Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein[1]

[1]Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

1. **Formas normais**
   - Exemplo de caso com ressonância

2. **Cálculo de Formas normais no caso ressonante**
   - Espaços vetoriais
   - Procedimento para o cálculo da forma normal

Caso com ressonância

As equações

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \overleftrightarrow{J}\vec{y} + \vec{g}(\vec{y}),$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} J_{ji} y_i + g_j(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

descrevem a forma mais geral para um sistema dinâmico não linear.

- Se há ressonância entre autovalores ou o ponto é não hiperbólico, haverá termos não lineares que **não** poderão ser removidos.

Caso com ressonância

As equações

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \overleftrightarrow{J}\vec{y} + \vec{g}(\vec{y}),$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} J_{ji} y_i + g_j(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

descrevem a forma mais geral para um sistema dinâmico não linear.

- Se há ressonância entre autovalores ou o ponto é não hiperbólico, haverá termos não lineares que **não** poderão ser removidos.

1. Condição de ressonância:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i - \lambda_j = 0}$$

Exemplo: sistema $2d$ não linear

- Não linearidades com monômios da forma $y_1^{k_1} y_2^{k_2}$, com $\sum k_i = k$ e $k = 2$: y_1^2, $y_1 y_2$, e y_2^2. Caso geral:

$$\frac{dy_1}{dt} = A_1 y_1 + B_1 y_2 + C_1 y_1^2 + D_1 y_1 y_2 + E_1 y_2^2$$
$$\frac{dy_2}{dt} = A_2 y_1 + B_2 y_2 + C_2 y_1^2 + D_2 y_1 y_2 + E_2 y_2^2$$

- Vimos que sempre é possível remover os termos cruzados $y_1 y_2$.

Ressonância se:

$$k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 = \lambda_1 \quad \text{ou} \quad k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 = \lambda_2$$

Exemplo: sistema $2d$ não linear

1. Suponha que $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ (ponto hiperbólico)

$k_1 + k_2 = 2$

$\underbrace{k_2 = 2 - k_1}$

$\rightarrow \; k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 = \lambda_1 \rightarrow 1^{a}$ eq.

$k_1 \lambda_1 + (2 - k_1) \lambda_2 = \lambda_1$

$(2 - k_1) \lambda_2 = \lambda_1 (1 - k_1)$

$$\boxed{\lambda_2 = \frac{\lambda_1 (1 - k_1)}{2 - k_1}}$$

Condição de Ressonância

$k_1 = 0 \rightarrow \boxed{\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2}}$ corresponde ao termo $y_1^0 y_2^2 = y_2^2$ na 1^{a} eq.

$k_1 = 1 \rightarrow \lambda_2 = 0$ Não pode, pela suposição $\lambda_2 = 0$

$\rightarrow$ Não há ressonância com $k_1 = 1$ e $k_2 = 1$

$y_1 y_2$

$k_1 = 2 \rightarrow$ impossível

$\hookrightarrow k_1 \lambda_1 + \cancel{k_2 \lambda_2} = \lambda_1$

$2 \lambda_1 = \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = 0$: Não pode, pela suposição

$\rightarrow$ Não há ressonância com $k_1 = 2$ e $k_2 = 0$: y_1^2

Exemplo: sistema $2d$ não linear

1. Suponha que $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ (ponto hiperbólico)

- Se $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2}$,

  há ressonância e o termo y_2^2 não poderá ser removido da 1ª equação. $\left(\frac{dy_1}{dt}\right)$

- Analogamente, para a 2ª equação

  $k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 = \lambda_2$

  $\Rightarrow$ Se $\lambda_1 = \frac{\lambda_2}{2}$, há ressonância e o termo y_1^2 não pode ser removido da 2ª equação $\left(\frac{dy_2}{dt}\right)$

Exemplo: sistema $2d$ não linear

2. Suponha que $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ (ponto não-hiperbólico)

→ Para haver ressonância na 1ª eq. $(k_1 + k_2 = k)$

$$\cancel{k_1 \lambda_1}^{0} + k_2 \lambda_2 = \cancel{\lambda_1}^{0}$$

$k_2 \lambda_2 = 0$, mas $\lambda_2 \neq 0$ por suposição

$\Rightarrow k_2 = 0 \Rightarrow k_1 = k$ para haver ressonância

$$\boxed{y_1^k \text{ aparece na forma normal de } \frac{dy_1}{dt} \text{ se } \lambda_1 = 0 \text{ e } \lambda_2 \neq 0}$$

→ Na eq 2:

$$\cancel{k_1 \lambda_1}^{0} + k_2 \lambda_2 = \lambda_2$$

$$(k_2 - 1)\lambda_2 = 0$$

↳ $k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = k - 1$

$\Rightarrow$ $\boxed{y_2^{k-1} \text{ aparece na forma normal de } \frac{dy_2}{dt} \text{ se } \lambda_1 = 0 \text{ e } \lambda_2 \neq 0}$

