

$\leftarrow$  matriz de rotação

$\rightarrow$   $\angle$  rotação seguidas (com mesmo ângulo)

$$R_\theta R_\theta = R_\theta^2 = R_{2\theta} = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}$$

### Exercício (cont.)

$$\begin{aligned} \vec{z}_3^n &= \mathcal{P}^n \vec{z}_0^n \\ &= (\alpha^2 + \beta^2)^{n/2} \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{z}_n = \begin{cases} \mathcal{P} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \mathcal{P}^{-1} \vec{z}_0 & ; \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \lambda^{n-1} \mathcal{P} \begin{bmatrix} \lambda & n \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \mathcal{P}^{-1} \vec{z}_0 & , \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \\ (\alpha^2 + \beta^2)^{n/2} \mathcal{P} \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix} \mathcal{P}^{-1} \vec{z}_0 & , \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \end{cases}$$

## Mapas bidimensionais não-lineares

Seja o mapa

$$x_{i+1} = f(x_i, y_i),$$

$$y_{i+1} = g(x_i, y_i).$$

Suponha que  $P = (x^*, y^*)$  seja um ponto fixo, ou seja,

$$x^* = f(x^*, y^*),$$

$$y^* = g(x^*, y^*).$$

A expansão em série de Taylor de um ponto  $(x_i^* + \epsilon_i, y_i^* + \eta_i)$ , muito próximo ao ponto fixo  $(x^*, y^*)$ , em torno deste é dada por

$$\begin{aligned} x^* + \epsilon_{i+1} &= f(x^* + \epsilon_i, y^* + \eta_i) \\ &= f(x^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} \epsilon_i + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} \eta_i + \dots \end{aligned}$$

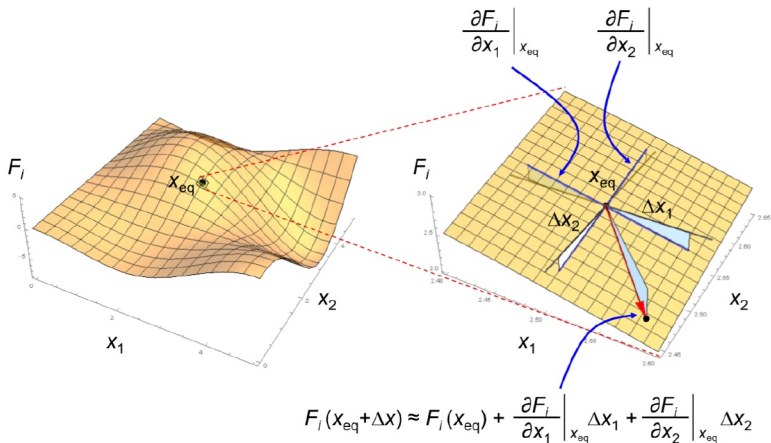


## Mapas bidimensionais

$$\begin{aligned}x^* + \epsilon_{i+1} &= f(x^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} \epsilon_i + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} \eta_i + \dots \\ &= x^* + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} \epsilon_i + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} \eta_i + \dots \\ \epsilon_{i+1} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} \epsilon_i + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} \eta_i + \dots\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\eta_{i+1} = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} \epsilon_i + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} \eta_i + \dots$$



**Figura:** Linearização de uma função bidimensional não linear ao redor de um ponto de equilíbrio.

[https://math.libretexts.org/Bookshelves/Applied\\_Mathematics/Book%3A\\_Introduction\\_to\\_the\\_Modeling\\_and\\_Analysis\\_of\\_Complex\\_Systems\\_\(Sayama\)/05%3A\\_DiscreteTime\\_Models\\_II\\_Analysis/5.07%3A\\_5.7\\_Linear\\_Stability\\_Analysis\\_of\\_Discrete-Time\\_Nonlinear\\_Dynamical\\_Systems](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Applied_Mathematics/Book%3A_Introduction_to_the_Modeling_and_Analysis_of_Complex_Systems_(Sayama)/05%3A_DiscreteTime_Models_II_Analysis/5.07%3A_5.7_Linear_Stability_Analysis_of_Discrete-Time_Nonlinear_Dynamical_Systems)

## Mapas bidimensionais

Podemos reescrever as expressões anteriores em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{i+1} \\ \eta_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x^*, y^*)} \begin{bmatrix} \epsilon_i \\ \eta_i \end{bmatrix},$$

onde podemos definir a matriz jacobiana  $\overset{\leftrightarrow}{A}$  de tal forma que tenhamos

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{i+1} \\ \eta_{i+1} \end{bmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{A}(x^*, y^*) \begin{bmatrix} \epsilon_i \\ \eta_i \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Os autovalores,  $\lambda_{1,2}$ , de  $\overset{\leftrightarrow}{A}$  calculados no ponto fixo  $(x^*, y^*)$  determinarão a estabilidade do sistema.

