

# Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

- 1 **Pêndulo não linear**
- 2 **Estabilidade orbital**
- 3 **Ciclo limite**
- 4 **Localizando um ciclo limite**

## Pêndulo não linear

Para um pêndulo sem a aproximação de pequenos ângulos, temos

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$
$$\frac{d\omega}{dt} = -\omega_0^2 \operatorname{sen}(\theta).$$



Usando as condições iniciais  $(\theta(0), \omega(0))$ , as curvas no espaço de fases podem ser obtidas analiticamente:

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{d\theta/dt}{d\omega/dt} = -\frac{\omega}{\omega_0^2 \operatorname{sen}\theta} \rightarrow \omega_0^2 \operatorname{sen}\theta d\theta = -\omega d\omega$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \omega_0^2 \operatorname{sen}\theta d\theta = -\int_{\omega(0)}^{\omega} \omega d\omega$$

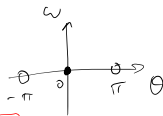
$$\omega_0^2 (-\cos\theta + \cos\theta_0) = \frac{\omega^2(0)}{2} - \frac{\omega^2}{2}$$

$$\frac{1}{2\omega_0^2} \omega^2(t) - \cos\theta(t) = \frac{1}{2\omega_0^2} \omega^2(0) - \cos\theta(0)$$

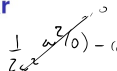
→ Tomar  $t=0$  o instante em que o pêndulo

se encontra na amplitude máxima.

$$\begin{cases} \omega(0) = 0 \\ \theta(0) = \theta_{\max} \end{cases}$$



## Pêndulo não linear

$$\frac{1}{2} \omega^2(t) - \cos \theta(t) = \frac{1}{2} \omega^2(0) - \cos \theta_{iní}$$


$$\omega^2(t) = 2\omega_0^2 [\cos \theta(t) - \cos \theta_{iní}]$$

Retornando à  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \sqrt{2\omega_0^2} \sqrt{\cos \theta(t) - \cos \theta_{iní}}$$

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta(t) - \cos \theta_{iní}}} \frac{1}{\sqrt{2}\omega_0}$$

$$\int_0^{T/4} dt = \int_0^{\theta_{iní}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta(t) - \cos \theta_{iní}}} \frac{1}{\sqrt{2}\omega_0}$$

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}\omega_0} \int \dots$$

$$T = \frac{4}{\sqrt{2}\omega_0} \int_0^{\theta_{iní}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_{iní}}}$$

$\Rightarrow$  não há solução em termos de funções elementares.

$\rightarrow$  depende da amplitude.  $\theta_{iní}$

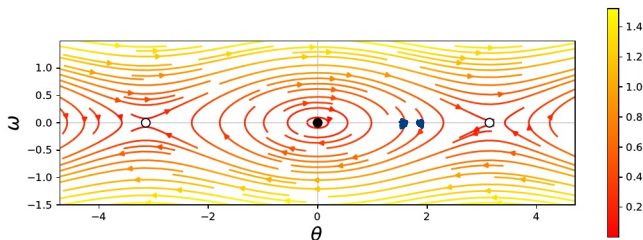
## Pêndulo não linear

Período:

$$T(\theta_{max}) = \frac{4}{\sqrt{2}\omega_0} \int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta(t) - \cos \theta_{max}}}$$

- Não há solução em termos de funções elementares.
- Depende de  $\theta_{max} \Rightarrow$  trajetórias no espaço de fase percorridas com velocidades diferentes.

Espaço de fase:



## Estabilidade orbital

- Trajetórias fechadas no espaço de fase de sistemas **autônomos** são **periódicas**.

Sejam  $C_1$  e  $C_2$  caminhos fechados próximos no espaço de fase descritos, respectivamente, pelas soluções periódicas  $\vec{z}_1(t)$  e  $\vec{z}_2(t)$ .

