Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein[1]

[1] Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

1. **Sistemas não-lineares de tempo discreto**
   - Caso unidimensional
   - Estabilidades dos Pontos Fixos

2. **Coeficiente de Lyapunov**

Mapas

Seja o mapa:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

- **Órbita**: sequência do pontos gerados pelo mapa $(x_0, x_1, .., x_n)$
- **Ponto fixo**: x^* é chamado de ponto fixo do mapa se

$$x_{n+1} = x_n = x^*$$

ou

$$x^* = f(x^*).$$

Ex.: os pontos fixos do mapa $x_{n+1} = (x_n)^3$ são -1, 0, +1.

Estabilidade dos Pontos Fixos

A estabilidade de um ponto fixo x^* está relacionada com o fato de se um dado ponto x_n na sua vizinhança se aproxima ou se afasta do ponto fixo à medida que o mapa é iterado.

- aproximação: ponto fixo **assintoticamente estável**.
- afastamento: ponto fixo **instável**

Seja um x_n próximo ao ponto fixo x^*,

$$x_n = x^* + \epsilon_n,$$

com $\epsilon_n \equiv x_n - x^*$ e $|\epsilon_n| \ll 1$.
Voltando ao mapa, temos

$$x_{n+1} = f(x_n) = f(x^* + \epsilon_n).$$

Também, podemos escrever que

$$x_{n+1} = x^* + \epsilon_{n+1}.$$

Estabilidade dos Pontos Fixos

Comparamos a diferença entre o ponto fixo e a primeira iteração (partindo de x_n), $|\epsilon_{n+1}|$ com a diferença entre o ponto fixo e o ponto original x_n, $|\epsilon_n|$. Se obtivermos que para qualquer n, $|\epsilon_{n+1}| < |\epsilon_n|$, o ponto fixo x^* será estável; caso contrário, $|\epsilon_{n+1}| > |\epsilon_n|$ será instável. A obtenção de um critério para a estabiidade do ponto fixo parte da suposição de que a diferença $|\epsilon_n|$ é pequena, permitindo que seja feita uma expansão em torno de x^*, ou seja,

$$x_{n+1} = f(x_n) = f(x^* + \epsilon_n) \approx f(x^*) + \left(\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} \right) \epsilon_n + O(\epsilon_n)^2.$$

$$\cancel{x^*} + \varepsilon_{n+1} \simeq \cancel{f(x^*)} + \frac{df}{dt} \varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2)$$

Utilizando em conjunto com

$$f(x_n) = x_{n+1} = x^* + \epsilon_{n+1},$$
$$x^* = f(x^*).$$

Estabilidade dos Pontos Fixos

Obtemos,

$$
\begin{aligned}
f(x_n) = f(x^* + \epsilon_n) \approx f(x^*) + \left(\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} \right) \epsilon_n + \ldots \\
x^* + \epsilon_{n+1} \approx x^* + \left(\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} \right) \epsilon_n + \ldots \\
\epsilon_{n+1} = \lambda \, \epsilon_n
\end{aligned}
$$

onde

$$
\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} .
$$

Para que a condição $|\epsilon_{n+1}| < |\epsilon_n|$ seja verificada teremos que $-1 < \lambda < 1$. Esta é a condição de estabilidade assintótica.

Órbitas periódicas

- Órbita de período-k é composta por k pontos diferentes $x_1, x_2, \ldots, x_k$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= f(x_1) \\
x_3 &= f(x_2) = f(f(x_1)) = f^{(2)}(x_1) \\
&\vdots \\
x_k &= f(x_{k-1}) = f(f(x_{k-2})) = \ldots = f^{(k-1)}(x_1) \\
x_{k+1} &= f(x_k) = f(f(x_{k-1})) = \ldots = f^{(k)}(x_1) = x_1
\end{aligned}
$$

