Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein[1]

[1] Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

1. **Método direto de Lyapunov**

2. **Caso Linear: equação de Lyapunov**

3. **Caso não linear: Método de Krasovskii**

Método direto de Lyapunov

- Determinação da estabilidade de sistemas com autovalor nulo, Ex.:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y) = xy$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x,y) = -x^2 - y^3,$$

que tem a origem como ponto de equilíbrio.

- Ideia: montar uma função "energia potencial": $V(x,y)$, das coordenadas do espaço de fase desse sistema e buscar o seu mínimo.
- $V(x,y)$ é uma função contínua das variáveis de estado com derivadas contínuas em uma região B que contém a origem.

Classificação de $V(x,y)$

Dada $V(x,y): B \to \mathbb{R}$, com $B \subseteq \mathbb{R}^2$ e $(0,0) \in B$,

- Se $V(0,0) = 0$, então V classifica-se como:

a. **localmente positiva definida**, se $V(x,y) > 0$ para $(x,y) \neq (0,0)$.
Ex.: $V(x,y) = x^2 + y^2$

b. **localmente positiva semidefinida**, se $V(x,y) \geqslant 0$ para $(x,y) \neq (0,0)$.
Ex.: $V(x,y) = x^2$

c. **indefinida**, se $V(x,y)$ assume valores positivos e negativos para qualquer vizinhança de $(0,0)$.
Ex.: $V(x,y) = x\,y$

Evolução temporal de $V(x,y)$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x,y) + \frac{\partial V}{\partial y} g(x,y)$$

- Dada a condição inicial $(x(0), y(0))$, o sistema percorre a trajetória C parametricamente: $(x(t), y(t))$
- $V(x,y)$ é função implícita do tempo t, ao longo do caminho C.

$\Rightarrow$ A origem é **assintoticamente estável** se existe $V(x,y)$ contínua com derivadas parciais contínuas, localmente positiva definida, tal que

$$-\frac{dV}{dt} > 0.$$

Se

$$-\frac{dV}{dt} \geqslant 0,$$

então $(0,0)$ é apenas **estável**.

Exemplo: sistema $2d$ não linear

Chama-se de **função de Lyapunov** uma função $V(x,y)$, localmente positiva definida, tal que

$$-\frac{dV}{dt} \geqslant 0.$$

Se ela existe, o ponto de equilíbrio é **localmente estável**.

Exemplo:

$$\frac{dx}{dt} = xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -x^2 - y^3,$$

Tentativa: $V(x,y) = x^2 + y^2$

$$-\frac{dV}{dt} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)$$
$$= -2x(xy) - 2y(-x^2 - y^3)$$

$$-\frac{dV}{dt} = -\cancel{2x^2y} + \cancel{2x^2y} + 2y^4$$

$$-\frac{dV}{dt} = 2y^4 \geqslant 0 \text{ se } (x,y) \neq \vec{0} \quad (= 0 \text{ no eixo } x)$$

↳ semipositiva definida.

É localmente estável, mas não podemos afirmar nada sobre se é assintoticamente estável.

Teorema de Barbashin e Krasovskii

Teorema (Barbashin e Krasovskii)

Quando $-dV/dt$ é positiva semidefinida, o ponto de equilíbrio situado na origem é assintoticamente estável se a única trajetória que pertence ao conjunto S em que $dV/dt = 0$ é a origem.

- No exemplo anterior:

$\frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{y(t) = 0} \quad (2y^4 = 0)$

o conjunto S é o eixo x.

$y(t) = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = xy = 0$

$\Rightarrow x(t) = C$, constante

$\frac{dy}{dt} = -x^2 = -C^2$, mas

$y(t) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow C = 0$

$\boxed{x(t) = 0}$

$\rightarrow$ Logo, a única trajetória em S é a origem

$\rightarrow$ Pelo teorema, a origem é assintoticamente estável!

Exemplo 6.10

Classifique a estabilidade da origem do sistema

$$\frac{dx}{dt} = -y - x^3 = A_{11}x + A_{12}y - x^3$$
$$\frac{dy}{dt} = x - y^3 = A_{21}x + A_{22}y - y^3$$

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\boxed{\lambda = \pm i}$$

Ponto não hiperbólico.

Não podemos concluir nada por Hartman-Grobman

Lyapunov:

$$V(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3)$$

$$= \cancel{-2xy} - 2x^4 + \cancel{2xy} - 2y^4$$

$$= -2(x^4 + y^4)$$

Exemplo 6.10 (cont.)

$-\frac{dV}{dt} = 2(x^4 + y^4) > 0$ & $-\frac{dV}{dt}$ é positiva definida

se $\vec{x} \neq \vec{0}$.

→ Logo a origem é assintoticamente estável.

