

Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein¹

¹Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

1 Ciclos limites

- Sistemas Gradientes

2 Teorema de Poincaré-Bendixson

Table of Contents

1 Ciclos limites

- Sistemas Gradientes

2 Teorema de Poincaré-Bendixson

Sistemas Gradientes

Dado um sistema da forma

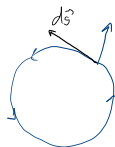
$$\dot{\vec{x}} = -\nabla V$$

V é função escalar e independente do tempo
 $V = V(\vec{x})$

Suponha que existe órbita fechada com período T . Por um lado, $\Delta V = 0$ nesta órbita, porque V tem valor único. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\Delta V &= \int_0^T \frac{dV}{dt} dt \\ &= \int_0^T (\nabla V \cdot \dot{\vec{x}}) dt \\ &= - \int_0^T \|\dot{\vec{x}}\|^2 dt \\ &< 0\end{aligned}$$

ABSURDO!



$$dV = \nabla V \cdot d\vec{s}$$

$$\frac{dV}{dt} = \nabla V \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \nabla V \cdot \dot{\vec{x}}$$

$$\Delta V_L = 0$$

$$\Delta V_L = \int_0^L \dot{V}_L dt$$

$$< 0!$$

ABSURDO!

- **Todos** os sistemas unidimensionais são gradientes; logo, não há oscilações em sistemas unidimensionais
- sistemas que possuem função de Lyapunov não podem apresentar órbitas fechadas ($\dot{V}_L < 0$).

HIDDEN ATTRACTORS IN DYNAMICAL SYSTEMS. FROM HIDDEN OSCILLATIONS IN HILBERT–KOLMOGOROV, AIZERMAN, AND KALMAN PROBLEMS TO HIDDEN CHAOTIC ATTRACTOR IN CHUA CIRCUITS

G. A. LEONOV^{*‡} and N. V. KUZNETSOV^{*‡}

2. 16th Hilbert's Problem

2.1. *Limit cycles of two-dimensional quadratic systems.*

Hilbert–Kolmogorov's problem

In 1900, David Hilbert posed the problem to investigate the number and possible dispositions of limit cycles in two-dimensional polynomial systems in relation to the degree of the considered polynomials.

... *This is the question as to the maximum number and position of Poincaré's boundary cycles (cycles limits) for a differential equation of the first order and degree of the form $dx/dy = Y/X$, where X and Y are rational integral functions of the n th degree in x and y ...*

This is the second part of 16th Hilbert Problem [Hilbert, 1901–1902], which Smale [1998] reformulated later in the following way: *Is there a bound $K = H(n)$ on the number of limit cycles of the form $K < n^q$ for the polynomial system*

$$\frac{dx}{dt} = P_n(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_n(x, y), \quad (7)$$

where n is the maximum of the degree of polynomials P_n and Q_n and q is a universal constant.

For more than a century, in attempting to solve this problem, numerous analytical results were obtained (see, references in [Reyn, 1994]). But the problem is still far from being resolved even for a simple class of quadratic systems.

The important direction of the study of Hilbert's sixteenth problem is a proof of finiteness of the number of limit cycles. The history of this proof for polynomial systems on a plane is connected with the well-known work of Dulac [1923]. However, later in Dulac's proof, gaps were found [Ilyashenko, 1985]. These gaps were corrected by Bamon [1985] (for quadratic polynomial systems) and, independently, by Ilyashenko [1991] and by Ecalle [1992] (for general polynomial systems).

The creation of effective methods for the construction of systems with limit cycles was initiated by Bautin [1949, 1952]. In his works, for the construction of nested limit cycles, an effective analytical method was proposed based on determining the sequential symbolic expressions of *Lyapunov values*

A CONCRETE EXAMPLE OF THE EXISTENCE OF FOUR LIMIT CYCLES FOR PLANE QUADRATIC SYSTEMS

SHI SONGLING (史松齡)

*(Graduate School, China University of Science and Technology;
Bureau of Applied Mathematics, Academia Sinica)*

Received December 31, 1978; revised January 5, 1979.