Exemplo: sistema $2d$ não linear

3. Autovalores imaginários puros: suponha que $\lambda_1 = i\beta$ e $\lambda_2 = -i\beta$ (ponto não-hiperbólico)

- Condição para ressonância na 1ª eq., $k_1 + k_2 = k \geq 2$

$$k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 = \lambda_1$$

$$k_1 (i\beta) - k_2 (i\beta) = i\beta$$

$$k_1 - k_2 = 1$$

$$k_1 - (k - k_1) = 1$$

$$\boxed{2k_1 - k = 1}$$

- Para a segunda eq.

$$k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 = \lambda_2$$

$$\boxed{2k_1 - k = -1}$$

- Se k é par: $k = 2C$

$$2k_1 - 2C = \pm 1 \rightarrow \text{impossível!}$$

Termos com k par sempre podem ser eliminados das 2 equações se $\lambda_1 = i\beta$ e $\lambda_2 = -i\beta$

- Se k é ímpar: $k = 2C + 1$

$$2k_1 - (2C + 1) = \pm 1$$

$$2k_1 - 2C - 1 = \pm 1$$

$$\begin{cases} 2k_1 - 2C = 2 & (1^a \text{ eq}) \\ 2k_1 - 2C = 0 & (2^a \text{ eq}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = C + 1 & (1^a \text{ eq}) \\ k_1 = C & (2^a \text{ eq}) \end{cases}$$

Espaços vetoriais

Um espaço vetorial é um conjunto V em que duas operações são definidas: adição vetorial e multiplicação por escalar. As operações devem satisfazer ao **fechamento**: se $\vec{x}, \vec{y} \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\vec{x} + \vec{y} \in V$ e $\lambda \vec{x} \in V$. Além disso, as seguintes condições devem ser obedecidas

- EV 1:
  - $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (comutatividade da adição)
  - $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (associatividade da adição)
  - $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ (elemento identidade da adição)
  - $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ (elemento inverso da adição)
- EV 2:
  - $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$ (distributividade da soma escalar)
  - $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$ (distributividade da soma vetorial)
  - $\lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x}$ (associatividade da multiplicação por escalar)
  - $1\vec{x} = \vec{x}$ (identidade da multiplicação escalar)

$\Rightarrow$ As propriedades EV1 e EV2 podem ser usadas para definir um espaço vetorial abstrato, independente de $\mathbb{R}^n$.

Morris W. Hirsch, Stephen Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra.*, 1^{st} ed., (1974)

Exemplos

- Espaço trivial, contento apenas o vetor nulo: $\{\vec{0}\}$
- Espaço vetorial de $\mathbb{R}^n$: vetores
- Matrizes $m \times n$: M_{mn} $\quad ax^2 + bx + c$
- Polinômios de grau $\leqslant 2$: P_2
- Espaço de funções de 1 variável: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \,|\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

Cálculo da forma normal

1. Considere as funções g_j de

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} J_{ji} y_i + g_j(y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{1}$$

como monômios exclusivamente de grau k, representadas como $g_j^{(k)}$. Da mesma forma, as h_j de

$$y_j = x_j + h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2}$$

passam a ser representadas como $h_j^{(k)}$. Utilizam-se os monômios $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$, com $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$, para constuir uma base para o espaço vetorial $H^{(k)}$.

Cálculo da forma normal

Exemplo: Base de $H^{(2)}$ no caso bidimensional:

$$\vec{m}_1 = \begin{bmatrix} (x_1)^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{m}_2 = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{m}_3 = \begin{bmatrix} (x_2)^2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{m}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ (x_1)^2 \end{bmatrix}, \quad \vec{m}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{m}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ (x_2)^2 \end{bmatrix}$$

2. Para tentar encontrar a forma normal mais simples do sistema (1) nas coordenadas x_j é necessário resolver a equação

$$\mathcal{L}_J(\vec{h}^{(k)}) = \vec{g}^{(k)}, \tag{3}$$

onde o operador linear $\mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ é dado por

$$\mathcal{L}_J \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} J_{ik} x_k \right) \frac{\partial}{\partial x_i} - \overset{\leftrightarrow}{J}.$$

Cálculo da forma normal

- Se existe $\vec{h}^{(k)}$ que satisfaça a eq. (3), então todos os termos não lineares de grau k podem ser removidos. Isto significa que a matriz $\mathcal{L}_J(\vec{h}^{(k)})$ é inversível (possui determinante não-nulo) e $\vec{h}^{(k)} = \mathcal{L}_J^{-1}(\vec{g}^{(k)})$. Se o determinante é nulo, há termos de $d\vec{y}/dt$ que não podem ser removidos.