- Os períodos podem ser distintos.
- Pontos inicialmente próximos podem se distanciar
- Pela definição de estabilidade de Lyapunov, seriam **instáveis!**

### Definição (Estabilidade orbital de Poincaré)

*O caminho  $C_1$  é **orbitalmente (neutramente) estável** se, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta(\epsilon) > 0$  tal que se  $\|\vec{z}_1(t_0) - \vec{z}_2(t_1)\| < \delta(\epsilon)$  para os instantes de tempo  $t_0$  e  $t_1$ , então existem instantes de tempo  $t_2$  e  $t_3$  em que  $\|\vec{z}_1(t_2) - \vec{z}_2(t_3)\| < \epsilon$ .*

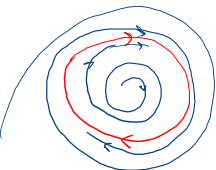
- O pêndulo não linear seria instável pela definição de Lyapunov, mas é estável pela de Poincaré.

## Ciclo limite

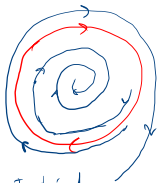
### Definição (Ciclo limite)

Trajatória **fechada** e **isolada** que pode aparecer no espaço de fases de sistemas não lineares.

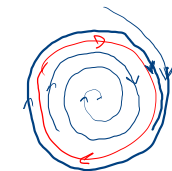
- **isolada**: não há outras trajetórias fechadas na vizinhança
- **não** é um **centro**, pois neste caso há infinitas trajetórias vizinhas.
- Sua amplitude não depende da condição inicial.



Estável



Instável



Semi-estável

## Ciclo limite

- Suas propriedades (período, amplitude, forma) dependem dos parâmetros e não das condições iniciais.
- Oscilações **autossustentadas**, ou seja, na ausência de força periódica externa.

Exemplo: Coração: ritmo acelera com exercício, mas retorna após repouso.

Exemplo 7.1: Mostre que o sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) = -y + x(\mu - x^2 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) = +x + y(\mu - x^2 - y^2)\end{aligned}$$

→ Ponto fixo na origem  
(0, 0)

possui um ciclo limite assintoticamente estável para  $\mu = 1$ .



## Exemplo 7.1 (cont.)

$$f(x, y) = -y + x(\mu - x^2 - y^2)$$

$$g(x, y) = x + y(\mu - x^2 - y^2)$$

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \Big|_{x^*=(1,1)} = \begin{bmatrix} (\mu - 3x^2 - y^2) & (-1 - 2xy) \\ (1 - 2xy) & (\mu - 3y^2 - x^2) \end{bmatrix} \Big|_{(1,1)}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\det(\vec{A} - \lambda \vec{I}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} (\mu - \lambda) & -1 \\ 1 & (\mu - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(\mu - \lambda)^2 + 1 = 0$$

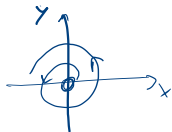
$$(\mu - \lambda)^2 = -1$$

$$\Rightarrow \mu - \lambda = \pm i \quad \dots$$

$$\lambda = \mu \pm i$$

$$\underline{\mu = 1} :$$

$$\lambda = 1 \pm i \rightarrow \text{Foco instável}$$



$\mu - x^2 - y^2 \Rightarrow$  trajetórias com  
círculos?

### Exemplo 7.1 (cont.)

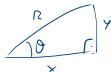
$$\dot{x} = f(x, y) = -y + x(\mu - x^2 - y^2)$$

$$\dot{y} = g(x, y) = x + y(\mu - x^2 - y^2)$$

(A)

Transformação para coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$



deriva a relação a +

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$$

(B)

De (A) e (B)

$$\dot{x}: \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta = -r \sin \theta + r \cos \theta (\mu - r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta)$$

$$\dot{y}: \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta = r \cos \theta + r \sin \theta (\mu - r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta)$$

(C)

$$\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta = -r \sin \theta + r \cos \theta (\mu - r^2) \quad (\times \cos \theta)$$

$$\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta = r \cos \theta + r \sin \theta (\mu - r^2) \quad (\times \sin \theta)$$

$$\dot{r} \cos^2 \theta + \dot{r} \sin^2 \theta = r (\cos^2 + \sin^2) (\mu - r^2)$$

$$\dot{r} = r (1 - r^2) \quad \downarrow r=1$$

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2)}$$

$$\begin{aligned} \text{(C)} \quad (\times \sin \theta) \quad \dot{r} \sin \theta \cos \theta - r \dot{\theta} \sin^2 \theta &= -r \sin^2 \theta + r \sin \theta \cos \theta (1 - r^2) \\ (\times \cos \theta) \quad \dot{r} \sin \theta \cos \theta + r \dot{\theta} \cos^2 \theta &= r \cos^2 \theta + r \sin \theta \cos \theta (1 - r^2) \end{aligned}$$

$$-r \dot{\theta} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = -r (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$-r \dot{\theta} = -r$$

$$\dot{\theta} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dt} = 1} \Rightarrow \theta(t) = \theta(0) + t$$