## Mapas bidimensionais

A partir da solução geral do caso linear acima, podemos concluir que

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{i+1} \\ \eta_{i+1} \end{bmatrix} \rightarrow \vec{0}$$

se  $|\lambda_{1,2}| < 1$ . Desta forma,

- se  $\lambda_{1,2}$  são números reais,  $P$  é um ponto fixo **assintoticamente estável** se

$$-1 < \lambda_{1,2} < 1$$

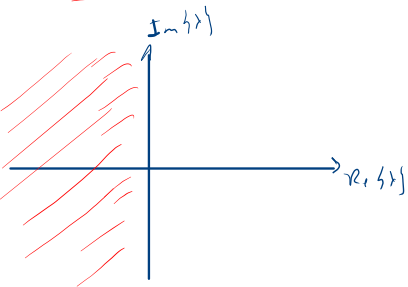
e **instável** caso algum autovalor esteja fora desta região;

- Se  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , então  $|\lambda_{1,2}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ . Quando  $|\lambda_{1,2}| < 1$ , o ponto é **assintoticamente estável** e **instável** se  $|\lambda_{1,2}| < 1$ .

# Estabilidade assintótica

$$\lambda = \operatorname{Re}\{\lambda\} + i \operatorname{Im}\{\lambda\}$$

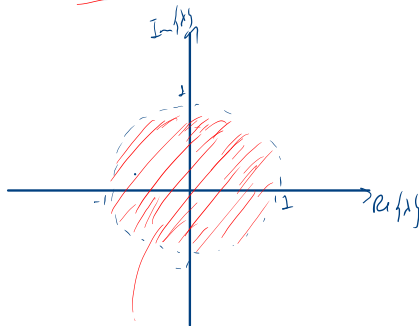
Tempo contínuo



Estabilidade:

$$\operatorname{Re}\{\lambda\} < 0$$

Tempo discreto



Estabilidade:

$$|\lambda| < 1$$

## Teorema de Hartman-Grobman

Definem-se três conjuntos de autovalores ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ):

- $\lambda \in \sigma_e$  se  $|\lambda| < 1$ : autovetores geram o subespaço estável  $E^e$
- $\lambda \in \sigma_i$  se  $|\lambda| > 1$ : autovetores geram o subespaço instável  $E^i$
- $\lambda \in \sigma_c$  se  $|\lambda| = 1$ : autovetores geram o subespaço central  $E^c$

⇒ Se que não houver autovalor pertencente a  $\sigma_c$  associado a um ponto  $P$  diz-se que ele é **hiperbólico**.

- O teorema de Hartman-Grobman garante que a estabilidade de um ponto fixo hiperbólico pode ser determinada a partir da análise do mapa linearizado. Portanto é válido somente se  $\sigma_c = \{\}$ .

## Método direto de Lyapunov

Seja um sistema de equações do tipo

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = g(x_n, y_n)$$

com ponto fixo em  $(x^*, y^*) = (0, 0)$ . Se um ou mais autovalores, tiverem módulo igual a 1, pode-se tentar o método direto de Lyapunov.

Por exemplo, a matriz jacobiana do sistema

$$x_{n+1} = \frac{y_n}{1 + y_n^2}$$

$$y_{n+1} = \frac{x_n}{1 + y_n^2}$$

possui autovalores  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ .

### Definição (Função de Lyapunov)

Uma função  $V(x_n, y_n)$  contínua definida na vizinhança do ponto fixo  $(0, 0)$  é uma **função de Lyapunov** se for positiva definida em uma bola  $B$  centrada no ponto fixo e se nesta região

$$\Delta V = V(x_{n+1}, y_{n+1}) - V(x_n, y_n) \leq 0.$$

- Se  $\Delta V \leq 0$  para  $(x_n, y_n) \neq \vec{0} \in B$ , então  $(0, 0)$  é um ponto fixo **localmente estável**.
- Se  $\Delta V = 0$  somente em  $(0, 0)$ , então este ponto fixo é **localmente assintoticamente estável**.
- Se  $B$  cobre todo o espaço de fases, temos estabilidade **global**.