ABSTRACT

This paper gives a positive answer to an unknown problem as to whether a plane vector field, given by two polynomials of 2nd degree, can have more than 3 limit cycles⁽¹⁾. This problem was put forward at the symposium on the mathematical consequences of the Hilbert problems, sponsored by the American Mathematical Society in May, 1974.

The methods in references [2] and [3] having been used, the system with at least four limit cycles is proved.

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - y - 10x^2 + (5 + \delta)xy + y^2, \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = x + x^2 + (-25 + 8e - 9\delta)xy,$$

where

$$\delta = -10^{-13}, \quad e = -10^{-22}, \quad \lambda = -10^{-23}.$$

4 ciclos limites em sistemas quadráticos

Differ Equ Dyn Syst (Jan&Apr 2013) 21(1&2):29–34
DOI 10.1007/s12591-012-0118-6

ORIGINAL RESEARCH

Visualization of Four Normal Size Limit Cycles in Two-Dimensional Polynomial Quadratic System

N. V. Kuznetsov · O. A. Kuznetsova · G. A. Leonov

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + xy + y,$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + \alpha_2x + \beta_2y.$$

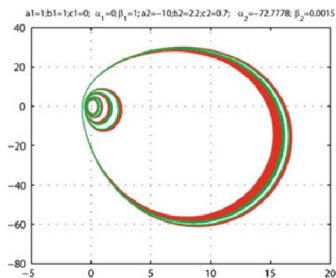
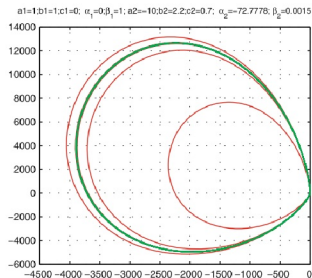


Fig. 4 Visualization of four limit cycles in two-dimensional polynomial quadratic system

Table of Contents

1 Ciclos limites

- Sistemas Gradientes

2 Teorema de Poincaré-Bendixson

Conjuntos ω -limite e α -limite

Seja um sistema dinâmico com solução representada pelo fluxo $\phi_t(\vec{x})$.

Definição

Um ponto Q é definido como um ponto ω -**limite** de um ponto P se existe uma sequência

$$\phi_{t_1}(P), \phi_{t_2}(P), \phi_{t_3}(P), \dots, \phi_{t_n}(P), \dots$$

tal que

$$\phi_{t_n}(P) \xrightarrow{t_n \rightarrow \infty} Q$$

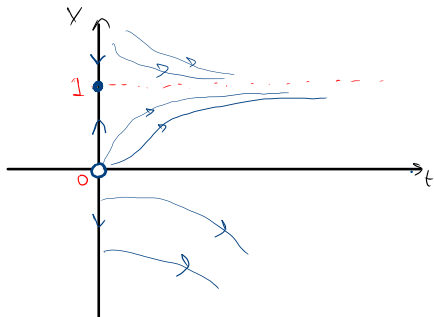
- Conjunto de todos Q é o conjunto ω -limite, $\omega(P)$.
- Ponto α -**limite**: definição análoga, mas com

$$\phi_{t_n}(P) \xrightarrow{t_n \rightarrow -\infty} Q$$

- Conjunto α -limite é representado por $\alpha(P)$.

Exemplo 7.5

$$\dot{x} = x(1-x) \quad - \text{ pontos fixos: } \begin{cases} x^* = 0 \\ x^* = 1 \end{cases}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(p) = 1, \quad p > 0 \\ \omega(0) = 0 \\ \omega(p) = \emptyset, \quad p < 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(1) = \mathbb{R}^+ \\ \alpha(0) = 0 \end{array} \right.$$

