

Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein¹

¹Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

1 **Equação de van der Pol**

2 **Equação de Liénard**

3 **Bifurcações em sistemas de tempo contínuo**

4 **Bifurcações de codimensão um**

- Bifurcação sela-nó
- Bifurcação transcritical

Table of Contents

1 Equação de van der Pol

2 Equação de Liénard

3 Bifurcações em sistemas de tempo contínuo

4 Bifurcações de codimensão um

- Bifurcação sela-nó
- Bifurcação transcritical

Equação de van der Pol

- Circuitos elétricos nos primeiros aparelhos de rádio

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

"atrito", ex $F(x) = \mu(x^2 - 1) > 0$

"amplificação" ex $F(x) = \mu(x^2 - 1) < 0$

$x^a y^b \rightarrow a+b$ ni $\rightarrow 2$
 $a+b \in \{0, 1, 2\}$

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) = y$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) = -\mu(x^2 - 1)y - x$$

$$\text{Divergente: } \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = -\mu(x^2 - 1)$$

Supondo $\mu > 0$

$|x| > 1 \rightarrow$ dissipativo

$|x| < 1 \rightarrow$ amplificativo.

\rightarrow ponto de equilíbrio

$$y^* = 0$$

\downarrow

$$x^* = 0$$

Equação de van der Pol

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{bmatrix}_{\vec{x}^*} = \dots =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$$

→ Autovalores: $\det[\vec{A} - \lambda \vec{I}] = 0$.

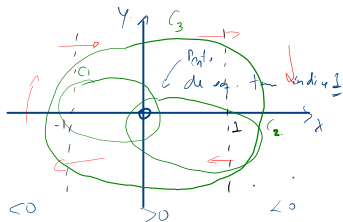
$$\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$$

$0 < \mu < 2$: Foco instável ($\text{Re}\{\lambda\} > 0$)

$\mu > 2$: nó instável

$-2 < \mu < 0$: Foco estável ($\text{Re}\{\lambda\} < 0$)

$\mu < -2$: nó estável

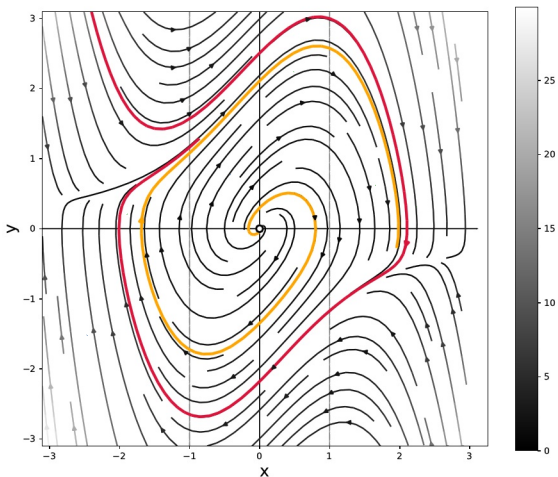


• $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = -\mu(x^2 - 1) \rightarrow$ muda de sinal (Bendixon)

• Teorema de índice de Poincaré; ou

Pelos 2 critérios se existir ciclo, ele deve ser como na figura

Retrato de fase: Equação de van der Pol



Revisitando o critério de Dulac

Dado um sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $b \equiv b(\mathbf{x})$, pode-se aplicar o Teorema de Green:

$$\iint_A \nabla \cdot (b\dot{\mathbf{x}}) dA = \oint_C b\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} dl = 0$$

\uparrow
 $\dot{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$

Se $\frac{\partial(bf)}{\partial x} + \frac{\partial(bg)}{\partial y}$

não muda de
Sinal em uma
região simplesmente
conexa, não há
ciclo limite.

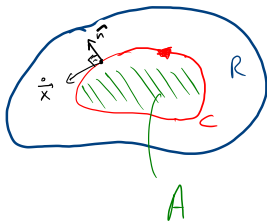


Table of Contents

1 Equação de van der Pol

2 Equação de Liénard

3 Bifurcações em sistemas de tempo contínuo

4 Bifurcações de codimensão um

- Bifurcação sela-nó
- Bifurcação transcritical

Equação de Liénard

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F(x)\frac{dx}{dt} + G(x) = 0$$

Teorema (Liénard, Levinson, Smith)

Existe um único ciclo limite assintoticamente estável se

- 1 $F(x)$ e $G(x)$ são continuamente diferenciáveis $\forall x$
- 2 $F(-x) = -F(x)$ (par)
- 3 $G(-x) = -G(x)$ (ímpar)
- 4 $G(x) > 0$ para $x > 0$
- 5 $H(x) \equiv \int_0^x F(s)ds$ tem uma única raiz positiva em $x = a$, é negativa para $0 < x < a$, é positiva não decrescente para $x > a$ e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = \infty$$

Equação de Liénard

- Van der Pol é um caso particular

$$F(x) = \mu (x^2 - 1) \quad : \text{par}$$

$$G(x) = x \quad : \text{ímpar}$$

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^x F(s) ds \\ &= \int_0^x \mu (s^2 - 1) ds \\ &= \mu \left(\frac{s^3}{3} - s \right) \Big|_0^x \\ &= \mu \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \\ &= \frac{\mu x}{3} (x^2 - 3) \end{aligned}$$

$$H(x^*) = 0$$

$$\hookrightarrow x^* = 0$$

$\hookrightarrow x^* = \pm\sqrt{3}$ e "a" do Teorema

$$\cdot \quad \Sigma \quad 0 < x < \sqrt{3} \quad .$$

$$\rightarrow H(x) < 0$$

$$\cdot \quad \Sigma \quad x > \sqrt{3} \quad .$$

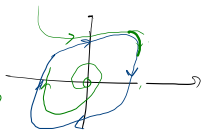
$$H(x) > 0$$

\hookrightarrow positiva e não decrescente.

