Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein[1]

[1]Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

1. **Teoria da Variedade Central**
   - Teorema da variedade central
   - Teoremas de Carr

Introdução

O teorema da variedade central estende os resultados do teorema de Hartman-Grobman para os casos em que algum autovalor associado a um ponto de equilíbrio é nulo ou tem parte real nula.

- Mostra-se que o comportamento pode ser reduzido ao estudo da dinâmica sobre **uma** variedade central W^c tangente ao subespaço central E^c.
- Comportamento em E^e e E^i são bem determinados: queda ou crescimento exponencial, respectivamente.
- Em E^c, o comportamento não é tão bem determinado. Pode apresentar solução periódica, constante, que cresce linearmente com o tempo. (ver livro do Monteiro, p. 212)

Teorema da variedade central

Teorema (Variedade central)

Seja um sistema

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$$

com $\vec{f}(\vec{x})$ de classe r, P um ponto de equilíbrio de $\vec{f}$ e considere a matriz jacobiana da versão linearizada calculada em P. Se há autovalor da matriz $\lambda \in \sigma_c$, então existe uma variedade, invariante local, tangente ao subespaço E^c em P. Esta variedade possui a mesma dimensão n_c de E^c, é de classe $r-1$ e não é necessariamente única.

Exemplo (Kelley - 1967)

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

$$\frac{dy}{dt} = -y \quad \to \quad \boxed{y(t) = y_0 e^{-t}} \quad \text{A}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{x'^2} = \int_{t_0}^{t} dt'$$

$$-\frac{1}{x'}\Big|_{x_0}^{x} = t - 0$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = t$$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x x_0} = t} \quad \text{C}$$

$$x - x_0 = x x_0 t$$

$$x - x x_0 t = x_0$$

$$x(1 - x_0 t) = x_0$$

$$\boxed{x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}} \quad \text{B}$$

Y em função de x para o espaço de fase

$$y(x) = y_0 e^{-\frac{x - x_0}{x x_0}} \quad \text{C}$$

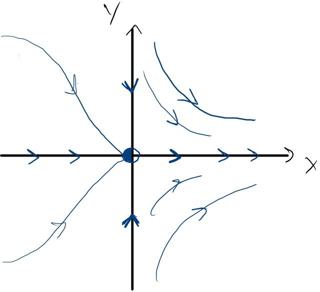
$$= y_0 e^{-\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x}}$$

$$\boxed{y(x) = \left(y_0 e^{-1/x_0}\right) e^{1/x}} \quad \text{D}$$

A $\quad y(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0, \quad \forall y_0$

B $\quad \begin{cases} x(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0, & \text{se } x_0 < 0 \\ x(t) \xrightarrow{t \to \frac{1}{x_0}} \infty, & \text{se } x_0 > 0 \end{cases}$

Exemplo (cont.)



$f(x^*)=0 \Rightarrow x^*=0$

$g(y^*)=0 \Rightarrow y^*=0$

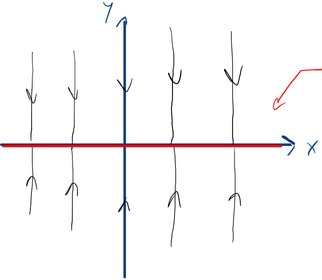
Linearização: $f(x,y)=x^2$, $g(x,y)=-y$

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{(0,0)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \to \text{Diagonal} \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x(t) = x_0 \quad \text{constante} \\ y(t) = y_0\, e^{-t} \end{array}$$

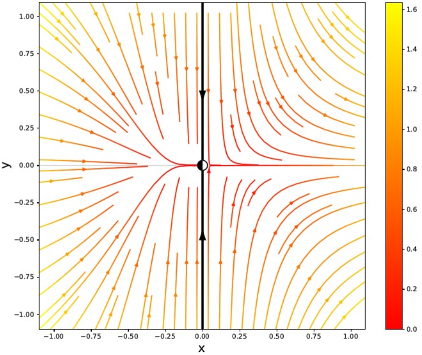
Exemplo (cont.)



linha de pontos de equilíbrio

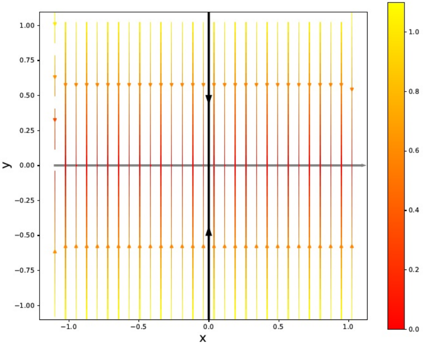
Exemplo - Kelley - 1967 - Espaço de fase

Não-linear



$$\frac{dx}{dt} = x^2$$
$$\frac{dy}{dt} = -y$$

Linearizado



$$\frac{dx}{dt} = 0$$
$$\frac{dy}{dt} = -y$$

Variedade central

- Se algum autovalor tem parte real positiva, o ponto de equilíbrio não pode ser estável, portanto falta analisar o caso apenas com autovalores com parte real nula e negativa.