## Exemplo 7.1 (cont.)

⇒ Estabilidade em sistema unidimensional

$$\frac{da}{dt} = h(n) \rightarrow h(n^*) = 0$$

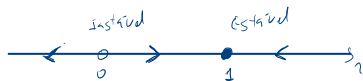
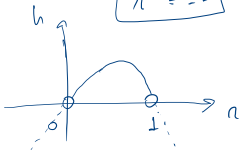
$$n^*(1 - n^{*2}) = 0$$

$$n^* = 0 \rightarrow \text{origem}$$

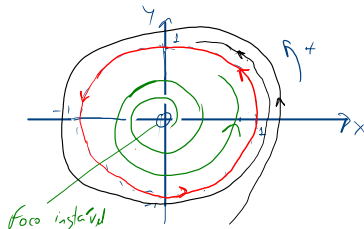
ou

$$1 - n^{*2} = 0 \rightarrow n^{*2} = 1$$

$n^* = \pm 1$  → -1 não faz sentido em coordenadas polares



$n^* = 1 \Rightarrow$  Ciclo limite assintoticamente estável.



$$\theta(t) = \theta_0 + t$$

## Localizando um ciclo limite

- Em geral não é fácil encontrar expressão analítica para ciclos limites.

### Crítério (de Bendixson)

Seja o sistema

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

Se  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$  não é identicamente nula e não muda de sinal em um domínio  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  **simplesmente conexo** (sem buracos) então o sistema **não** apresenta trajetórias fechadas em  $D$ .



- Esta é uma condição suficiente para **não** existência de ciclo limite.
- Se um ciclo limite existe em uma região simplesmente conexa, ele atravessa a curva sobre a qual  $\partial f/\partial x + \partial g/\partial y$  se anula.

## Exemplo

Aplicação no exemplo anterior ( $\mu = 1$ ):

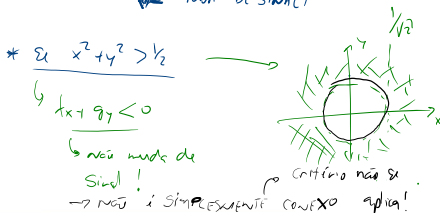
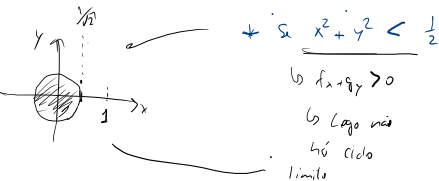
$$\dot{x} = f(x, y) = -y + x(\mu - x^2 - y^2)$$

$$\dot{y} = g(x, y) = +x + y(\mu - x^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \mu - 3x^2 - y^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\mu=1} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} = 1 - 3x^2 - y^2 + 1 - 3y^2 - x^2 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = g_y = \mu - 3y^2 - x^2 \end{array} \right.$$

$$= 2 - 4(x^2 + y^2)$$

← MUDA DE SINAL!



## Exemplo 7.2

$$\dot{x} = f(x, y) = -y + x - y^2$$

$$\dot{y} = g(x, y) = -x + y - x^2$$

$$f_x = 1$$

$$g_y = 1$$

$$\rightarrow f_x + g_y = 2, \quad \forall (x, y)$$

↳ Não há troca de sinal no

plano  $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$  NÃO HÁ CICLO LIMITE

$\varnothing$

Região Simplesmente conexa.

## Exemplo 7.3

Problema 6.4.1 (Coelhos e ovelhas):

$$\dot{x} = f(x, y) = x(k_c - x) - q_c xy$$

$$\dot{y} = g(x, y) = y(k_o - y) - q_o xy$$

$$\dot{x} = f(x, y) = 4x - x^2 - 2xy$$

$$\dot{y} = g(x, y) = 3y - y^2 - xy$$

$$f_x = 4 - 2x - 2y$$

$$g_y = 3 - 2y - x$$

$$f_x + g_y = 7 - 3x - 4y$$

Q MUDA DE  
SINAL

SE há ciclo limite, ele

deve cumprir  $7 - 3x + 4y = 0$

Sabemos pela restrição do problema  
que não há.