## Exemplo

Para o exemplo acima,

$$x_{n+1} = \frac{y_n}{1 + y_n^2}$$
$$y_{n+1} = \frac{x_n}{1 + y_n^2},$$

temos

$$V(x_n, y_n) = x_n^2 + y_n^2$$

$$V(x_{n+1}, y_{n+1}) = \frac{y_n^2}{(1 + y_n^2)^2} + \frac{x_n^2}{(1 + y_n^2)^2}$$

$$= \frac{x_n^2 + y_n^2}{(1 + y_n^2)^2} = \frac{V(x_n, y_n)}{(1 + y_n^2)^2} \leq V(x_n, y_n)$$

$\geq 1$

$\rightarrow$  Globalmente estável

## Exemplo - unidimensional

Para o exemplo acima,

$$x_{n+1} = f(x_n) = ax_n - b(x_n)^{2k+1},$$

com  $a = 1$ ,  $b > 0$  e  $k = 1, 2, 3, \dots$

Ponto fixo:

$$x^* = f(x^*)$$

$$x^* = x^* - b(x^*)^{2k+1}$$

$$\underline{x^* = 0} \quad \text{ou}$$

$$x^* = x^* - b(x^*)^{2k}$$

$$\rightarrow x^* = 0$$

0 é o único ponto fixo.

$$\frac{df}{dx} = a - (2k+1)b x^{2k}$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x^*=0} = a = 1 \rightarrow \text{estabilidade indeterminada.}$$

Tomando a função de Lyapunov como

$$V(x_n) = x_n^2$$

$$\begin{aligned} V(x_{n+1}) - V(x_n) &= x_{n+1}^2 - x_n^2 \\ &= [x_n - b(x_n)^{2k+1}]^2 - x_n^2 \end{aligned}$$

## Exemplo - unidimensional

$$\begin{aligned}V(x_{n+1}) - V(x_n) &= [x_n - b(x_n)^{2k+1}]^2 - x_n^2 \\&= \left[ \cancel{x_n^2} - 2b(x_n)^{2k+2} + b^2(x_n)^{4k+2} \right] - \cancel{x_n^2} \\&= b x_n^{2k+2} \left[ -2 + b(x_n)^{2k} \right] < 0 \\&\quad ?\end{aligned}$$

$$e^{-} < 0 \quad \text{se}$$

$$b(x_n)^{2k} < 2$$

$$(x_n)^{2k} < \frac{2}{b}$$

$$|x_n| < \left( \frac{2}{b} \right)^{1/2k}$$

$x^* = 0$  é localmente  
assintoticamente  
estável

## Teoria da variedade central

Seja o mapa  $n$ -dimensional ( $n = c + e$ )

$$\vec{x}_{n+1} = \overset{\leftrightarrow}{A} \vec{x}_n + \vec{f}(\vec{x}_n, \vec{y}_n) \quad (3)$$

$$\vec{y}_{n+1} = \overset{\leftrightarrow}{B} \vec{y}_n + \vec{g}(\vec{x}_n, \vec{y}_n) \quad (4)$$

com ponto fixo na origem. As derivadas parciais de primeira ordem de  $\vec{f}$  e  $\vec{g}$  se anulam neste ponto (não têm parte linear).

- $\overset{\leftrightarrow}{A}$ : matriz “central”  $c \times c$ , cujos autovalores têm módulo igual a 1.
- $\overset{\leftrightarrow}{B}$ : matriz “estável”  $e \times e$ , cujos autovalores têm módulo **menor** que 1.

Assuma que a parte linear está na forma canônica de Jordan.

⇒ Teoremas de Carr, com devidas adaptações, valem também para mapas. Existe uma variedade central que pode ser representada por

$$\vec{y}_n = \vec{h}(\vec{x}_n)$$

## Teoria da variedade central

A dinâmica, restrita à variedade central, é governada pelo mapa

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{A} \vec{x}_n + \vec{f}(\vec{x}_n, \vec{h}(\vec{x}_n)), \quad (5)$$

cuja estabilidade em  $(x^*, y^*) = (0, 0)$  é idêntica à do mapa original.

Substituindo (5) em (4):

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{B} \vec{y}_n + \vec{g}(\vec{x}_n, \vec{y}_n)$$

$$\left( \begin{array}{l} \vec{y}_n = h(\vec{x}_n) \end{array} \right.$$

$$\vec{h}(\vec{x}_{n+1}) = \vec{B} h(\vec{x}_n) + \vec{g}(\vec{x}_n, h(\vec{x}_n))$$

$$\vec{h}(\vec{A} \vec{x}_n + \vec{f}(\vec{x}_n, h(\vec{x}_n))) = \vec{B} h(\vec{x}_n) + \vec{g}(\vec{x}_n, h(\vec{x}_n))$$

$\rightarrow h(\vec{x}_n)$  pode ser aproximada por um polinômio  $\mathcal{O}(\vec{x}_n)$  de grau igual a ou maior que 2.

