Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein[1]

[1]Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

1. **Formas normais**
   - Caso sem ressonância

Introdução

- Busca-se uma transformação de coordenadas $\vec{y} \to \vec{x}$ que simplifique ao máximo a expressão analítica da parte não linear, além da translação do ponto de equilíbrio para a origem e da transformação da parte linear para a forma canônica de Jordan.

Seja o sistema

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \overleftrightarrow{J}\vec{y} + \vec{g}(\vec{y}), \tag{1}$$

onde $\overleftrightarrow{J}$ é a matriz da parte linear na forma canônica de Jordan e $\vec{g}(\vec{y})$ representa a parte não linear. Procuraremos uma mudança de coordenadas

$$\vec{y} = \vec{x} + \vec{h}(\vec{x}), \tag{2}$$

sendo $\vec{h}$ um polinômio a determinar, de modo a podermos reeescrever a eq. (1) como um sistema linear

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \overleftrightarrow{J}\vec{x}.$$

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = \overleftrightarrow{A}\vec{z}$$

$\downarrow$

$\overleftrightarrow{P}$ modal

$$\overleftrightarrow{J} = \overleftrightarrow{P}^{-1}\overleftrightarrow{A}\overleftrightarrow{P}$$

$$\overleftrightarrow{P}^{-1}\vec{z} = \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \overleftrightarrow{D}\vec{v}$$

$\uparrow$

se $\overleftrightarrow{J}$ é Diagonal.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

Caso sem ressonância

- Pontos de equilíbrio hiperbólicos, sem ressonância entre os auto-valores.

Suposição: g_j são polinômios formados pela soma de monômios do tipo $y_1^{k_1} y_2^{k_2} \cdots y_n^{k_n}$, $k_i \in \mathbb{N}$

e $\sum_{i=1}^{n} k_i = k \geq 2$

ex: $k=3 \rightarrow$ monômios: (em 2D)

y_1^3; $y_1^2 y_2$, $y_1 y_2^2$, y_2^3

$\Rightarrow$ A origem é hiperbólica se

$Re\{J_{jj}\} \neq 0$

eq. 1 $\rightarrow$ $\frac{d\vec{y}}{dt} = \overleftrightarrow{J}\vec{y} + \vec{g}(\vec{y})$ } componentes

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} J_{jk} y_k + g_j(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

↳ mudança de coordenadas para $\vec{x}$, tal que

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \overleftrightarrow{J}\vec{x} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} J_{jk} x_k}$$

Caso sem ressonância

$$\vec{y} = \vec{x} + \vec{h}(\vec{x}) \quad \text{ou}$$

$$y_j = x_j + h_j(x_1, x_2, \dots x_n)$$

$$\frac{dy_j}{dt} = \frac{dx_j}{dt} + \frac{d}{dt}\left[h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \right]$$

$$\sum_k J_{jk} y_k + g_j = \frac{dx_j}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}$$

$$\sum_{k=1}^{n} J_{jk} y_k + g_j = \frac{dx_j}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial x_k} \left(\sum_{l=1}^{n} J_{jl} x_l \right)$$

$$\sum_k J_{jk} (x_k + h_k) + g_j - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial x_k} \sum_{l=1}^{n} J_{jl} x_l = \frac{dx_j}{dt}$$

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} J_{jk} x_k + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} J_{jk} h_k + g_j - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial x_k} \sum_{l=1}^{n} J_{jl} x_l}$$

deve ser igual a zero para simplificar a equação

$k \to i$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^{n} J_{ik} x_k \right) - \sum_{i=1}^{n} J_{ji} h_i = g_j} \quad (*)$$

Operador (linear)

$$\mathcal{L}_J(\vec{h}) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{h}}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^{n} J_{ik} x_k \right) - \overleftrightarrow{J} \vec{h}$$

Caso sem ressonância

$\mathcal{L}(\vec{h}) = \vec{g}$ ← campo vetorial conhecido.

↓ monômios

h e g devem ter o <u>mesmo grau</u>!

$$h_j = \prod_{l=1}^{k} x_l^{k_l} \quad , \quad \sum k_l = k$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \prod_{l=1}^{n} x_l^{k_l} = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = k_i x_i^{k_i - 1} \prod_{l \neq i}^{n} x_l^{k_l} = k_i \left(\frac{x_i^{k_i}}{x_i} \prod_{l \neq i} x_l^{k_l} \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = k_i \frac{h_j}{x_i}}$$