Considere um sistema não linear de dimensão n com ponto de equilíbrio isolado, não hiperbólico ($n_c = c \neq 0$ e $e + c = n$) e deslocado para a origem. Devemos determinar e seus autovetores e escrever a parte linear do sistema na forma canônica de Jordan:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=1}^{c} A_{ji}x_i + f_j(\vec{x},\vec{y}), \qquad j = 1, 2, \ldots, c \tag{1}$$

$$\frac{dy_k}{dt} = \sum_{k=1}^{e} B_{ki}x_i + g_k(\vec{x},\vec{y}), \qquad k = 1, 2, \ldots, e, \tag{2}$$

onde $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_c)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_e)$

Variedade central

Em notação vetorial, temos

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \overleftrightarrow{A}\,\vec{x} + \vec{f}(\vec{x},\vec{y})$$
$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \overleftrightarrow{B}\,\vec{y} + \vec{g}(\vec{x},\vec{y}),$$

onde a matriz "central" $\overleftrightarrow{A}$ é $c \times c$ e a matriz "estável" $\overleftrightarrow{B}$ é $e \times e$.

- Esta é a situação mais geral de um ponto de equilíbrio não hiperbólico com estabilidade assintótica indeterminada.

Variedade central

Em notação vetorial, temos

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \overset{\leftrightarrow}{A}\,\vec{x} + \vec{f}(\vec{x},\vec{y})$$
$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \overset{\leftrightarrow}{B}\,\vec{y} + \vec{g}(\vec{x},\vec{y}),$$

onde a matriz "central" $\overset{\leftrightarrow}{A}$ é $c \times c$ e a matriz "estável" $\overset{\leftrightarrow}{B}$ é $e \times e$.

- Esta é a situação mais geral de um ponto de equilíbrio não hiperbólico com estabilidade assintótica indeterminada.

Definição (Variedade central)

Define-se uma variedade invariante como central se ela pode ser representada localmente pelas curvas contínuas e diferenciáveis $y_k = h_k(\vec{x})$, com $h_k(\vec{0}) = 0$ e

$$\left.\frac{\partial h_k}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}=\vec{0}} = 0, \quad \forall i,$$

para $k = 1, \ldots, e$.

Variedade central

- A variedade central W^c passa pelo ponto de equilíbrio.
- W^c é tangente a E^c no ponto de equilíbrio.
- As funções h_k atribuem valores para as variáveis y_k, do subespaço estável, a partir de valores de $x_1, x_2, \ldots, x_c$.

Podemos reescrever a parte do sistema relacionado à matriz "central" como

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=1}^{c} A_{ji} x_i + f_j(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x})), \qquad j = 1, 2, \ldots, c \tag{3}$$

Teoremas de Carr (1981)

Teorema (Carr (1))

Existe uma variedade central para sistemas não lineares, eqs. (1) e (2), com ponto de equilíbrio não hiperbólico e o fluxo, restrito a essa variedade, é governado pelas equações

Teorema (Carr (2))

Os comportamentos assintóticos das soluções em torno da origem do sistema original, eqs. (1) e (2), e do sistema reduzido, eqs. (3), são equivalentes.