Equação de Liénard

- Van der Pol é um caso particular

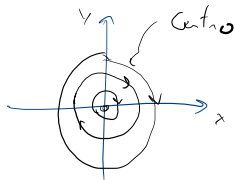
⇒ Possui um único ciclo limite
assintoticamente estável ($\mu > 0$)



Se $\underline{\mu = 0}$.

$$\leadsto \frac{d^2x}{dt^2} + 0 \frac{dx}{dt} + x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x \quad \rightarrow$$



trajetória fechadas
não isoladas

Table of Contents

1 Equação de van der Pol

2 Equação de Liénard

3 Bifurcações em sistemas de tempo contínuo

4 Bifurcações de codimensão um

- Bifurcação sela-nó
- Bifurcação transcritical

Definições

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}_\mu(\vec{x})$$

Definição (Bifurcação)

Mudança qualitativa no espaço de fases induzida pela mudança de algum(ns) parâmetro(s) (Poincaré-1855).

Definição (Codimensão)

Número de parâmetros a ser variados para se produzir a bifurcação.

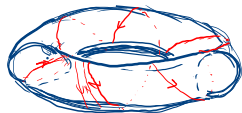
Definição (Estabilidade estrutural)

Um sistema é estruturalmente estável se, ao se variar um parâmetro, suas órbitas permanecem topologicamente equivalentes.

Teorema (M. M. Peixoto - 1962)

Um sistema bidimensional autônomo é estruturalmente estável se e somente se

- 1 O número de trajetórias fechadas e de pontos de equilíbrio é finito e os pontos são **hiperbólicos**.
- 2 Não há trajetórias fechadas unindo um ponto de sela a outro ou a si mesmo (órbitas heteroclínica e homoclínica).
- 3 O conjunto não-errante consiste de pontos de equilíbrio e trajetórias fechadas isoladas



$$\theta + 2n\pi = \theta$$
$$\phi + 2n\pi = \phi$$

Pontos não-errantes

Definição (Ponto não-errante)

Um ponto P é **não-errante** se, para alguma vizinhança V de P , existe um tempo arbitrariamente grande tal que ocorre uma interseção entre o fluxo solução do sistema e a vizinhança V .

- O conjunto não-errante é a união dos pontos não-errantes.

Exemplos:

- 1 O ponto de equilíbrio de um sistema linear com foco assintoticamente estável.
- 2 No caso de um centro o conjunto não errante é todo o espaço de fases.

Exemplo: circuito RLC ou sistema massa-mola

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + x = 0$$

- $\mu > 0$: a origem é estável
- $\mu \not\leq 0$: a origem é instável
- $\mu = 0$: a origem é um centro estruturalmente instável

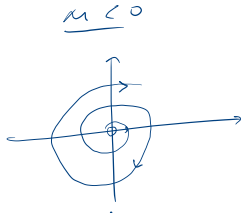
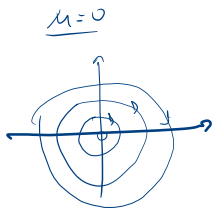
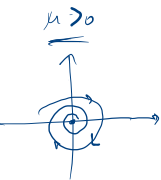


Table of Contents

1 Equação de van der Pol

2 Equação de Liénard

3 Bifurcações em sistemas de tempo contínuo

4 **Bifurcações de codimensão um**

- Bifurcação sela-nó
- Bifurcação transcritical

Bifurcação sela-nó

- É a bifurcação em que um par de pontos de equilíbrio é criado ou destruído.

Ex.:

$$\frac{dx}{dt} = f_{\mu}(x) = \mu - x^2$$

Pontos de equilíbrio:

$$f_{\mu}(x^*) = 0$$

$$\mu - x^{*2} = 0$$

$$x^{*2} = \mu$$

$$x^* = \pm \sqrt{\mu}$$

• $\mu < 0$: não existe ponto crítico

• $\mu = 0$: 1 único ponto crítico

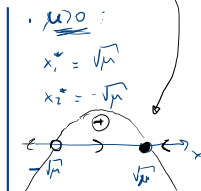
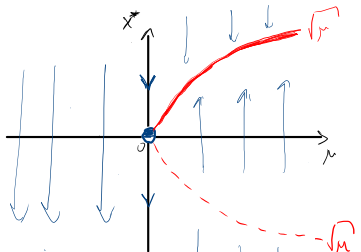


Diagrama de bifurcação



$\mu_c = 0$ → valor crítico onde o sistema é estruturalmente instável.