→ ponto hiperbólico, sem autovalor repetido

$$\overleftrightarrow{J}_{ij} = \delta_{ij} \lambda_j \quad ; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^{n} J_{ik} x_k \right) - \sum_{i=1}^{n} J_{ji} h_i = g_j$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \frac{h_j}{x_i} \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} \lambda_k x_k \right) - \sum_{i=1}^{n} \delta_{ji} \lambda_i h_i = g_j$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(k_i \frac{h_j}{\cancel{x_i}} \lambda_i \cancel{x_i} \right) - \lambda_j h_j = g_j$$

$$\boxed{\left[\sum_{i=1}^{n} (k_i \lambda_i) - \lambda_j \right] h_j = g_j}$$

Exemplo 6.7

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda_1\, y_1$$
$$\frac{dy_2}{dt} = \lambda_2\, y_2 + a\, y_1^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \lambda_1 x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \lambda_2 x_2 \end{cases}$$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} g_1(y_1, y_2) = 0 & \leftarrow \quad h_1 = 0 \\ g_2(y_1, y_2) = a\, y_1^2 & \leftarrow \quad \text{Sugere busca } h_2(x_1) = \alpha\, x_1^\beta \end{cases}$$

$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_2 + h_2(x_1) = x_2 + \alpha\, x_1^\beta$$
$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{dx_2}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\alpha x_1^\beta\right)$$
$$\lambda_2 y_2 + a y_1^2 = \frac{dx_2}{dt} + \alpha\beta\, x_1^{\beta-1}\frac{dx_1}{dt}$$
$$\lambda_2\left(x_2 + \alpha x_1^\beta\right) + a x_1^2 = \lambda_2 x_2 + \alpha\beta\, x_1^{\beta-1}(\lambda_1 x_1)$$

$$\cancel{\lambda_2 x_2} + \alpha \lambda_2 x_1^\beta + a x_1^2 = \cancel{\lambda_2 x_2} + \alpha\beta\lambda_1 x_1^\beta$$
$$\alpha \lambda_2 x_1^\beta - \alpha\beta\lambda_1 x_1^\beta = -a x_1^2$$
$$\boxed{\alpha\left(\beta\lambda_1 - \lambda_2\right) x_1^\beta = a x_1^2}$$

$\rightarrow$ Para vale independente de x_1

$$\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha\left(\beta\lambda_1 - \lambda_2\right) = a \end{cases}$$

Exemplo 6.7 (cont.)

$$\alpha(2\lambda_1 - \lambda_2) = a$$

$$\boxed{\alpha = \frac{a}{2\lambda_1 - \lambda_2}}$$

Apenas se $2\lambda_1 \neq \lambda_2$!

sem ressonância.

Transformação:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_2 - \frac{a}{2\lambda_1 - \lambda_2} y_1^2 \end{aligned}}$$

O sistema se torna linear e desacoplado nas coordenadas x_i.
(se $2\lambda_1 \neq \lambda_2$)

- Se $2\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$ caso ressonante

próxima aula

Exemplo 6.8

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1$$
$$\frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2 + a y_1^2 + b y_1^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \lambda_1 x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \lambda_2 x_2 \end{cases}$$

$$\overleftrightarrow{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} g_1(y_1, y_2) = 0 \\ g_2(y_1, y_2) = a y_1^2 \end{cases}$$

1ª Transformação (igual ao 6.7)

$$\begin{cases} y_1 = \vartheta_1 \\ y_2 = \vartheta_2 + \alpha \vartheta_1^2 \end{cases}$$

$\leftarrow$ para eliminar o termo de 2º grau

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{2} k_i \lambda_i - \lambda_j\right) h_j = g_j$$

$k_1 \downarrow \quad k_2 \downarrow$

$$\left(\sum_{i=1}^{2} k_i \lambda_i - \lambda_2\right) h_2 = g_2 = a y_1^2 = a y_1^2 y_2^0$$

$$(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 - \lambda_2) h_2 = a y_1^2$$

$$(2\lambda_1 + 0\lambda_2 - \lambda_2) h_2 = a y_1^2$$

$$(2\lambda_1 - \lambda_2) h_2 = a y_1^2$$

$$h_2(y_1) = \frac{a y_1^2}{2\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \text{se } \underline{2\lambda_1 \neq \lambda_2}$$

Exemplo 6.8 (cont.)