Teoremas de Carr

Teorema (Carr (3))

Para obter $\vec{h}(\vec{x})$, ao menos aproximadamente, pode-se utilizar a expansão em série de Taylor em torno de $\vec{x}^* = \vec{0}$. Assim, substituindo $y_k = h_k(\vec{x})$ nas eqs. (2) e usando

$$\frac{dy_k}{dt} = \frac{\partial h_k}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial h_k}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial h_k}{\partial x_c}\frac{dx_c}{dt},$$

obtemos

$$\frac{\partial h_k}{\partial x_1}\left(\sum_{i=1}^{c} A_{1i}x_i + f_1(\vec{x},\vec{h}(\vec{x}))\right) + \cdots + \frac{\partial h_k}{\partial x_c}\left(\sum_{i=1}^{c} A_{ci}x_i + f_c(\vec{x},\vec{h}(\vec{x}))\right)$$
$$- \sum_{i=1}^{c} B_{ki}h_i(\vec{x}) - g_k(\vec{x},\vec{h}(\vec{x})) = 0, \qquad k = 1,\ldots,e. \tag{4}$$

- As soluções devem obedecer a $h_k(\vec{0}) = 0$ e $(\partial h_k/\partial x_i)_{\vec{x}=\vec{0}} = 0$.

- A equação (4) pode ser insolúvel!
- O terceiro teorema permite a aproximação de $\vec{h}(\vec{x})$ por um polinômio $\vec{\phi}(\vec{x})$
- Usando as condições acima, $h_k(\vec{0}) = 0$ e $(\partial h_k/\partial x_i)_{\vec{x}=\vec{0}} = 0$, temos que

$$\vec{h}(\vec{x}) = \alpha(\vec{x})^2 + \beta(\vec{x})^3 + \cdots$$

Exemplo 6.6:

$$\frac{dx}{dt} = xy + ax^3 + bxy^2 = f(x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + cx^2 = g(x,y)$$

Ponto de eq.

$-y^* + cx^{*2} = 0$

$y^* = cx^{*2}$

$cx^{*3} + ax^{*3} + bcx^{*3} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x^* = 0 \\ y^* = 0 \end{matrix}}$

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y + 3ax^2 + by^2) & (x + 2bxy) \\ 2cx & -1 \end{bmatrix}_{(0,0)}$$

Exemplo 6.6 (cont.)

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{em } P=(0,0)$$

Diagonal $\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$ ponto não hiperbólico

$$\frac{dx}{dt} = xy + ax^3 + bxy^2 = \underbrace{A_{11}x}_{A_{11}=0} + \underbrace{f_x(x,y)}_{\text{parte não linear}}$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + cx^2 = \underbrace{B_{11}y}_{B_{11}=-1} + g_y(x,y)$$

O sistema já está na forma canônica de Jordan por ser diagonal

$$y(x) = h(x) \approx \phi(x) = \alpha x^2 + \beta x^3$$

apenas 1 função

$$\frac{dh}{dx}\left[A_{11}x + f_x(x,h(x))\right] - B_{11}h(x) - g(x,h(x)) = 0$$

$$(2\alpha x + 3\beta x^2)\left[x\phi + ax^3 + bx\phi^2\right] + \phi - cx^2 = 0$$

$$\underbrace{(2\alpha x + 3\beta x^2)\left[x(\alpha x^2 + \beta x^3) + ax^3 + bx(\alpha x^2 + \beta x^3)^2\right]}_{O(x^4)} + \alpha x^2 + \beta x^3 - cx^2 = 0$$

$$(\alpha - c)x^2 + \beta x^3 + O(x^4) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha - c = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \rightarrow \underline{\alpha = c}$$

Exemplo 6.6 (cont.)

$$\phi(x) = \alpha x^2 + \beta x^3$$
$$= c x^2$$

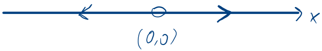
Volta em

$$\frac{dx}{dt} = x y + a x^3 + b x y^2$$

$$\{ \; y = y(x) = h(x)$$

$$\approx x \phi + a x^3 + b x \phi^2$$
$$= x(c x^2) + a x^3 + b x (c x^2)^2$$
$$= c x^3 + a x^3 + b c x^5$$
$$= (c + a) x^3 + O(x^5)$$

• Se $(a+c) > 0 \rightarrow$ Instável



• Se $(a+c) < 0 \rightarrow$ Estável

• Se $(a+c) = 0$, ou seja $c = -a$

$\Rightarrow$ Ordens mais altas

$$\phi(x) = \alpha x^2 + \beta x^3 + \gamma x^4$$

$$\frac{d\phi}{dt} = 2\alpha x + 3\beta x^2 + 4\gamma x^3$$

Exemplo 6.6 (cont.)