- $f^{(j)}$: j-ésima iteração sucessiva a partir de x_1

Uma órbita de período-2 é dada por:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= f(x_1) = f(f(x_2)) = f^{(2)}(x_2) \\
x_1 &= f(x_2) = f(f(x_1)) = f^{(2)}(x_1)
\end{aligned}
$$

$\rightarrow x_1 = f^{(2)}(x_1) = F(x_1)$

$= (f \circ f)(x_1)$

Estabilidade de órbitas periódicas

Para testar a estabilidade dos pontos fixos, devemos derivar $f^{(2)}(x) = f(f(x))$ e testar se $|f^{(2)}(x^*)| < 1$. A forma mais simples de fazer isto é por meio do uso da regra da cadeia para a derivada, isto é

$u = f(x)$

$$\lambda = \frac{df^{(2)}(x)}{dx} = \frac{df(f(x))}{dx} = \frac{df(u)}{du}\frac{du}{dx}, \tag{1}$$

$$\left.\frac{df^{(2)}(x)}{dx}\right|_{x=x_1^*} = \left.\frac{df(u)}{du}\right|_{u=f(x_1^*)} \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_1^*}. \tag{2}$$

$f^{(3)} = (f \circ f^{(2)})$

Como $f(u)$ é a própria $f(x)$, podemos reescrever como

$$\left.\frac{df^{(2)}(x)}{dx}\right|_{x=x_1^*} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=f(x_1^*)} \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_1^*}.$$

Estabilidade de órbitas periódicas

Notando que quando iteramos o mapa a partir de x_1^* obtemos x_2^*, ou seja, $x_2^* = f(x_1^*)$, temos

$$\lambda = \left.\frac{df^{(2)}(x)}{dx}\right|_{x=x_1^*} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_2^*} \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_1^*},$$

o que simplifica bastante o cálculo da estabilidade dos pontos fixos.

Mapa Logístico

$$x_{n+1} = f(x_n) = 4rx_n(1 - x_n).$$

Esta equação não-linear tenta descrever dois efeitos populacionais:

- reprodução, onde a população aumenta a uma taxa proporcional à população atual, para tamanhos populacionais pequenos;
- decréscimo ou mortalidade da população para tamanhos populacionais maiores, onde a taxa de mortalidade depende do tamanho atual.

Entretanto, para que a equação tenha significado real, os valores de x não podem ser negativos. Para tanto, o domínio da equação que pode ser utilizado para os estudos populacionais tem que estar restrito à região $[0, 1]$.

Mapa Logístico

$x_{n+1} = f(x_n) = 4\lambda x_n (1 - x_n)$

Pontos fixos:

$x^* = f(x^*)$

$x^* = 4\lambda x^* (1 - x^*)$

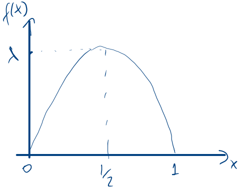
$\boxed{x_1^* = 0}$

ou

$1 = 4\lambda (1 - x^*)$

$\frac{1}{4\lambda} = 1 - x^*$

$\boxed{x_2^* = 1 - \frac{1}{4\lambda}}$



Estabilidade dos pontos fixos:

$|f'(x^*)| < 1$

$f'(x) = 4\lambda(1 - 2x)$

- $f'(x_1^*) = f'(0) = 4\lambda$

$|4\lambda| < 1$

$-1 < 4\lambda < 1$

$\boxed{0 < \lambda < \frac{1}{4}} \rightarrow x_1^* = 0$ estável

$\uparrow$

$\lambda \geq 0$

- $f'(x_2^*) = \dots$

$= 2 - 4\lambda$

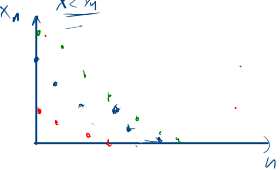
$-1 < 2 - 4\lambda < 1$

$\vdots$

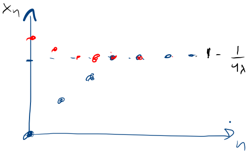
$\boxed{\frac{1}{4} < \lambda < \frac{3}{4}} \rightarrow x_2^*$ é estável.