Funções de Lyapunov

- Pode-se provar que sempre existe uma função de Lyapunov para um ponto de equilíbrio estável ou assintoticamente estável.
- No entanto, não há método geral para encontrá-la ...

Exemplo 6.11 Construa uma função de Lyapunov para

$$\frac{dx}{dt} = -x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = -5x - y^5$$

Pelo método tradicional:

$\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{19}$

↳ Origem é ponto hiperbólico

⇒ Assintoticamente estável por H.G.

Teste: $V(x,y) = ax^2 + by^2$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= 2ax(-x+y) + 2by(-5x-y^5)$$

$$= -2ax^2 + 2axy - 10bxy - 2by^6$$

Exemplo 6.11 (cont.)

$$\frac{dV}{dt} = -2ax^2 + 2(a-5b)xy - 2by^6$$

Se $a = 5b$:

$$\frac{dV}{dt} = -10b\,x^2 - 2by^6$$

$$= -2b\,(5x^2 + y^6)$$

Escolho $b = 1$

$$-\frac{dV}{dt} = 2\,(5x^2 + y^6) > 0$$

se $\vec{x} = (x,y) \neq \vec{0}$

↳ positiva definida

$$V(x,y) = 5x^2 + y^2 > 0$$

se $\vec{x} \neq \vec{0}$

↳ positiva definida

$\Rightarrow$ Origem é assintoticamente estável.

Exemplo 6.12

Em 1 dimensão:

$$\frac{dx}{dt} = -x - ax^3, \quad a > 0$$

$$V(x) = \frac{x^2}{2} > 0, \text{ se } x \neq 0$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = x(-x-ax^3)$$

$$= -(x^2+ax^4) > 0$$

se $x \neq 0$

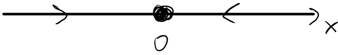
$\Rightarrow x^* = 0$ é

globalmente assint.

estável

$$\frac{dx}{dt} = -(x+ax^3)$$

Estável



Teorema de Chetaev

Teorema (Chetaev)

A origem é ponto de equilíbrio instável se existe uma função $W(\vec{x})$ tal que

- *é contínua e tem derivadas parciais contínuas,*
- *obedece a $W(\vec{0}) = 0$ e $W(\vec{x}) > 0$ para valores de $\vec{x}$ arbitrariamente próximos da origem e*
- *$\frac{dW}{dt}$ é localmente positiva definida.*

Exemplo 6.14

Use $W(x,y) = y^2 - x^2$ para mostrar que a origem do sistema abaixo é instável.

$$\frac{dx}{dt} = -x + 2y^2$$
$$\frac{dy}{dt} = 2xy + y^3$$

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{diagonal}} \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Ponto não hiperbólico.

$$W(x,y) = y^2 - x^2$$

$\Rightarrow W(0,0) = 0$ (ok)

Escolho $(\varepsilon, 2\varepsilon)$ $\rightarrow$ é arbitrariamente próximo da origem para qualquer $\varepsilon > 0$.

$$W(\varepsilon, 2\varepsilon) = (2\varepsilon)^2 - \varepsilon^2 = 4\varepsilon^2 - \varepsilon^2 = 3\varepsilon^2 > 0 \quad \text{ok}$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{dy}{dt} = -2x(-x + 2y^2) + 2y(2xy + y^3)$$

Exemplo 6.14 (cont.)

$$\frac{dw}{dt} = 2x^2 - \cancel{4xy^2} + \cancel{4xy^2} + 2y^4$$

$$= 2(x^2 + y^4) > 0$$

se $\vec{x} \neq \vec{x}^* = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{x}^* = \vec{0}$ é

instável

Caso Linear: equação de Lyapunov

- Ao construir uma função de Lyapunov para um sistema linear, prova-se que ele é globalmente assintoticamente estável

Dado o sistema dinâmico linear

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \overleftrightarrow{A}\vec{x}\,(t)$$

com ponto de equilíbrio $\vec{x}^*$ na origem, buscaremos uma função de Lyapunov com a forma

$$\boxed{V(\vec{x}) = (\vec{x})^T \overleftrightarrow{P}\,\vec{x}}$$

com $\overleftrightarrow{P}$ tal que V seja positiva definida e $-\dfrac{dV}{dt}$ seja positiva semidefinida ou definida.

