

# Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

## 1 Bifurcações de codimensão um

- Bifurcação transcritical
- Bifurcação de forquilha (*Pitchfork*)
- Bifurcação de Hopf

## Bifurcação transcritical

- É a bifurcação em que há troca de estabilidade entre pontos críticos já existentes.

Ex.:

$$\frac{dx}{dt} = f_{\mu}(x) = \mu x - x^2$$

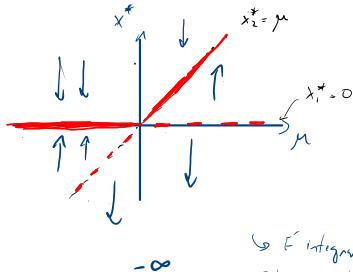
Pontos críticos:  $x^*(\mu - x^*) = 0$   
 $x_1^* = 0$  e  $x_2^* = \mu$

Estabilidade:  $\lambda = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x^*} = \mu - 2x$

$x_1^* = 0$ :  $\lambda_1 = \mu$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{ESTÁVEL se } \mu < 0 \\ \text{INSTÁVEL se } \mu > 0 \end{array} \right.$

$x_2^* = \mu$ :  $\lambda_2 = -\mu$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{INSTÁVEL se } \mu < 0 \\ \text{ESTÁVEL se } \mu > 0 \end{array} \right.$

Dirig. de bifurcação



↳ É integrável,  
Solução analítica  
no INRO. É mais  
complicado obter os  
limites da sol.

## Bifurcação transcritical

⇒ Estudar o exemplo 82 assin

## Bifurcação de forquilha (*Pitchfork*)

- Ocorre em sistemas físicos com alguma simetria. Dois pontos fixos passam a existir ou deixam de existir ao mesmo tempo.

Forma normal:

$$\frac{dx}{dt} = f_{\mu}(x) = \mu x - x^3 \quad (\text{simetria: } x \rightarrow -x)$$

\* Pontos de equilíbrio:

$$x^* (\mu - x^2) = 0$$

$$\underline{x_1^* = 0} \quad \text{ou} \quad \underline{x_{2,3}^* = \pm \sqrt{\mu}}$$

? apenas se  $\mu > 0$

\* Estabilidade:

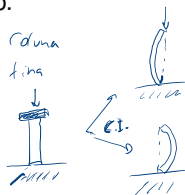
$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x^*} < 0 \quad \rightarrow \quad f'(x) = \mu - 3x^2$$

$$f'(x_1^*) = \mu$$

- Estável se  $\mu < 0$
- Instável se  $\mu > 0$

$$f'(x_{2,3}^*) = -2\mu$$

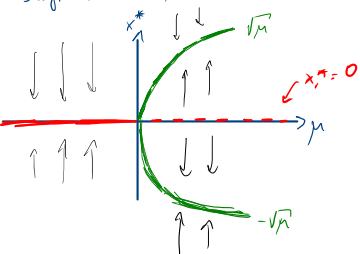
- Estável se  $\mu > 0$
- Instável se  $\mu < 0$



Euler (1744)

## Bifurcação de forquilha (Pitchfork)

Diagrama de bifurcação

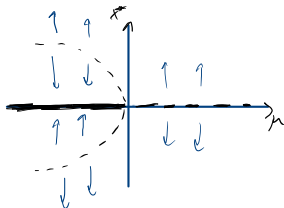


→ SUPERCRÍTICA: Surgem novos pontos críticos com o aumento de  $\mu$ .

Bifurcação de forquilha subcrítica

$$\frac{dx}{dt} = \mu x + x^3$$

Pontos de eq:  $x_{1,2}^* = 0$ ,  $x_{3,4}^* = \pm\sqrt{-\mu}$   
 e existem se  $\mu < 0$



→ Pontos de eq. Somem com aumento de  $\mu$ .

⇒ Além disso  
8.3

## Bifurcação de Hopf

- Caracterizada por possuir um par de autovalores imaginários puros no ponto de bifurcação.