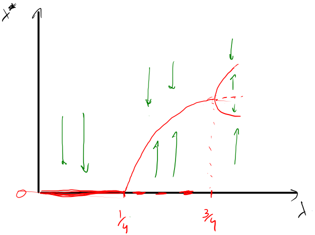
Mapa Logístico

$\lambda < 1/4$



$\frac{1}{4} < \lambda < 3/4$:





$-1 < 4\lambda < 1$

$\boxed{0 < \lambda < \frac{1}{4}} \to x_1^* = 0$ estável

$\lambda \geq 0$

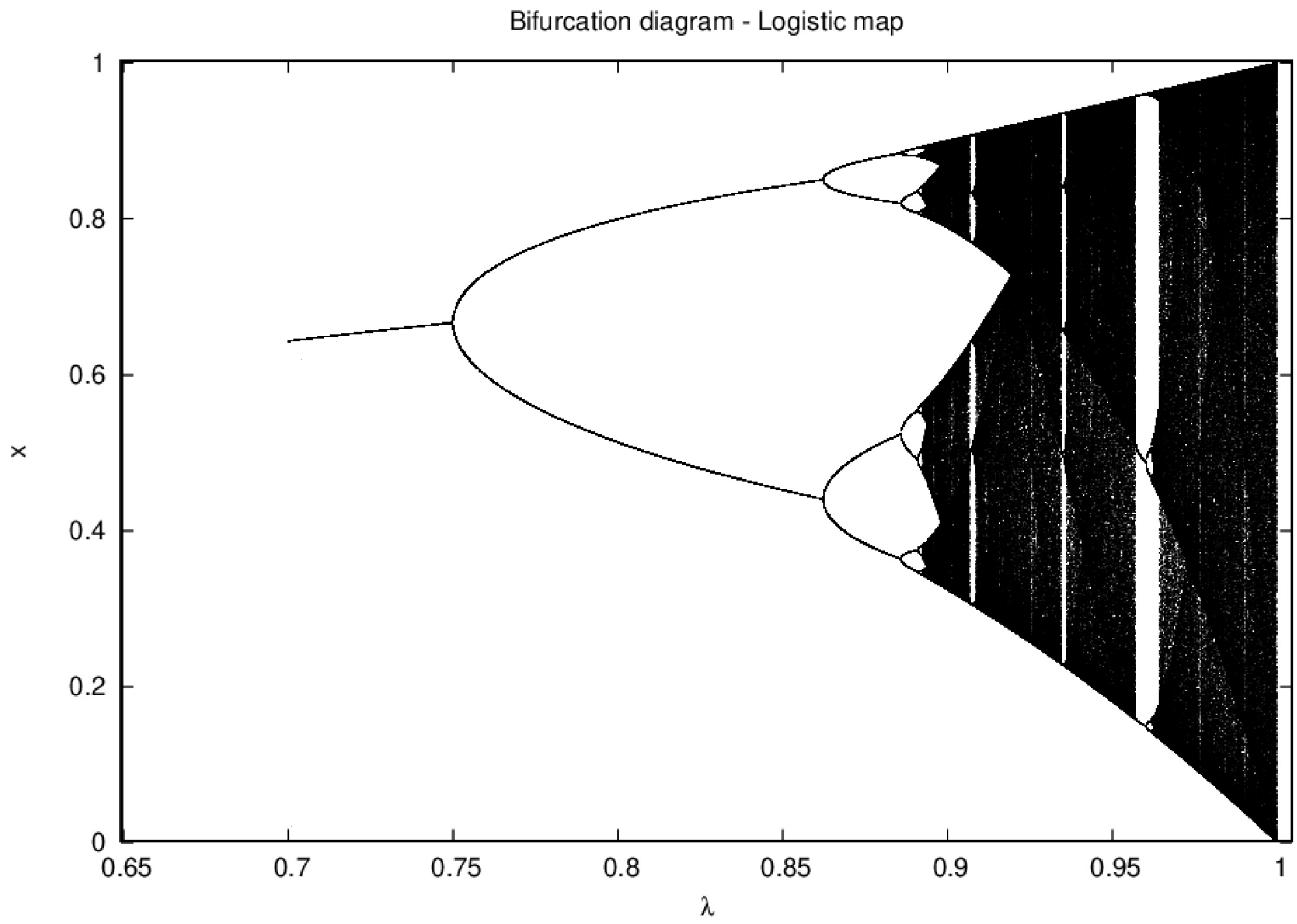
$f'(x_2^*) = \dots$

$= 2 - 4\lambda$

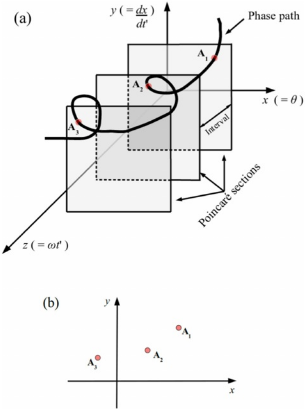
$-1 < 2 - 4\lambda < 1$

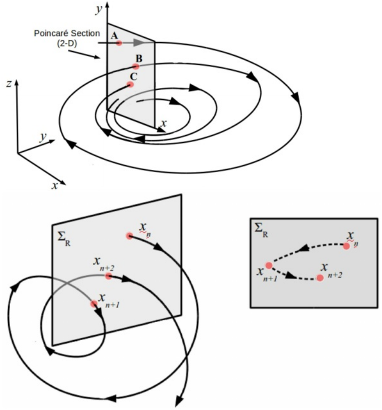
$\vdots$

$\boxed{\frac{1}{4} < \lambda < \frac{3}{4}} \to x_2^*$ é estável.


Bifurcation diagram - Logistic map
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
x
0.65
0.7
0.75
0.8
0.85
0.9
0.95
1
λ

Seção de Poincaré: de sistemas contínuos para mapas





M. Cattani, I. L. Caldas, S. L. de Souza, K. C. Iarosz, *Deterministic Chaos Theory: Basic Concepts*. Rev. Bras. Ensino Fís. **39** no.1 São Paulo 2017 Epub Oct 17 (2016) http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2016-0185

Diagrama de bifurcação do pêndulo forçado e amortecido

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\beta\frac{d\theta}{dt}+\omega_0^2\sin(\theta)=\gamma\,\omega_0^2\cos(\omega t)$$

Condições iniciais e parâmetros:

