Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein[1]

[1] Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

1. **Sistemas não lineares de tempo contínuo**
   - Teorema de Hartman-Grobman
2. **Teorema das variedades hiperbólicas**

Sistemas hiperbólicos

Definição

Uma matriz $\overset{\leftrightarrow}{A}$ *é dita* ***hiperbólica*** *se nenhum dos seus autovalores tem parte real igual a* 0*. Também chamamos o sistema linear*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \overset{\leftrightarrow}{A}\vec{x}$$

de ***hiperbólico****.*

- Analogamente ao caso linear, dizemos que um ponto de equilíbrio $\vec{z}^*$ de um sistema não linear é hiperbólico se todos os autovalores do sistema linearizado correspondente possuem parte real não nula.

Teorema de Hartman-Grobman

Teorema (Hartman-Grobman)

Na vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico, um sistema não-linear n-dimensional apresenta comportamento qualitativamente equivalente ao do sistema linear correspondente.

- A estabilidade de um ponto de equilíbrio hiperbólico em um sistema não linear é a mesma do sistema linear equivalente.
- Os retratos de fase de ambos são topologicamente orbitalmente equivalentes.
- Se o ponto é não-hiperbólico, devemos analisar mais termos da série de Taylor ou recorrer a outros métodos, como o método direto de Lyapunov.

Exemplo: Espécies competindo por alimentos

Suposições:

1. Coelhos e ovelhas disputam o mesmo alimento;
2. Não há predadores ou outras fontes de alimento.
3. Na ausência da outra espécie, cada uma cresceria seguindo um função logística e a de coelhos teria um número maior de indivíduos que a de ovelhas.
4. Coelhos, por serem menores, perdem quando há encontro dos dois.

Exemplo: Espécies competindo por alimentos

Suposições:

1. Coelhos e ovelhas disputam o mesmo alimento;
2. Não há predadores ou outras fontes de alimento.
3. Na ausência da outra espécie, cada uma cresceria seguindo um função logística e a de coelhos teria um número maior de indivíduos que a de ovelhas.
4. Coelhos, por serem menores, perdem quando há encontro dos dois.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y) = x(k_c - x) - q_c xy$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x,y) = y(k_o - y) - q_o xy$$

Aqui, $x(t)$ representa a população de coelhos; $y(t)$, de ovelhas; $k_c > k_o$ e $q_c > q_o$.

Exemplo: Espécies competindo por alimentos (cont.)

Usando $k_c = 4$, $k_o = 3$, $q_c = 2$ e $q_o = 1$, teremos:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(4-x) - 2xy = x[4-x-2y] = -x^2+4x-2xy = f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = y(3-y) - xy = y[3-y-x] = -y^2+3y-xy = g(x,y) \end{cases}$$

1) Pontos de equilíbrio : $\begin{cases} f(x^*,y^*) = 0 \\ g(x^*,y^*) = 0 \end{cases}$

$\rightarrow x^* = 0$ e $y^* = 0 \rightarrow P_1 = (0,0)$

$\rightarrow x^* = 0$ e $3 - y^* - x^* = 0 \rightarrow y^* = 3 \rightarrow P_2 = (0,3)$

$\rightarrow y^* = 0$ e $4 - x^* - 2y^* = 0 \rightarrow x^* = 4 \rightarrow P_3 = (4,0)$

$\rightarrow \begin{cases} 4 - x^* - 2y^* = 0 \\ 3 - y^* - x^* = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^* + 2y^* = 4 \\ x^* + y^* = 3 \end{cases}$

$y^* = 1 \rightarrow x^* = 2$

$P_4 = (2,1)$

2) Linearização :

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{bmatrix}_{P=(x^*,y^*)} = \begin{bmatrix} (-2x^*+4-2y^*) & -2x^* \\ -y^* & (-2y^*+3-x^*) \end{bmatrix}$$

valor é diferente para cada ponto fixo.

3) Autovalores e autovetores

$P_1 = (0,0) \Rightarrow \overleftrightarrow{A}_{P_1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 4 \end{matrix}$

HIPERBÓLICO

NÓ

INSTÁVEL

Exemplo Espécies competindo por alimentos (cont.)