Verificando:

$$\begin{cases} y_1 = \vartheta_1 \\ y_2 = \vartheta_2 + \alpha \vartheta_1^2 \end{cases}, \quad \alpha = \frac{a}{2\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{d\vartheta_2}{dt} + 2\alpha\vartheta_1 \frac{d\vartheta_1}{dt}$$

$$\lambda_2 y_2 + a y_1^2 + b y_1^3 = \frac{d\vartheta_2}{dt} + 2\alpha\vartheta_1(\lambda_1\vartheta_1)$$

$$\lambda_2(\vartheta_2 + \alpha\vartheta_1^2) + a\vartheta_1^2 + b\vartheta_1^3 = \frac{d\vartheta_2}{dt} + 2\alpha\lambda_1\vartheta_1^2$$

$$\frac{d\vartheta_2}{dt} = \lambda_2\vartheta_2 + \alpha\lambda_2\vartheta_1^2 + a\vartheta_1^2 - 2\alpha\lambda_1\vartheta_1^2 + b\vartheta_1^3$$

$$\frac{d\vartheta_2}{dt} = \lambda_2\vartheta_2 + [\alpha(\lambda_2 - 2\lambda_1) + a]\vartheta_1^2 + b\vartheta_1^3$$

$$= \lambda_2\vartheta_2 + \left[\frac{a}{2\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_2 - 2\lambda_1) + a\right]\vartheta_1^2 + b\vartheta_1^3$$

$$= \lambda_2\vartheta_2 + (-a + a)\vartheta_1^2 + b\vartheta_1^3$$

$$\frac{d\vartheta_2}{dt} = \underline{\underline{\lambda_2\vartheta_2 + b\vartheta_1^3}}$$

anula o termo em ϑ_1^2.

Exemplo 6.8 (cont.)

2ª Transformação:

$$\begin{cases} g_1 = 0 \\ g_2 = b\,\vartheta_1^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vartheta_1 = x_1 \\ \vartheta_2 = x_2 + h_2(x_1, x_2) = x_2 + \beta x_1^3 \end{cases}$$

$$\frac{d\vartheta_2}{dt} = \frac{dx_2}{dt} + 3\beta x_1^2 \frac{dx_1}{dt}$$

$$\lambda_2 \vartheta_2 + b\vartheta_1^3 = \lambda_2 x_2 + 3\beta x_1^2 (\lambda_1 x_1)$$

$$\lambda_2 (x_2 + \beta x_1^3) + b x_1^3 = \lambda_2 x_2 + 3\beta \lambda_1 x_1^3$$

$$\cancel{\lambda_2 x_2} + \lambda_2 \beta x_1^3 + b x_1^3 = \cancel{\lambda_2 x_2} + 3\beta \lambda_1 x_1^3$$

$$(\beta \lambda_2 + b - 3\beta \lambda_1)\, x_1^3 = 0$$

para valer independente de x_1

$$\beta \lambda_2 - 3\beta \lambda_1 + b = 0$$

$$\beta (3\lambda_1 - \lambda_2) = b$$

$$\boxed{\beta = \frac{b}{3\lambda_1 - \lambda_2}} \quad ; \quad 3\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\vartheta_1 = x_1$$

$$\vartheta_2 = x_2 + \frac{b}{3\lambda_1 - \lambda_2} x_1^3 \quad \text{se } 3\lambda_1 \neq \lambda_2$$

é caso sem ressonância

Exemplo 6.8 (cont.)

O sistema original é linearizável

por transformações sucessivas

Se $\begin{cases} 2\lambda_1 \neq \lambda_2 \\ 3\lambda_1 \neq \lambda_2. \end{cases}$

Exemplo 3

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1$$
$$\frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2 + b\, y_1 y_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \lambda_1 x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \lambda_2 x_2 \end{cases}$$

$$\overleftrightarrow{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} g_1(y_1, y_2) = 0 \longrightarrow h_1 = 0 \\ g_2(y_1, y_2) = b y_1 y_2 \quad - \underline{k_1 = 1}, \ \underline{k_2 = 1} \end{cases}$$

$$h_2 = \beta(y_1 y_2)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \lambda_i - \lambda_j\right) h_j = g_j$$

$$(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 - \lambda_2) h_2 = g_2$$

$$(\lambda_1 + \cancel{\lambda_2} - \cancel{\lambda_2}) h_2 = b y_1 y_2$$

$$\lambda_1 \beta y_1 y_2 = b y_1 y_2$$

$$\Rightarrow \quad \beta = \frac{b}{\lambda_1}, \quad \text{se } \lambda_1 \neq 0$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 + \dfrac{b}{\lambda_1} x_1 x_2 \end{cases}$$

Exemplo 3

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1$$
$$\frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2 + b\, y_1 y_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \lambda_1 x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \lambda_2 x_2 \end{cases}$$

• Se $\lambda_1 = 0$:

$$\frac{dy_1}{dt} = 0 \Rightarrow y_1(t) = c \longrightarrow$$

Com termos cruzados, sempre se pode linearizar!

$$\frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2 + b c y_2$$
$$= (\lambda_2 + bc) y_2$$

Referências

1. Luiz H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos*, 3^a ed., Editora Livraria da Física, São Paulo (2011)