Bifurcação sela-nó

⇒ Estudar o exemplo 8.1

↳ modelo para temperatura
corporal de um réptil

Bifurcação sela-nó (2D)

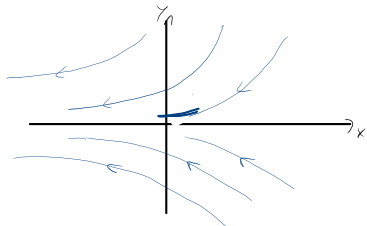
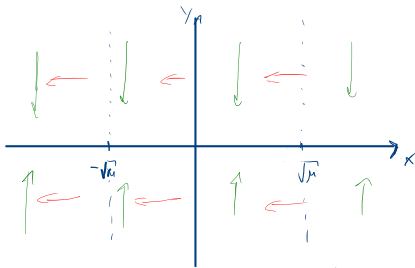
$$\mu < 0: \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu - x^2 \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases} \quad \text{Equilíbrio: } \begin{cases} p_1 = (\sqrt{\mu}, 0) \\ p_2 = (-\sqrt{\mu}, 0) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \text{Jacobiana: } \vec{A} \Rightarrow \det(\vec{A} - \lambda \vec{I}) = 0$$

$\dots \rightarrow$ autovalores:

$$\lambda_{\pm} = \frac{-2\sqrt{\mu} - 1 \pm \sqrt{4\mu + 4\sqrt{\mu} + 1}}{2}$$

$$\mu < 0: \begin{cases} \frac{dx}{dt} < 0 & - & (-|\mu| - x^2) \\ \frac{dy}{dt} = -y & - \end{cases}$$

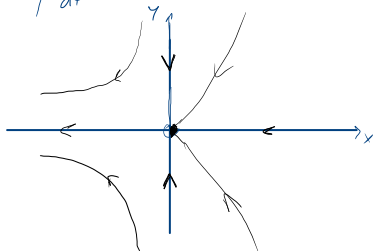


Bifurcação sela-nó (2D)

$$\mu \geq 0$$

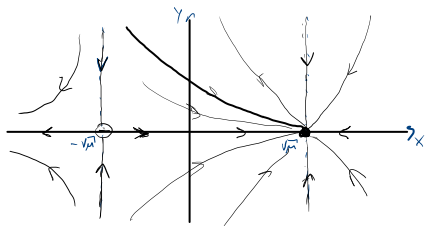
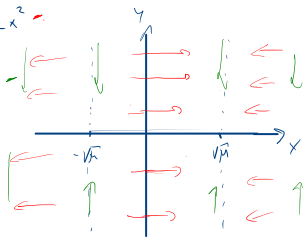
$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x^2 \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases}$$



$$\mu < 0$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu - x^2 \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases}$$

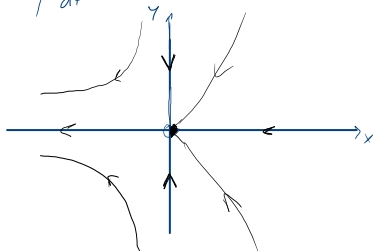


Bifurcação sela-nó (2D)

$$\mu \geq 0$$

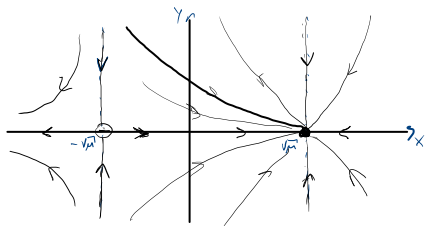
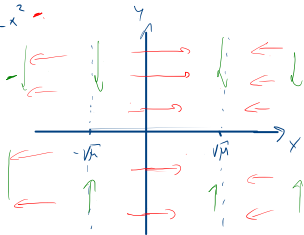
$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x^2 \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases}$$



$$\mu < 0$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu - x^2 \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases}$$

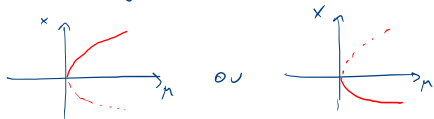


Bifurcação sela-nó (2D)

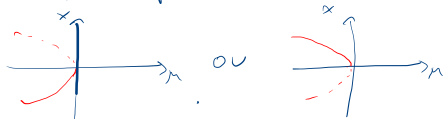
$$\frac{dx}{dt} = \mu \pm x^2 \quad \Rightarrow \quad \text{FORMAS NORMAIS DAS BIFURCAÇÕES SELA-NÓ}$$

Sinal $\left\{ \begin{array}{l} \ominus : \text{SUPERCRÍTICA} \\ \oplus : \text{SUBCRÍTICA} \end{array} \right.$

\ominus Pontos surgem com aumento de μ



\oplus Pontos desaparecem com aumento de μ



Referências

- 1 Luiz H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos*, 3^a ed., Editora Livraria da Física, São Paulo (2011)
- 2 Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 1st ed., Westview Press, Cambridge (1994)