Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein[1]

[1]Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

1. Bifurcações homoclínica e heteroclínica

Exemplo 1

Ex.:

$$\frac{dx}{dt} = y \qquad = f(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = x - x^3 \qquad = g(x,y)$$

é um sistema hamiltoniano. $\rightarrow$ Existe uma "energia"

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y} = y \rightarrow H(x,y) = \dfrac{y^2}{2} + F(x) \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = x - x^3 \rightarrow H(x,y) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} + G(y) \end{cases} \Rightarrow H(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C$$

constante

dado $H(x_0, y_0)$ $\rightarrow$ a dinâmica é tal que

$$H(x(t), y(t)) = H(x_0, y_0) \rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} = E_0$$

Exemplo 1 (cont.)

Pontos fixos

$f(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow \boxed{y^* = 0}$

$g(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow x^*(1 - x^{*2}) = 0$

$\boxed{x^* = 0}$ ou

$x^{*2} = 1 \to \boxed{x^* = \pm 1}$

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{bmatrix}_{\vec{x}^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{bmatrix}_{\vec{x}^*}$$

$$\overleftrightarrow{A}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \to$$

Autovalores: $\det(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I}) = 0$

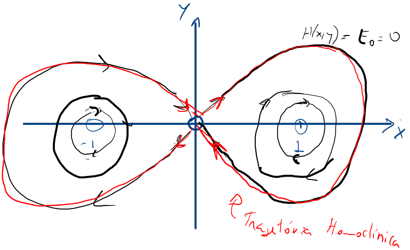
$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2 - 1 = 0 \to \boxed{\lambda = \pm 1} \to$ Ponto de sela

$$\overleftrightarrow{A}_{(1,0)} = \overleftrightarrow{A}_{(-1,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \to \text{Autovalores:}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \to \lambda^2 + 2 = 0$$

$\boxed{\lambda = \pm i\sqrt{2}} \to$ Centros



Definição (Ponto homoclínico)

É um ponto que se encontra em uma trajetória que é simultaneamente variedade estável e instável de um único ponto de sela.

Definição (Trajetória homoclínica)

É a trajetória percorrida por um ponto homoclínico. É caracterizada pelo fato de seus conjuntos α-limite e ω-limite serem o ***mesmo*** *ponto de sela.*

Exemplo 2

Ex.:

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = x^3 - x$$

é também um sistema hamiltoniano.

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$$

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3x^2-1 & 0 \end{bmatrix}_{\vec{x}^*}$$

$$\overleftrightarrow{A}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = \pm i$$

↪ CENTRO

$$\overleftrightarrow{A}_{(1,0)} = \overleftrightarrow{A}_{(-1,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}$$

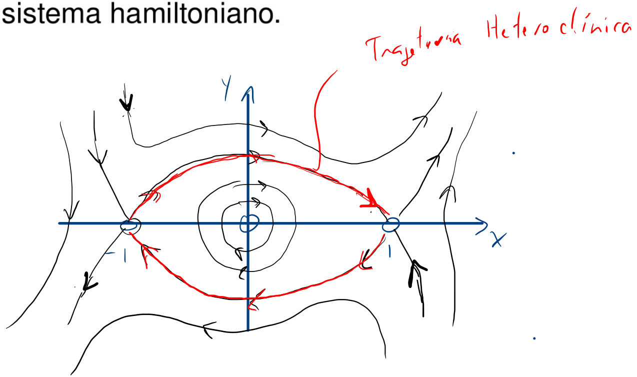
↪ SELAS

Exemplo 2

Ex.:

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = x^3 - x$$

é também um sistema hamiltoniano.



Definição (Ponto heteroclínico)

É um ponto que se encontra na variedade estável de um ponto de sela e esta variedade é tangente à variedade instável de um outro ponto de sela.