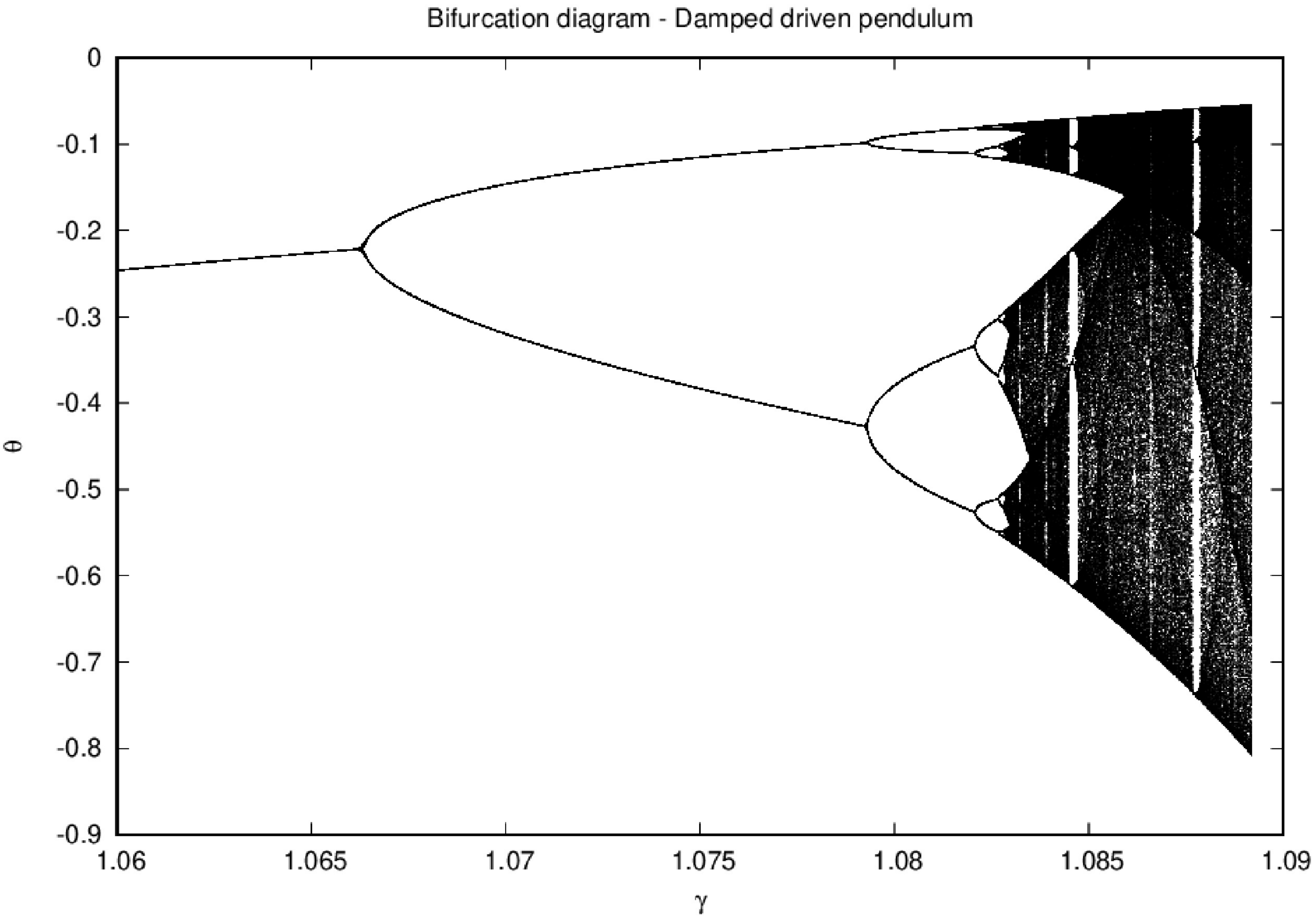
$$\theta(0)=-\frac{\pi}{2}$$
$$\frac{d\theta}{dt}(0)=0$$
$$\omega=2\pi$$
$$\omega_0=\frac{3}{2}\omega$$
$$\beta=\frac{1}{4}\omega_0$$