$\lambda_1 = 3 \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 4 \rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

3.2) $P_2 = (0,3)$ $\quad \overleftrightarrow{A}_{P_2} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = -3 \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -2 \rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow v_y = 3v_x$

$\hookrightarrow y = -3x$

é direção de aproximação

HIPERBÓLICO

NÓ ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL

3.3) $P_3 = (4,0) \rightarrow \overleftrightarrow{A}_{P_3} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_1 = -4 \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -1 \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -8/3 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow y = -\frac{3}{8}x$

P_3 é HIPERBÓLICO e é NÓ ASSINT. ESTÁVEL

3.4) $P_4 = (2,1) \rightarrow \overleftrightarrow{A}_{P_4} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

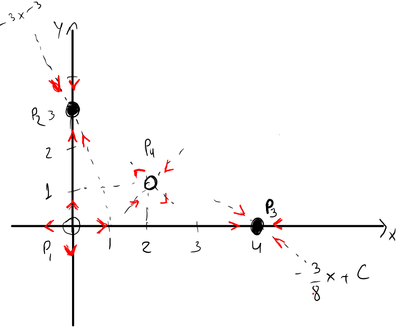
$\lambda_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \rightarrow \nu_{1,2} = \dfrac{(1 \mp \sqrt{17})}{2} x$

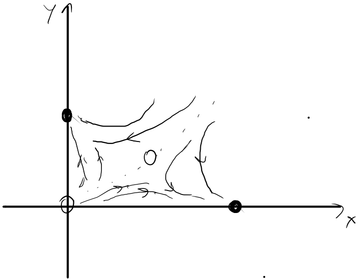
$\sqrt{17} > 4$

$\lambda_1 \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ HIPERBÓLICO e

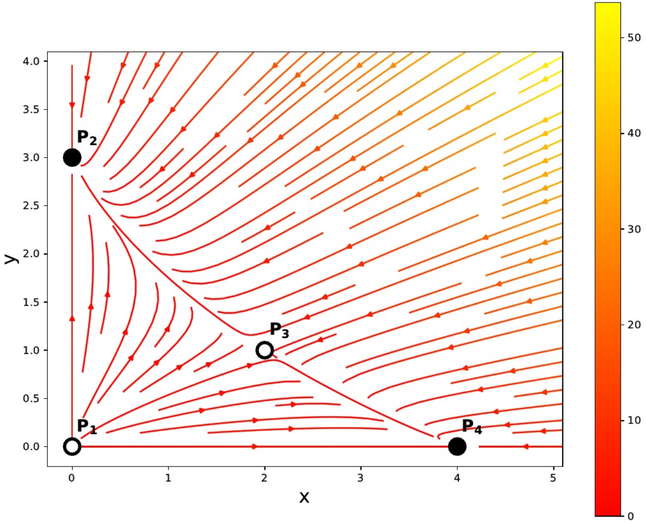
PONTO DE SELA

Exemplo Espécies competindo por alimentos (cont.)





Exemplo - competição por alimentos - Espaço de fase



Definições

Definição (Bacia de atração)

O conjunto de todas as condições iniciais de um sistema dinâmico cujas soluções, quando partem deste conjunto, tendem a um mesmo ponto de equilíbrio é chamado de ***bacia de atração*** *deste ponto.*

Definição (Separatriz)

Uma ***separatriz*** *é uma curva no espaço de fases que marca a fronteira entre curvas com comportamentos assintóticos distintos.*

- No caso acima, a separatriz liga dois pontos hiperbólicos instáveis e separa as duas bacias de atração dos pontos assintoticamente estáveis.

Subespaços estável, instável e central

Dado um sistema de equações diferenciais não lineares

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}),$$

com $\vec{f}$ diferenciável r vezes (classe r). Seja P um ponto de equilíbrio de $\vec{f}$. Os autovalores da matriz jacobiana do sistema linearizado, calculada no ponto P, podem ser separados em 3 conjuntos:

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma_e, \ \text{se} &\quad Re(\lambda) < 0 \\ \lambda \in \sigma_i, \ \text{se} &\quad Re(\lambda) > 0 \\ \lambda \in \sigma_c, \ \text{se} &\quad Re(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

- Autovetores associados a σ_e geram o **subespaço estável**, E^e;
- autovetores associados a σ_i geram o **subespaço instável**, E^i;
- autovetores associados a σ_c geram o **subespaço central**, E^c.