Definição (Trajetória heteroclínica)

*É a trajetória percorrida por um ponto heteroclínico. Conecta dois pontos de sela **distintos**.*

- Pelo teorema de Peixoto (aula 22), ambos os retratos de fase anteriores são estruturalmente instáveis, devido aos pontos não-hiperbólicos.
- Trajetórias homoclínica ou heteroclínica implicam instabilidade estrutural.
- Bifurcação homoclínica (heteroclínica): leva à destruição de uma trajetória homoclínica (heteroclínica). São **globais**, pois uma análise local dos autovalores não pode prevê-las.

Pêndulo linearmente amortecido e forçado

Exemplo 8.6

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \qquad = f(\theta,\omega)$$
$$\frac{d\omega}{dt} = -\text{sen}(\theta) - b\omega + F \;= g(\theta,\omega)$$

Varia o torque (constante externo)

Pontos fixos:

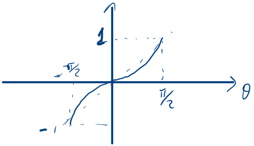
$$\begin{cases} f(\theta^*,\omega^*) = 0 \;\rightarrow\; \boxed{\omega^* = 0} \\ g(\theta^*,\omega^*) = 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow \; -\text{sen}\,\theta^* - b\omega^* + F = 0$

$\text{sen}\,\theta^* = F - \cancel{b\omega^*}$ $\to 0$

$\text{sen}\,\theta^* = F$

$\theta^* = \text{arc sen}(F) \iff F < 1$ para que exista θ^*

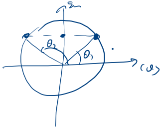


Pêndulo linearmente amortecido e forçado

* Se $F < 1$: existem

$$\theta^*_{1,2} = \text{arcsen}(F)$$

$0 < \theta_1^* < \pi/2$; $\pi/2 < \theta_2^* < \pi$



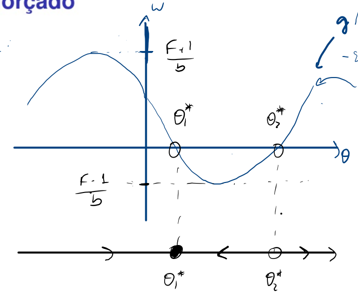
* Se $F > 1$: $\nexists$ θ_1^* e θ_2^*

$0 < F < 1$

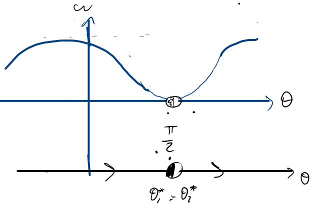
$g(\theta,\omega) = 0$

$-\text{sen}\,\theta - b\omega + F = 0$

$$\omega = \frac{F - \text{sen}\,\theta}{b}$$

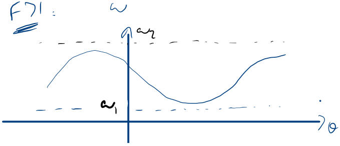


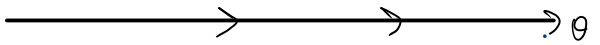
$F = 1$



Pêndulo linearmente amortecido e forçado

$F > 1$:



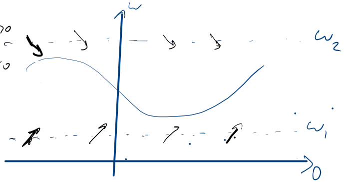


$\omega_1 < \omega < \omega_2$:

↳ $0 < \omega_1 < \frac{F-1}{b}$

↳ $\omega_2 > \frac{F+1}{b}$

$\frac{d\theta}{dt} > 0$, $\frac{d\omega}{dt} < 0$



$\frac{d\theta}{dt} > 0$, $\frac{d\omega}{dt} > 0$

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -\operatorname{sen}\theta - b\omega + F \end{cases}$$