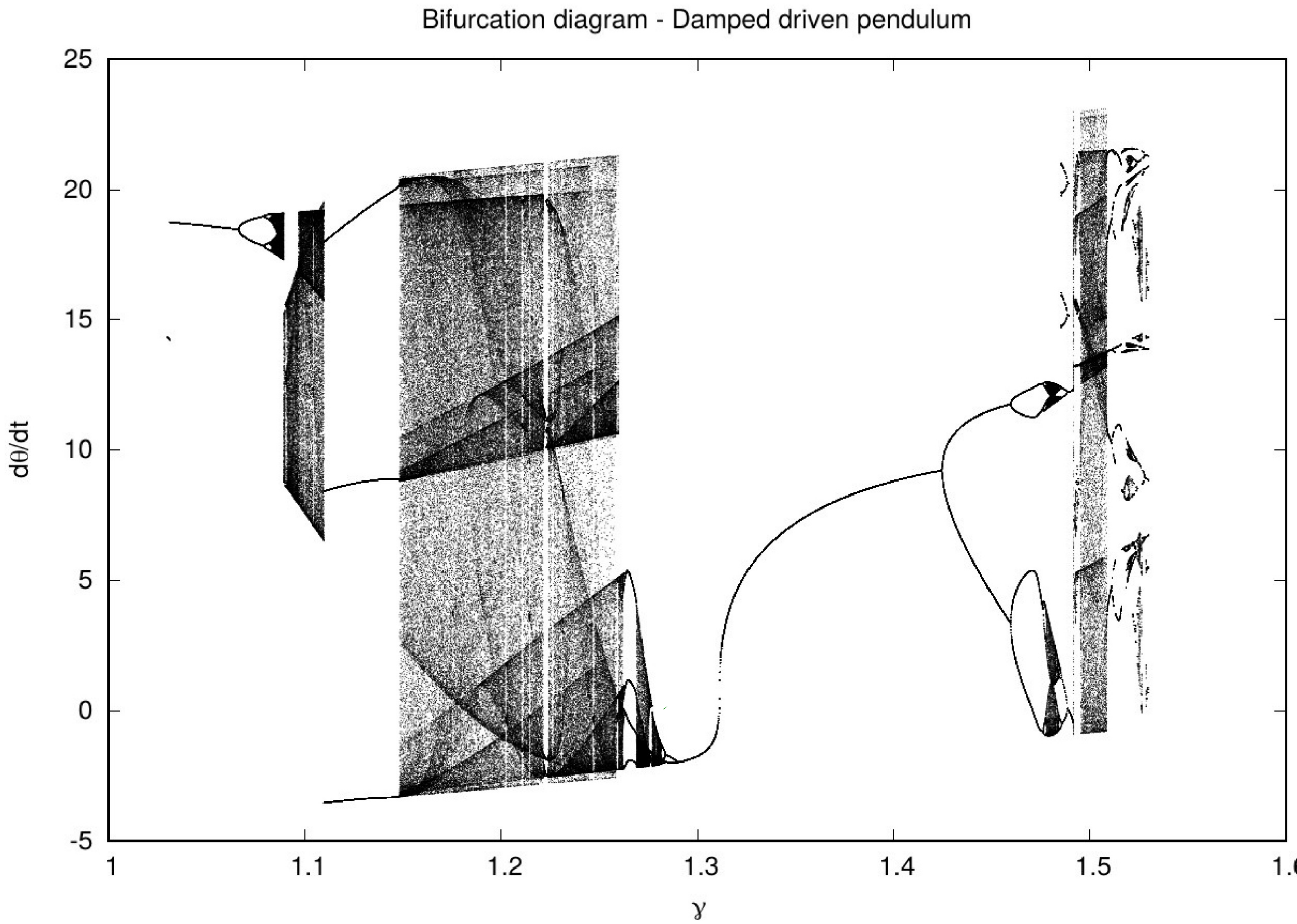
Tempos utilizados para construir o diagrama de bifurcação:

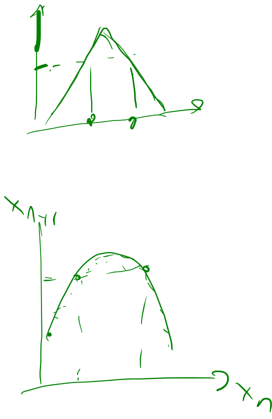
$$\theta(t_0),\theta(t_0+1),\theta(t_0+2),\ldots\theta(t_0+400)$$
$$t_0=500$$

$$\gamma=1.0600\ldots1.0892$$

Mais detalhes em John R. Taylor, Classical Mechanics, p 483-487


Bifurcation diagram - Damped driven pendulum
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
-0.7
-0.8
-0.9
θ
1.06
1.065
1.07
1.075
1.08
1.085
1.09
γ