$$\frac{dh}{dt}\left[\cancel{A_{11}x}^{\,0} + f(x,h(x))\right] - \underbrace{B_{11}}_{-1} h(x) - g(x,h(x)) = 0$$

$$(2\alpha x + 3\beta x^2 + 4\delta x^3)\left[x\phi + ax^3 \underbrace{bx\phi^2}_{O(x^5)}\right] + \phi - cx^2 = 0$$

$$\phi(x) = \alpha x^2 + \beta x^3 + \delta x^4$$

$$\left[2\alpha x + O(x^2)\right]\left[x(\alpha x^2 + O(x^3)) + ax^3 + O(x^5)\right]$$
$$+ \alpha x^2 + \beta x^3 + \delta x^4 - cx^2 = 0$$

$$2\alpha^2 x^4 + 2\alpha a x^4 + \alpha x^2 + \beta x^3 + \delta x^4 - cx^2 + O(x^6) = 0$$

$$\left[2\alpha(\alpha + a) + \delta\right]x^4 + \beta x^3 + (\alpha - c)x^2 + O(x^6) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha = c \\ \beta = 0 \\ \delta = -2\alpha(\alpha + a) = -2c(a+c) \end{cases}$$

$$\phi(x) = cx^2 - 2c(a+c)x^4$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = x\phi + ax^3 + bx\phi^2$$

$$= cx^3 - 2c(a+c)x^5 + ax^3 + bx\left(cx^2 - 2c(a+c)x^4\right)^2$$

$$= (a+c)x^3 - 2c(a+c)x^5 + bc^2x^5 + O(x^6)$$

$$\frac{dx}{dt} = (a+c)x^3 + \left[bc^2 - 2c(a+c)\right]x^5 + O(x^6)$$

- Se $a + c = 0$: $a = -c$

$$\frac{dx}{dt} = bc^2x^5 + O(x^6)$$

Exemplo 6.6 (cont.)

- Se $a+c=0$ e $b>0$

  Instável

- Se $a+c=0$ e $b<0$

  Estável.

- Se $a+c=0$ e $b=0$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy + ax^3 + \cancel{bxy^2} \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + cx^2 \end{cases}$$

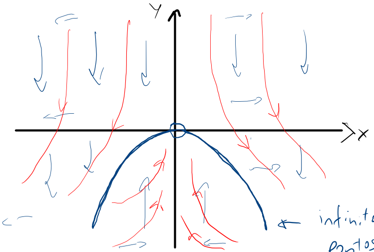
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy + ax^3 = x(y+ax^2) \\ \dfrac{dy}{dt} = -y - ax^2 = -(y+ax^2) \end{cases}$$

Se $x^* = 0 \Rightarrow y^* = 0$

$\Rightarrow \boxed{y^* = -ax^{*2}}$

$\leftarrow$ pontos de equilíbrio não isolados sobre uma parábola

$\underline{a>0}$



$\leftarrow$ infinitos pontos de equilíbrio

Exercício 6.17 (cont.)

$$\frac{dx}{dt} = x^2y - x^5 = 0 + f_x(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = -y + x^2 = -y + g_y(x,y)$$

Sistema linearizado:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases} \rightarrow \overleftrightarrow{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \overleftrightarrow{J}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0x + 0y \\ 0x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y \end{bmatrix}$$

Ponto de equilíbrio: $(0,0)$

não hiperbólico: $\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$ (matriz diagonal)

Exercício 6.17 (cont.)

$$h(x) \simeq \phi(x) = \alpha x^2 + \beta x^3$$

$$\frac{dh}{dx} \simeq 2\alpha x + 3\beta x^2$$

$B_{11} = -1$

$$\frac{dh}{dt}\left[\cancel{A_{11} x}^{0} + f(x,\phi(x))\right] - B_{11}\phi(x) - g(x,\phi(x)) = 0$$

$$\underbrace{(2\alpha x + 3\beta x^2)\left[x^2(\alpha x^2 + \beta x^3) - x^5\right]} + (\alpha x^2 + \beta x^3) - x^2 = 0$$

$$O(x^5) + (\alpha - 1)x^2 + \beta x^3 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

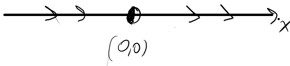
$$\phi(x) = x^2$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 y - x^5$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \phi - x^5 + O(x^6)$$

$$= x^2 x^2 + O(x^5)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^4 + O(x^5)$$



$\Rightarrow$ Instável

Exercícios

Monteiro cap 6:
6.17, 6.18, 6.19, 6.20, 6.21, 6.22, 6.23

Referências

1. Luiz H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos*, 3^a ed., Editora Livraria da Física, São Paulo (2011)