## Exemplo

Determine a estabilidade do ponto fixo não hiperbólico do sistema

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -y_n^3 \end{bmatrix} \cdot = \begin{bmatrix} y_n \\ \frac{x_n}{2} + \frac{y_n}{2} - y_n^3 \end{bmatrix}$$

- Autovalores:  $\lambda_c = 1$ ,  $\lambda_e = -1/2$ .
- Para forma canônica de Jordan:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{P} \begin{bmatrix} \bullet & u \\ \bullet & v \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad \overset{\leftrightarrow}{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Nas coordenadas  $u, v$

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2(u_n - v_n)^3/3 \\ (u_n - v_n)^3/3 \end{bmatrix} \cdot = \begin{bmatrix} u_n - \frac{2}{3}(u_n - v_n)^3 \\ -\frac{v_n}{2} + \frac{1}{3}(u_n - v_n)^3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} A u_n + f(u_n, v_n) \\ B v_n + g(u_n, v_n) \end{bmatrix}$$

## Exemplo (cont.)

$$\vartheta = h(m) \approx \phi(m) = \alpha m^2 + \beta m^3 + o(m^4)$$

$$A=1 \quad f = -\frac{2}{3}(m-\vartheta)^3$$

$$B=-\frac{1}{2} \quad g = -\frac{1}{3}(m-\vartheta)^3$$

$$\vec{h} \left( A \vec{x}_n + \vec{f}(\vec{x}_n, h(\vec{x}_n)) \right) = B \vec{h}(\vec{x}_n) + g(\vec{x}_n, \vec{h}(\vec{x}_n))$$

$$x_n \rightarrow m \quad y_n \rightarrow \vartheta$$

$$h \left( m - \frac{2}{3} [m - h(m)]^3 \right) = -\frac{1}{2} h(m) + \frac{1}{3} [m - h(m)]^3$$

$$\alpha (m + o(m^2))^2 + \beta (m + o(m^3))^3 = -\frac{1}{2} (\alpha m^2 + \beta m^3) + \frac{1}{3} (m + o(m^2))^3$$

$$\alpha m^2 + \beta m^3 + o(m^4) = -\frac{\alpha}{2} m^2 - \frac{\beta}{2} m^3 + \frac{m^3}{3} + o(m^4)$$

### Exemplo (cont.)

$$u^2 \left( \alpha + \frac{\alpha}{2} \right) + u^3 \left( \beta + \frac{\beta}{2} - \frac{1}{3} \right) + O(u^4) = 0$$

$$\frac{3\alpha}{2} u^2 + \left( \frac{3\beta}{2} - \frac{1}{3} \right) u^3 + O(u^4) = 0$$

$$\boxed{\alpha = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3\beta}{2} - \frac{1}{3} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{3\beta}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\beta = \frac{2}{9}}$$

$$h(u) \approx \alpha u^2 + \beta u^3 + O(u^4)$$

$$= \frac{2}{9} u^3 + O(u^4)$$

Fluxo restrito à variedade central:

$$u_{n+1} = A u_n + f(u_n, h(u_n))$$

$$= u_n - \frac{2}{3} [u_n - h(u_n)]^2$$

$$= u_n - \frac{2}{3} \left[ u_n - \frac{2}{9} u_n^3 \right]^2 + O(u^4)$$

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2}{3} u_n^3$$

↳ Baseado em um tempo anterior (unidimensional)

→ Localmente assintoticamente estável.

$$\left[ \begin{array}{l} x_{n+1} = a x_n - b (x_n)^{2k+1} \\ a < 1, b > 0 \end{array} \right]$$



## Referências

- 1 Luiz H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos*, 3ª ed., Editora Livraria da Física, São Paulo (2011)
- 2 Artem S. Novozhilov. “22. *Two dimensional discrete dynamical systems*”  
<https://www.ndsu.edu/pubweb/~novozhil/Teaching/484%20Data/022.pdf>  
(acessado em 14/09/2020)
- 3 Hiroki Sayama, *Introduction to the Modeling and Analysis of Complex Systems*, <https://textbooks.opensuny.org/download/introduction-to-the-modeling-and-analysis-of-complex-systems-sayama-pdf/>