Bifurcation diagram - Damped driven pendulum
25
20
15
10
5
0
-5
dθ/dt
1
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
1.6
γ


x n+1
x n

Expoente de Lyapunov

A assinatura de um sistema caótico é a sensibilidade quanto às condições iniciais. A taxa com que as distâncias entre duas trajetórias aumenta com o tempo pode ser caracterizada pelo expoente de Lyapunov.
Consideremos duas trajetórias que iniciam, correspondentemente, nas posições x_0 e $x_0+\delta$. As duas trajetórias se relacionam através dos valores de x seguintes: $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ e, correspondentemente, $x_0+\delta, x_1+\delta_1, x_2+\delta_2, ..., x_n+\delta_n$. Assumindo que δ_n é pequeno, podemos expandir $f(x)$ ao redor de x_n, obtendo:

$$f(x_n+\delta_n) = f(x_n) + f'(x_n)\delta_n \rightarrow \cancel{x_{n+1}} + \delta_{n+1} = \cancel{x_{n+1}} + f'(x_n)\delta_n,$$

que resulta em:

$$\delta_{n+1} = f'(x_n)\delta_n.$$

Coeficiente de Lyapunov

Podemos utilizar esta forma recursiva para obtermos a razão entre a distância entre as duas trajetórias após n passos (δ_n) e a distância inicial (δ_0):

$$\left|\frac{\delta_n}{\delta_0}\right| = \prod_{i=0}^{n-1} \left|f'(x_i)\right| .$$

Assumindo que a quantidade acima varie exponencialmente para valores grandes de n, temos:

$$\left|\frac{\delta_n}{\delta_0}\right| = e^{\Lambda_L\, n},$$

onde Λ_L é o chamado expoente de Lyapunov, definido como:

$$\Lambda_L \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \left|f'(x_i)\right| . \tag{3}$$

Mapa Logístico

Exemplo 10.1.:

$$x_{i+1} = f(x_i)$$

→ Mostrar que Λ é negativo se a solução aleatória é periódica de período p.

$$\Lambda = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \ln \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i}$$

→ Desprezo transiente e suponho que estou na órbita periódica.

$$\Lambda = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \ln\left(\left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} \right)$$

$$= \frac{1}{p} \ln \left(\prod_{i=0}^{p-1} \left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} \right)$$

$$= \frac{1}{p} \ln \left| \frac{df^{(p)}}{dx} \right|_{x=x_0}$$

propriedade da derivada de função composta

→ Se x_0 pertence à órbita estável

$$\left| \frac{df^{(p)}}{dt} \right| < 1 \Rightarrow \ln\left(\left| \frac{df^{(p)}}{dx} \right|_{x=x_0} \right) < 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Lambda < 0}}$$

Se $\left|\dfrac{df^{(p)}}{dx}\right|_{x=x_n} = 0 \Rightarrow \Lambda \to -\infty$