Temos

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\vec{x}\right)^T \overleftrightarrow{P}\,\vec{x} + (\vec{x})^T \overleftrightarrow{P}\,\frac{d\vec{x}}{dt}$$

Caso Linear: equação de Lyapunov

$$\frac{dV}{dt} = (\overleftrightarrow{A}\vec{x})^T \overleftrightarrow{P}\vec{x} + \vec{x}^T \overleftrightarrow{P}(\overleftrightarrow{A}\vec{x})$$

$$(\overleftrightarrow{A}\vec{x})^T = \vec{x}^T \overleftrightarrow{A}^T$$

$$= \vec{x}^T (\overleftrightarrow{A})^T \overleftrightarrow{P}\vec{x} + \vec{x}^T \overleftrightarrow{P}\overleftrightarrow{A}\vec{x}$$

$$= \vec{x}^T \underbrace{\left[(\overleftrightarrow{A})^T \overleftrightarrow{P} + \overleftrightarrow{P}\overleftrightarrow{A} \right]}\vec{x}.$$

Define

$$-Q \equiv \left[\overleftrightarrow{A}^T \overleftrightarrow{P} + \overleftrightarrow{P}\overleftrightarrow{A} \right]$$

$$-\frac{dV}{dt} = (\vec{x})^T \overleftrightarrow{Q}\vec{x}$$

Caso Linear: equação de Lyapunov

$\Rightarrow V(\vec{x})$ será função de Lyapunov se

- $V(\vec{x})$ é **positiva definida**: $(\vec{x})^T \overset{\leftrightarrow}{P} \vec{x} > 0$, para $\vec{x} \neq \vec{0}$
- $\overset{\leftrightarrow}{Q}$ é **positiva semidefinida**: $(\vec{x})^T \overset{\leftrightarrow}{Q} \vec{x} \geqslant 0$, $\forall \vec{x}$

É necessário resolver a **equação matricial de Lyapunov**

$$-\overset{\leftrightarrow}{Q} \equiv (\overset{\leftrightarrow}{A})^T \overset{\leftrightarrow}{P} + \overset{\leftrightarrow}{P}\overset{\leftrightarrow}{A},$$

com $\overset{\leftrightarrow}{P}$ e $\overset{\leftrightarrow}{Q}$ satisfazendo as condições acima.

- Na prática, escolhe-se $\overset{\leftrightarrow}{Q}$ positiva definida (ex.: matriz identidade) e verifica-se se $\overset{\leftrightarrow}{P}$ é definida positiva, a partir da eq. acima.

Método de Krasovskii

Seja o sistema dinâmico

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$$

com ponto de equilíbrio na origem e $\overleftrightarrow{A}$ sua matriz jacobiana.

- Se

$$\overleftrightarrow{K} = -[\overleftrightarrow{A} + (\overleftrightarrow{A})^T]$$

  é uma matriz semidefinida positiva (autovalores positivos) numa bola B centrada na origem, então a origem é ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

- Candida~~d~~ta a função de Lyapunov:

$$V(\vec{x}) = \frac{(\vec{f})^T\vec{f}}{n},$$

  onde n é a dimensão do sistema.

Exemplo 6.17

Construa uma função de Lyapunov para

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - (x_1)^3 - x_2 = f_1(x_1, x_2) \qquad \vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 = f_2(x_1, x_2)$$

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1 - 3x_1^2) & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda = -1 \pm i \to \text{por H.6.}$$

a origem é assint. estável.

$$\overleftrightarrow{K} = -\left(\overleftrightarrow{A} + \overleftrightarrow{A}^T\right) = -\left\{ \begin{bmatrix} (-1 - 3x_1^2) & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-1 - 3x_1^2) & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 + 6x_1^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 6.17 (cont.)

$$\vec{x}^T \overleftrightarrow{K} \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2+6x_1^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (2+6x_1^2)\, x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$= (2+6x_1^2)\, x_1^2 + 2x_2^2$$

$$= 2x_1^2 + 6x_1^4 + 2x_2^2 > 0$$

se $(x_1, x_2) \neq \vec{0}$

positiva definida.

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} f^T f$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left[(-x_1 - x_1^3 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 \right] > 0$$

se $\vec{x} \neq \vec{0}$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(f_1^2 + f_2^2 \right)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} f_1 \frac{df_1}{dt} + \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \cancel{2} f_2 \frac{df_2}{dt}$$

$$= f_1 \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \right] + f_2 \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \right]$$

$$= f_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + f_1 f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + f_1 f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + f_2^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

Exemplo 6.17 (cont.)

$f_1(x_1, x_2) = (-x_1 - x_1^3 - x_2)$

$f_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2$

$\frac{dV}{dt} = f_1^2\left[-1-3x_1^2\right] + \cancel{f_1 f_2}\left[-1\right]$

$+ \cancel{f_1 f_2}(1) + f_2^2(-1)$

$= -\left[(1+3x_1^2)f_1^2 + f_2^2\right]$

$-\frac{dV}{dt} > 0$ se $\vec{x} \neq \vec{0}$

$\Rightarrow V(x_1, x_2) = x^2 + y^2$ é também função de Lyapunov neste caso $\rightarrow$ VERIFIQUE!

Referências

1. Luiz H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos*, 3ª ed., Editora Livraria da Física, São Paulo (2011)

Exercícios: 6,31; 6.33; 6,34; 6.36; 6.37, 6.38, 6.39; 6.42, 6.44