3. Se $\vec{g}$ contém termos de grau $k+1$, repete-se o procedimento. Ao final de uma sequência de transformações, obtemos a forma normal
$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} J_{ji}x_i + g_{j\,res}^{(2)}(\vec{x}) + g_{j\,res}^{(3)}(\vec{x}) + \cdots \ ,$$
onde $g_{j\,res}^{(k)}(\vec{x})$ são os termos ressonantes de grau k e dependendem apenas da parte linear do campo vetorial original, por meio da matriz $\overset{\leftrightarrow}{J}$ na forma canônica de Jordan.

Exemplo 6.9

Determine a forma normal de um campo vetorial bidimensional na vizinhança de uma ponto de equilíbrio com dois autoavalores nulos.

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overleftrightarrow{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Velhas coordenadas y → novas coord. x

2 dimensões e grau 2.

$$\vec{g} = \sum_{j=1}^{6} \beta_j \vec{m}_j \quad e \quad \vec{h} = \sum_{j=1}^{6} \alpha_j \vec{m}_j$$

$$\mathcal{L}_J(\vec{m}_j) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \vec{m}_j}{\partial x_i} \left(\sum_{l=1}^{2} J_{il} x_l \right) - \overleftrightarrow{J} \vec{m}_j \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, 6$$

$$\mathcal{L}_J(\vec{m}_1) = \mathcal{L}_J\left(\begin{bmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} (J_{11} x_1 + J_{12} x_2) + \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} (J_{21} x_1 + J_{22} x_2) - \overleftrightarrow{J} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_J(\vec{m}_1) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 0 \end{bmatrix} (0 x_1 + 1 x_2) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\dots) - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 x_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 x_1^2 + 1 \cdot 0 \\ 0 x_1^2 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\vec{m}_2$$

Exemplo 6.9 (cont.)

$L_J(\vec{m}_1) = 2\vec{m}_2$

$L_J(\vec{m}_2) = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{m}_3$

$L_J(\vec{m}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$

$L_J(\vec{m}_4) = \begin{bmatrix} -x_1^2 \\ 2x_1x_2 \end{bmatrix} = -\vec{m}_1 + 2\vec{m}_5$

$L_J(\vec{m}_5) = \begin{bmatrix} -x_1x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = -\vec{m}_2 + \vec{m}_6$

$L_J(\vec{m}_6) = \begin{bmatrix} -x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} = -\vec{m}_3$

→ Linearmente dependentes

⇒ $\vec{m}_4$ não aparece

→ $\vec{h} = \sum_i \alpha_i \vec{m}_i$

⇒ Subespaço $L_J(H^{(2)})$ tem dimensão menor que $H^{(2)}$!

↳ Base para o subespaço de dimensão 4:

$$\begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} 2x_1x_2 \\ 0 \end{bmatrix}; & \begin{bmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}; & \begin{bmatrix} -x_1^2 \\ 2x_1x_2 \end{bmatrix}; & \begin{bmatrix} -x_1x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 2\vec{m}_2 & \vec{m}_3 & -\vec{m}_1 + 2\vec{m}_5 & -\vec{m}_2 + \vec{m}_6 \end{array}$$

Tenho que resolver $L_J(\vec{h}) = \vec{g}$ ⇒ Os termos de $\vec{g}$ que podem ser escritos como combinação dos 4 vetores acima podem ser removidos!

Exemplo 6.9 (cont.)

Espaço complementar $G^{(2)}$: termos de $\vec{g}$ deste espaço não podem ser removidos!

$$\underbrace{\mathcal{L}_J(H^{(2)})}_{\dim 4} \oplus \underbrace{G^{(2)}}_{\dim 2} = \underbrace{H^{(2)}}_{\dim 6}$$

→ Representação de $\mathcal{L}_J(H^{(2)})$ na base original $\vec{m}_j$:

$$\mathcal{L}_J(\vec{m}_1) = a\vec{m}_1 + b\vec{m}_2 + c\vec{m}_3 + d\vec{m}_4 + e\vec{m}_5 + f\vec{m}_6$$

$$= 0\,m_1 + 2\vec{m}_2 + 0\,\vec{m}_3 + 0\,\vec{m}_4 + 0\,\vec{m}_5 + 0\,\vec{m}_6$$

$$\mathcal{L}_J(H^{(2)}) = \begin{array}{cccccc} \vec{m}_1 & \vec{m}_2 & \vec{m}_3 & \vec{m}_4 & \vec{m}_5 & \vec{m}_6 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det \mathcal{L}_J(H^{(2)}) = 0 \Rightarrow$ não é inversível

$\Rightarrow$ $\vec{m}_4$ não aparece na aplicação de $\mathcal{L}_J$ em $\vec{m}_j$

$\Rightarrow \exists\, G^{(2)}$

→ Encontrar 2 vetores para a base de $G^{(2)}$ $\Rightarrow$ $\vec{m}_4$ pode ser um deles.