Ex.: O sistema 7.20 (Monteiro)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) = -y + x(\mu - x^2 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) = +x + y(\mu - x^2 - y^2)\end{aligned}$$

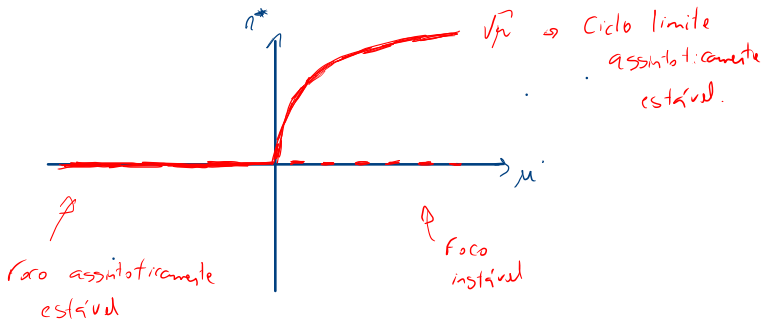
possui ponto de equilíbrio único na origem, com autovalores  $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$  (aula 20). Em coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= r(\mu - r^2) \\ \frac{d\theta}{dt} &= 1\end{aligned}$$

## Bifurcação de Hopf

- $\mu > 0$ : ponto de equilíbrio na origem é **instável**. Existe ciclo-limite circular, **estável**, de raio  $r^* = \sqrt{\mu}$ .
- $\mu < 0$ : ponto de equilíbrio **assintoticamente estável** na origem.
- $\mu_c = 0$ : troca de estabilidade estrutural.

⇒ Ponto de bifurcação:  $(r^*, \mu_c) = (0, 0)$ .





## Bifurcação de Hopf

Forma normal (exercício 6.29):

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(\mu)x - \beta(\mu)y + [a(\mu)x - b(\mu)y](x^2 + y^2) + \mathcal{O}(5)$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta(\mu)x + \alpha(\mu)y + [b(\mu)x + a(\mu)y](x^2 + y^2) + \mathcal{O}(5)$$

- Autovalores na origem:  $\lambda_{1,2} = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$

Em coordenadas polares:

$$\frac{dr}{dt} = \alpha(\mu)r + a(\mu)r^3 + \mathcal{O}(5)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \beta(\mu) + b(\mu)r^2 + \mathcal{O}(4)$$

↳ termos do tipo  
 $x^{k_1} y^{k_2}$ ,  $k_1 + k_2 \geq 5$

## Bifurcação de Hopf

Considere que a bifurcação ocorre em  $\mu_c = 0$ . Assim,

- $\text{Re}\{\lambda\} = \alpha(0) = 0$
- $\text{Im}\{\lambda\} = \beta(0) \neq 0$

$$\alpha(\mu) = \cancel{\alpha(0)} + \left. \frac{d\alpha}{d\mu} \right|_{\mu=0} \mu + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2\alpha}{d\mu^2} \right|_{\mu=0} \mu^2 + \dots$$

$$\beta(\mu) = \beta(0) + \left. \frac{d\beta}{d\mu} \right|_{\mu=0} \mu + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2\beta}{d\mu^2} \right|_{\mu=0} \mu^2 + \dots$$

Substituir no sistema anterior:

$$\frac{dn}{dt} = \overbrace{\left( \frac{d\alpha}{d\mu} \right)_{\mu=0}}^d \mu n + \underbrace{\alpha(0)}_a n^3 + O(\mu^2 n, \mu n^3, n^5)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \beta(0) + \underbrace{\left( \frac{d\beta}{d\mu} \right)_{\mu=0}}_c \mu + \underbrace{\beta(0)}_b n^2 + O(\mu^2, \mu n^2, n^4)$$

Notação:

$$a \equiv \alpha(0) \quad \beta \equiv \beta(0)$$

$$b \equiv b(0)$$

$$\left. \frac{d\alpha}{d\mu} \right|_{\mu=0} \equiv d; \quad \left. \frac{d\beta}{d\mu} \right|_{\mu=0} \equiv c$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= d\mu n + a n^3 + \dots \\ \frac{d\theta}{dt} &= \beta + c\mu + b n^2 + \dots \end{aligned} \right\}$$