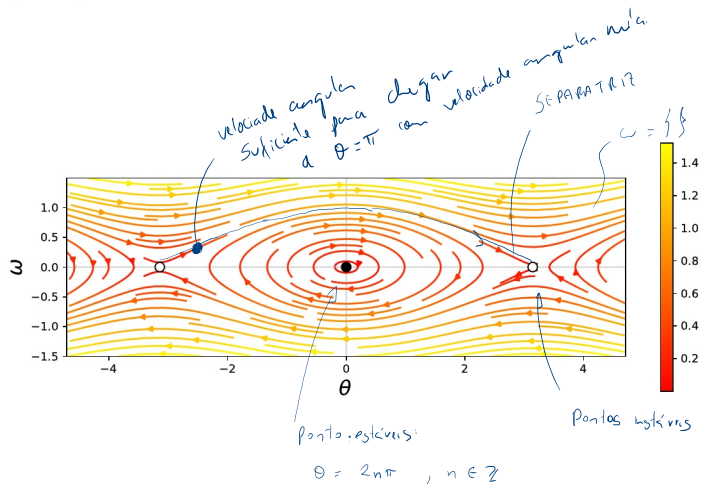
Teorema de Poincaré-Bendixson

Teorema (Poincaré-Bendixson)

Conjuntos ω -limite de um sistema autônomo **bidimensional** com pontos de equilíbrio isolados podem ser:

- 1 pontos de equilíbrio
- 2 trajetórias fechadas
- 3 pontos de equilíbrio Q_J conectados por trajetórias tal que os conjuntos α -limite e ω -limite dessas trajetórias são os próprios pontos Q_J

Exemplo - pêndulo não linear

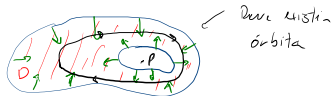


Teorema de Poincaré-Bendixon

→ Uso para localização de um ciclo limite

Suponha que:

- 1) D é uma região fechada e limitada de \mathbb{R}^2 .
- 2) $\vec{X} = \vec{f}(\vec{x})$ é um campo vetorial contínuo e diferenciável em uma região aberta E , tal que $D \subset E$.
- 3) D não contém pontos de equilíbrio.
- 4) Tentar-se delimitar uma região (que não tem pontos de equilíbrio) tal que o fluxo sempre aponte para o seu interior.



→ Existe trajetória C confinada em D . Se $x_c(0) \in D$ então $x_c(t) \in D, \forall t$

⇒ Então C é trajetória fechada ou C converge para uma órbita fechada em D .

→ Toda órbita engloba pelo menos 1 ponto fixo.

⇒ Não necessariamente é simples verificar

(4)

Exemplo 7.1 (novamente)

Mostre que o sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) = -y + x(\mu - x^2 - y^2) = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) = +x + y(\mu - x^2 - y^2) = g(x, y)$$

↪ Único ponto
fixo na origem $(0, 0)$

possui um ciclo limite assintoticamente estável para $\mu = 1$.

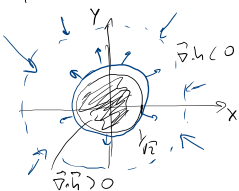
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = f_x &= 1 - 3x^2 - y^2 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = g_y &= 1 - x^2 - 3y^2 \end{aligned} \right\}$$

$$f_x + g_y = 2 - 4(x^2 + y^2) = 2[1 - 2(x^2 + y^2)]$$

$$f_x + g_y \Big|_{x^2 + y^2 = \frac{1}{2}} = 2 > 0 \rightarrow f_x + g_y > 0 \text{ se } x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$$

$$f_x + g_y < 0 \text{ se } x^2 + y^2 > \frac{1}{2}$$

$$D_0 \vec{h}, \quad \vec{h} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$



Teorema de índices de Poincaré

Seja o sistema dinâmico autônomo

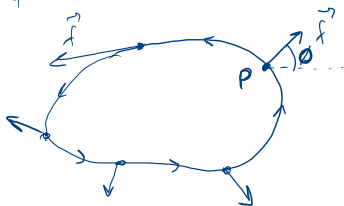
$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \rightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$



com ponto de equilíbrio $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$.

$$\tan \phi = \frac{f_2}{f_1}$$

→ Tomo curva fechada (não necessariamente é trajetória) que não contenha pontos de equilíbrio (na curva).



→ \vec{f} é tangente à curva apenas se a curva é uma trajetória.