Exemplo 6.9 (cont.)

Busco um segundo vetor ortogonal a $\mathcal{L}_J(H^{(2)})$

$$\vec{v}^T \mathcal{L}_J(H^{(2)}) = \vec{0}$$

$$\vec{v}^T = [a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f]$$

$$[a \; b \; c \; d \; e \; f] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 2b = 0 & \rightarrow b = 0 \\ c = 0 & \rightarrow c = 0 \\ 0 = 0 & \\ -a + 2e = 0 & \boxed{a = 2e} \\ -b + f = 0 & \rightarrow f = 0 \\ -c = 0 & \end{cases}$$

ok

$$\vec{v}^T = [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1/2 \quad 0] \quad \text{e}$$

$$\vec{m}_4 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

formam a base de $G^{(2)}$

$$\vec{v}^T = -1\vec{m}_1 - \frac{1}{2}\vec{m}_5$$

$$= -\begin{bmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^2 \\ -\frac{x_1 x_2}{2} \end{bmatrix}$$

Exemplo 6.9 (cont.)

$$\vec{m}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -x_1^2 \\ -\frac{x_1 x_2}{2} \end{bmatrix}$$

Estes 2 vetores formam a base de $G^{(2)}$ e constituem os termos que não podem ser excluídos por meio de transformação de coordenadas se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

A forma dos termos ressonantes será dada por uma combinação linear destes vetores.

Sistema original: $\vec{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 + \beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_1 y_2 + \beta_3 y_2^2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \beta_4 y_1^2 + \beta_5 y_1 y_2 + \beta_6 y_2^2 \end{cases}$$

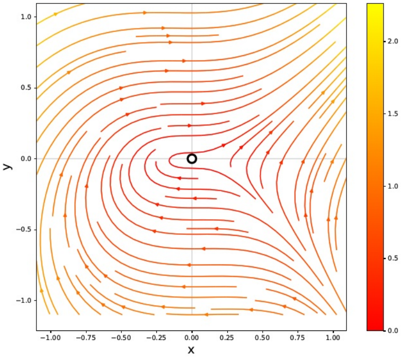
pode ser simplificado para a forma normal:

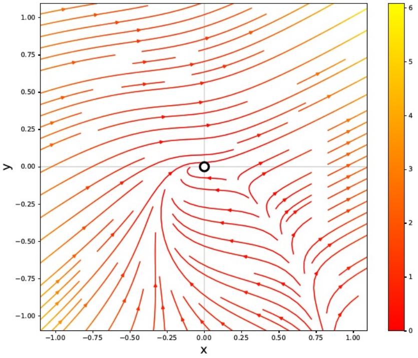
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = y_2 + a x_1^2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = b x_1^2 + \dfrac{a}{2} x_1 x_2 \end{cases}$$

$b \vec{m}_4$

$a \vec{v} = a\left(\vec{m}_1 + \frac{1}{2}\vec{m}_5\right)$.

Espaços de fase



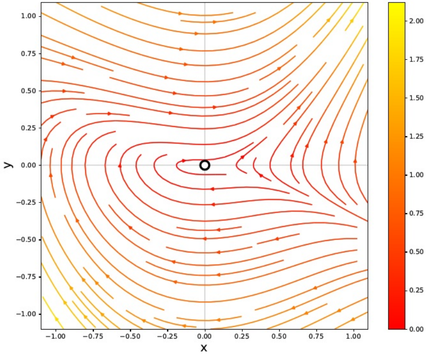


$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_2 + a(x_1)^2 \\ \dot{x_2} &= \frac{a}{2}x_1x_2 + b(x_1)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x_1} &= x_2 + \beta_1(x_1)^2 + \beta_2(x_1x_2) + \beta_3(x_2)^2 \\ \dot{x_2} &= \beta_4(x_1)^2 + \beta_5(x_1x_2) + \beta_6(x_2)^2 \end{cases}$$

$$a = 0.5,\ b = 1.0,\ \beta_1 = 2.0,\ \beta_2 = 1.0,\ \beta_3 = \beta_6 = 0.5,\ \beta_4 = \beta_5 = 1.0$$

Espaços de fase

Com outra base de $G^{(2)}$



$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= a(x_1)^2 + b(x_1 x_2) \end{cases}$$

$$a = 0.5,\, b = 1.0$$

Exercícios

Monteiro cap 6:
6.29, 6.30 (computacional)

Referências

1. Luiz H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos*, 3^a ed., Editora Livraria da Física, São Paulo (2011)
2. Morris W. Hirsch, Stephen Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra.*, 1^{st} ed., Academic Press, New Yok, USA (1974)