→ Hopf mostrou que este sistema simplificado se comporta de maneira equivalente ao sist. original para  $\mu \approx 0$

# Bifurcação de Hopf

## Teorema (Hopf)

Seja

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}_\mu(\vec{x}),$$

com  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , um sistema dinâmico tal que a origem é ponto de equilíbrio. Suponha que a matriz jacobiana tem um par de autovalores do tipo  $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$  com

$$\alpha(0) = 0, \quad \beta(0) \neq 0 \quad \text{e} \quad d \equiv \left. \frac{d\alpha}{d\mu} \right|_{\mu=0} \neq 0$$

e os demais autovalores tem um parte real negativo. Então a origem sofre uma bifurcação em  $\mu = 0$ . Existe trajetória fechada de raio  $r = \sqrt{-\mu d/a}$  em torno da origem quando  $\mu$  é perturbado ao redor do valor crítico  $\mu_c = 0$ . O ciclo é **assintoticamente estável** se  $a < 0$  e **instável** se  $a > 0$ .

- Este resultado é anterior ao desenvolvimento da teoria da variedade central.

## Bifurcação de Hopf

$$\mu_1^* = 0 \quad \text{e} \quad \mu_2^* = \sqrt{-\frac{\mu d}{a}}$$

→ Sobre  $\mu_2^*$ :  $\theta(t) = \left[ \beta + \mu \left( c - \frac{bd}{a} \right) \right] t + \theta(0)$

↳ Se  $\mu \rightarrow 0$ , período  $T = \frac{2\pi}{\beta}$   
(próximo à  
bifurcação)

Autovalor associado à parte radial

$$\lambda = d\mu + 3a(\mu^*)^2$$

## Bifurcação de Hopf

	$\mu > 0$		$\mu < 0$	
	$n_1^* = 0$	$n_2^*$	$n_1^*$	$n_2^*$
$d > 0; a > 0$	INSTÁVEL.	<del>∅</del>	ASSINT. ESTÁVEL	INSTÁVEL
$d > 0; a < 0$	INSTÁVEL	ASSINT. ESTÁVEL	ASSINT. ESTÁVEL	<del>∅</del>
$d < 0; a > 0$	ASSINT. EST.	INSTÁVEL	INSTÁVEL	<del>∅</del>
$d < 0; a < 0$	ASSINT. ESTÁVEL	<del>∅</del>	INSTÁVEL	ASSINT. ESTÁVEL

Autovalor associado à parte radial

$$\lambda = d\mu + 3a(n^*)^2$$

Teor. Hopf:

$a < 0 \rightarrow$  ciclo estável

$a > 0 \rightarrow$  ciclo instável

$a < 0$ : supercrítica

$a > 0$ : subcrítica.

# Bifurcação de Hopf subcrítica

$$\frac{dr}{dt} = r(\mu + 2r^2 - r^4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1$$

Pontos de equilíbrio:

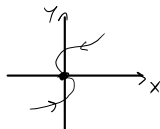
$$r^*(\mu + 2r^{*2} - r^{*4}) = 0$$

$$r_1^* = 0 \rightarrow \gamma = r^{*2}$$

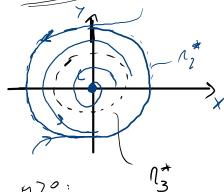
$$r_2^* = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \mu}} \leftarrow \text{só existe se } \mu > -1$$

$$r_3^* = \sqrt{1 - \sqrt{1 + \mu}} \text{ e só existe se } -1 < \mu < 0$$

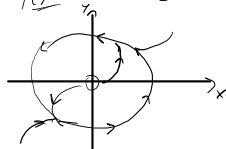
$\mu < -1$ :



$0 < \mu < -1$ :



$\mu > 0$ :



# Bifurcação de Hopf subcrítica



## Referências

- 1 Luiz H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos*, 3<sup>a</sup> ed., Editora Livraria da Física, São Paulo (2011)