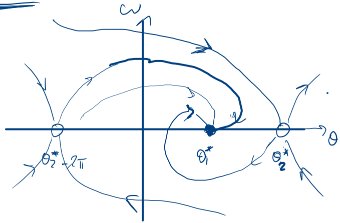
$\Rightarrow$ Região limitada, simplesmente conexa e não existe ponto fixo interno ($F > 1$)

$\Rightarrow$ Existe trajetória fechada em $\omega_1 < \omega < \omega_2$

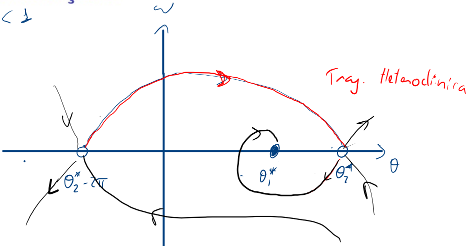
Pêndulo linearmente amortecido e forçado

Esta conclusão vem do Teorema de Poincaré - Bendixon. $\omega_1 < \omega < \omega_2$ serve como região de aprisionamento

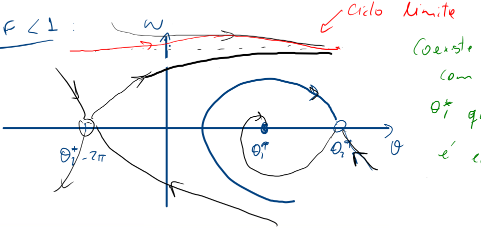
$F < F_c$



$F = F_c < 1$



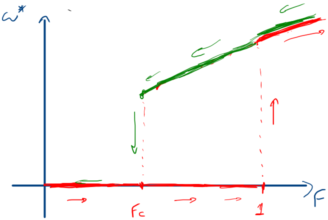
$F_c < F < 1$



Coexiste com θ_1^* que é estável.

Pêndulo linearmente amortecido e forçado

Diagrama de Bifurcação



HISTERESE: Comportamento do sistema depende da história

Método de Melnikov (1963)

- Prova a existência de bifurcações homoclínica ou heteroclínica em sistemas hamiltonianos perturbados.

Seja um sistema autônomo

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(\vec{x}) + \epsilon g_1(\vec{x}) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(\vec{x}) + \epsilon g_2(\vec{x}),\end{aligned}$$

onde $0 < \epsilon \ll 1$, $\vec{x} = (x_1, x_2)$ e $\vec{f} = (f_1, f_2)$ é um campo hamiltoniano:

$$f_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2} \qquad f_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}.$$

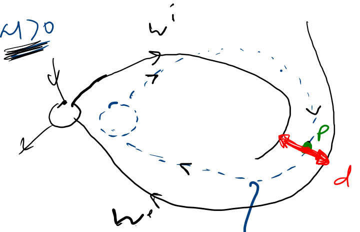
Assuma que exista um ponto de sela para qualquer valor de ϵ e que para $\epsilon = 0$ há trajetória homoclínica $\vec{x}(t) = \vec{x}_0(t)$. No interior desta trajetória há um centro não-linear, com uma família de trajetórias fechadas.

Função de Melnikov

- Para $\epsilon \neq 0$, a trajetória homoclínica existe se e somente se

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f_1(\vec{x})g_2(\vec{x}) - f_2(\vec{x})g_1(\vec{x})\right]\Big|_{\vec{x}(t)=\vec{x}_0(t)} dt$$

se anula para alguma combinação de valores dos parâmetros do sistema.



$$d = \frac{\varepsilon M}{|\vec{f}(P)|} + O(\varepsilon^2)$$

$\varepsilon = 0 \to \vec{x}_0(t)$

trajetória homoclínica

Exercícios

Monteiro: (cap. 8)
8.3, 8.8, 8.10, 8.11, 8.13, 8.18, 8.19, 8.20, 8.21, 8.23

Referências

1. Luiz H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos*, 3^a ed., Editora Livraria da Física, São Paulo (2011)