## Critério de Dulac

- generalização do critério de Bendixson

### Critério

*Se existe  $b(x, y)$  tal que  $\frac{\partial(bf)}{\partial x} + \frac{\partial(bg)}{\partial y}$  não é uma função identicamente nula e não muda de sinal no domínio simplesmente conexo  $D$ , então **não** há trajetórias fechadas em  $D$ .*

⇒ Não há método para se determinar a função  $b(x, y)$ ! Possíveis candidatas: 1 (Bendixson),  $(x^a y^b)^{-1}$ ,  $e^{ax}$ ,  $e^{ay}$

Exemplo 7.4: Caso anterior (ovelhas e coelhos) com  $b(x, y) = \underline{\underline{1/xy}}$

$$bf = \frac{1}{xy} (4x - x^2 - 2xy) = \frac{4}{y} - \frac{x}{y} - 2 \rightarrow \frac{\partial(bf)}{\partial x} = -\frac{1}{y}$$

$$bg = \frac{1}{xy} (3y - y^2 - xy) = \frac{3}{x} - \frac{y}{x} - 1 \rightarrow \frac{\partial(bg)}{\partial y} = -\frac{1}{x}$$



## Exemplo 7.4 (cont.)

$$(b_f)_x + (b_g)_y = -\frac{1}{x} - \frac{1}{y} < 0$$

não muda

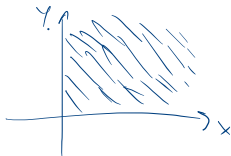
de sinal

para  $x > 0$  e  $y > 0$



populações ou  
funções de  
populações

$\Rightarrow$  Não há limite



## Prova do Critério de Dulac

Prova por absurdo.

1) Suponha que existe  $b(x,y)$   
tal que  $\frac{\partial (bf)}{\partial x} + \frac{\partial (bg)}{\partial y}$  não  
muda de sinal na região  
Simplesmente conexa e  
existe trajetória fechada  $C$ .

2) Sem perda de generalidade.  
Suponha que  
 $\frac{\partial (bf)}{\partial x} + \frac{\partial (bg)}{\partial y} > 0$

O Teorema de Stokes estabelece que:

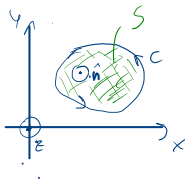
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}) dS$$

Em 2 dimensões:

$$\hat{n} = \hat{k} \rightarrow (\nabla \times \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

$$\oint_C (F_x dx + F_y dy) = \iint_S \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dS$$

$$\left. \begin{array}{l} F_x = bf \\ F_y = -bg \end{array} \right\} \text{componentes de } \vec{F}$$



## Prova do Critério de Dulac

$$0 < K = \iint_S \left[ \frac{\partial(bf)}{\partial x} + \frac{\partial(bg)}{\partial y} \right] dx dy$$

$$= \iint_S \left[ \frac{\partial(bf)}{\partial x} - \frac{\partial(-bg)}{\partial y} \right] dx dy$$

Stokes

$$= \oint_C (-bg dx + bf dy)$$

$$= \oint_C (f dy - g dx) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f \rightarrow \frac{dx}{dt} \\ \dot{y} = g \rightarrow \frac{dy}{dt} = g \end{array} \right.$$

$$= \oint_C b (x dy - y dx)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dx = f dt = \dot{x} dt \\ dy = g dt = \dot{y} dt \end{array} \right.$$

$$= \oint_C b (x \dot{y} dt - \dot{y} x dt)$$

$$0 < K = \oint_C (x \dot{y} - \dot{y} x) dt$$

$$= \oint_C 0 dt = \underline{\underline{0}}$$

Absurdo!

→ Não existe  
caminho  $C$

fechado qvs

seja trajetória

## Referências

- 1 Luiz H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos*, 3<sup>a</sup> ed., Editora Livraria da Física, São Paulo (2011)
- 2 Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 1<sup>st</sup> ed., Westview Press, Cambridge (1994)