Teorema de índices de Poincaré

→ Movm do ponto P no sentido anti-horário

→ ϕ varia continuamente ($\dot{\phi}$ é diferenciável)

→ Voltando ao ponto P inicial, ϕ varia de um múltiplo inteiro de 2π

Índice I_C : nº de voltas dadas por $\dot{\phi}$ ao se percorrer esta curva uma vez, no sentido anti-horário

$$I_C = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\phi$$

$$\tan \phi = \frac{f_2}{f_1} \rightarrow d(\tan \phi) = d\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right) = \dots = \sec^2 \phi d\phi$$

$$d\phi = \frac{d(\tan \phi)}{\sec^2 \phi}$$

$$I_C = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{d(\tan \phi)}{\sec^2 \phi} = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{(f_1 df_2 - f_2 df_1)}{f_1^2}$$

$$\sec^2 \phi = 1 + \tan^2 \phi \quad \left(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \right)$$

$$I_C = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{f_1 df_2 - f_2 df_1}{f_1^2 + f_2^2}$$

↗ não trivial em geral.

Teorema de índices de Poincaré

→ Poincaré mostrou que I_C depende apenas dos pontos de equilíbrio envolvidos pela curva C !

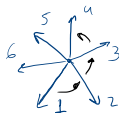
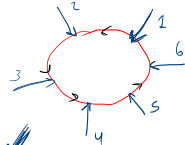
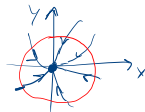
→ Se C não envolve pontos de equilíbrio: $I_C = 0$.

→ Deformando C continuamente sem passar por pontos de equilíbrio até chegar a C' temos:

$$I_C = I_{C'}$$

→ Índice pode ser visto como uma propriedade do ponto de equilíbrio

• Nó assintoticamente estável



$$\Delta \phi = +2\pi$$

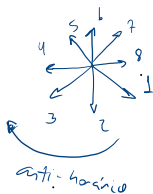
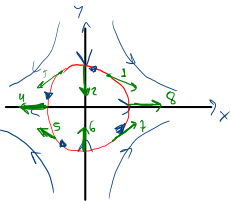
$$\Rightarrow I_C = +1$$

para nó
assintoticamente
estável.

Teorema de índices de Poincaré

$I = +1$: nós, focos, estrelas e nós impróprios
instáveis e estáveis; centros

• Ponto de sela



$I = -1$: pontos de sela

→ Curva que engloba mais de um ponto fixo, índice será a soma dos índices individuais

→ Índice de TRAJETÓRIA FECHADA é +1

Para trajetórias fechadas:

$$N = S + 1$$

\uparrow
nº de selas

nº de não-selas

→ nº total de pontos envolvidos: $2S + 1$

Teorema de índices de Poincaré

Exemplo 78

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) = y$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) = -(x^2 - 1)y - x$$

Pontos fixos:

$$\begin{cases} y^* = 0 \\ x^* = 0 \end{cases}$$

único na
origem

fora trivial

$$I = 1$$

Crítica de Bendixson

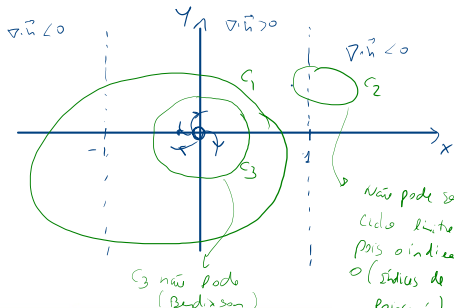
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -(x^2 - 1)$$

$$f(x, y)g_y = -(x^2 + 1) = \nabla \cdot \vec{h} \quad ; \quad \vec{h} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

$$\text{e } x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm i$$

→ Se houver ciclo limite, ele deve
cruzar um das retas $x = 1$ ou
 $x = -1$



Teorema de índices de Poincaré

C_1 satisfaz aos 2 critérios.

→ A princípio, poderia ser um ciclo limite.

→ Llam o van der Pol

Exercícios

Monteiro cap 7:
7.7, 7.8

Referências

- 1 Luiz H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos*, 3^a ed., Editora Livraria da Física, São Paulo (2011)
- 2 Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 1st ed., Westview Press, Cambridge (1994)
- 3 S. Songling, *Scientia Sinica* **23**, 153 (1980)
- 4 G. A. Leonov, N. V. Kuznetsov, *Int. J Bif. Chaos* **23**, 1330002 (2013)
- 5 N. V. Kuznetsov, O. A. Kuznetsova, G. A. Leonov, *Differ. Equ. Dyn. Syst.* **21**, 29 (2013)