$\hookrightarrow$ órbita superestável

Mapa logístico

Exemplo 10.2: $x_{n+1} = 4\lambda x_n(1-x_n)$

a) $x_1^* = 1 - \dfrac{1}{4\lambda}$ estável, $p=1$

em $\dfrac{1}{4} < \lambda < \dfrac{3}{4}$

$$\Lambda = \frac{1}{p} \ln \left|\frac{df}{dx}\right|_{x_1^*}$$

$$\Lambda = \ln |F'(x_1^*)|$$

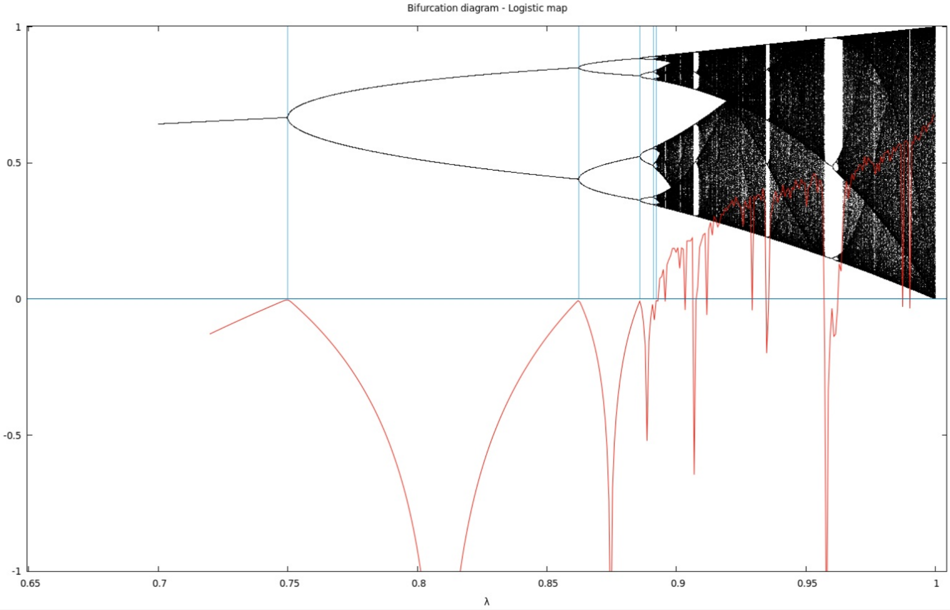
$$= \ln |2 - 4\lambda|$$

- Se $\lambda \to \frac{1}{4}$: $\Lambda \to \ln(1) = 0$
- Se $\lambda \to \frac{3}{4}$: $\Lambda \to \ln|-1| = 0$
- Se $\lambda = \frac{1}{2}$: $\Lambda \to -\infty$

$$x_1^* = 1 - \frac{1}{4(1/2)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

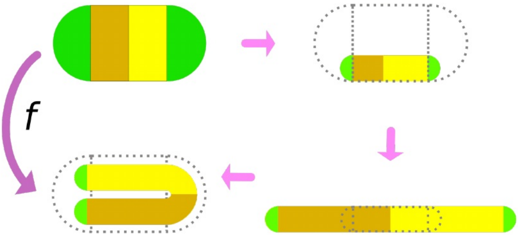
b) Para $\dfrac{3}{4} < \lambda < \dfrac{1+\sqrt{6}}{4}$ $\nearrow$ estabilidade da órbita de período 2

$$\Lambda = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{dF^{(2)}}{dx}\right|_{x_2^*} = \dots = \frac{1}{2} \ln |-16\lambda^2 + 8\lambda + 4|$$


Bifurcation diagram - Logistic map
1
0.5
0
-0.5
-1
0.65
0.7
0.75
0.8
0.85
0.9
0.95
1
λ

Esticamentos e dobras

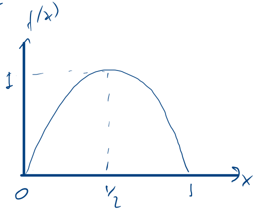
- O atrator ocupa um volume finito no espaço de fase.
- Trajetórias vizinhas devem se distanciar exponencialmente com o passar do tempo e permanecerem confinadas. Como isso é possível?
- Contração em uma direção e esticamento em outra.



Esticamentos e dobras - Mapa logístico

$$x_{n+1} = f(x_n) = 4\lambda x_n(1 - x_n)$$

Se $\lambda = 1$



$[0; \tfrac{1}{2}] \xrightarrow{f} [0, 1]$

Esticamento

$[\tfrac{1}{2}; 1] \xrightarrow{f} [1, 0]$

esticamento e dobra

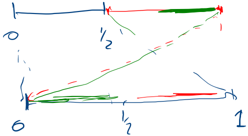
↳ os pontos são invertidos

$f(0) = 0$

$f(\tfrac{1}{2}) = 4\,\tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{2}\right)$

$= 2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$

$f(1) = 4 \cdot 1(1-1) = 0$



Referências

1. Luiz H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos*, 3^a ed., Editora Livraria da Física, São Paulo (2011)
2. Weisstein, Eric W. "Lorenz Attractor."From MathWorld–A Wolfram Web Resource.
   `https://mathworld.wolfram.com/LorenzAttractor.html`
   (acessado em 08/09/2020)