Teorema das variedades hiperbólicas

Sendo

- n_e o número de autovalores em σ_e,
- n_i o número de autovalores em σ_i
- n_c o número de autovalores em σ_c

temos

$$n = n_e + n_i + n_c,$$

onde n é a dimensão do sistema.

$\Rightarrow$ o teorema de Hartman-Grobman vale somente se $n_c = 0$.

Definições

Definição (Variedade invariante)

*Um conjunto S do espaço de fases n-dimensional é uma **variedade invariante local** se, para $\vec{x}_0 \in S$, então $\vec{x}(t) \in S$, com $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ para $|t| < T$. Se vale para $T \to \infty$, então S é uma **variedade invariante**.*

- Subespaços E^e, E^i e E^c são variedades invariantes.
- Para sistemas autônomos, cada trajetória é um conjunto invariante.
- Um ponto de equilíbrio é uma variedade invariante de dimensão nula.

Definições

Definição (Variedade invariante)

Um conjunto S do espaço de fases n-dimensional é uma ***variedade invariante local*** *se, para $\vec{x}_0 \in S$, então $\vec{x}(t) \in S$, com $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ para $|t| < T$. Se vale para $T \to \infty$, então S é uma* ***variedade invariante****.*

- Subespaços E^e, E^i e E^c são variedades invariantes.
- Para sistemas autônomos, cada trajetória é um conjunto invariante.
- Um ponto de equilíbrio é uma variedade invariante de dimensão nula.

Definição (Variedade diferenciável)

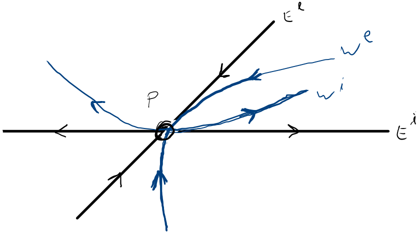
Variedade diferenciável *é um conjunto de pontos que localmente tem a estrutura do espaço euclidiano; um pequeno pedaço de uma variedade de dimensão n se assemelha a um pequeno pedaço do espaço $\mathbb{R}^n$.*

Teorema das variedades hiperbólicas (Kelley 1967)

Teorema (Variedades hiperbólicas)

Para um sistema NÃO linear de classe r, existe uma variedade estável (instável) W^e (W^i), invariante local, r vezes diferenciável, tangente ao subespaço E^e (E^i) no ponto de equilíbrio P. Essa variedade possui a mesma dimensão n_e (n_i) de E^e (E^i) e é única. W^e e W^i possuem as mesmas propriedades assintóticas de E^e e E^i, respectivamente.

- Soluções com condição inicial em W^e se aproximam de P quando $t \to \infty$; soluções com condição inicial em W^i se afastam de P.



Exemplo 6.3

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y) = -x + e^{-2y} - 1$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x,y) = y$$

1) Pontos de equilíbrio:

$$\begin{cases} f(x^*,y^*) = 0 \\ g(x^*,y^*) = 0 \rightarrow y^* = 0 \end{cases}$$

$$-x^* + 1 - 1 = 0 \rightarrow x^* = 0$$

$$P = (0,0)$$

2) Matriz jacobiana

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} -1 & -2e^{-2y^*} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

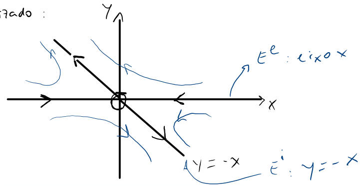
3) Autovalores e autovetores

$$\lambda_1 = -1 \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

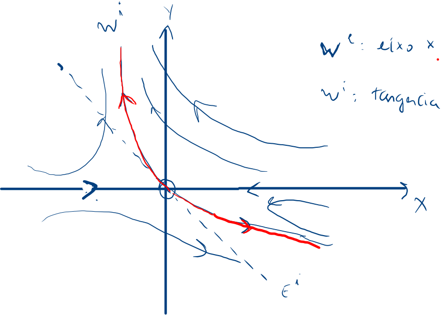
$$\lambda_2 = 1 \rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow y = -x$$

P Ponto de sela (HIPERBÓLICO)

Linearizado:



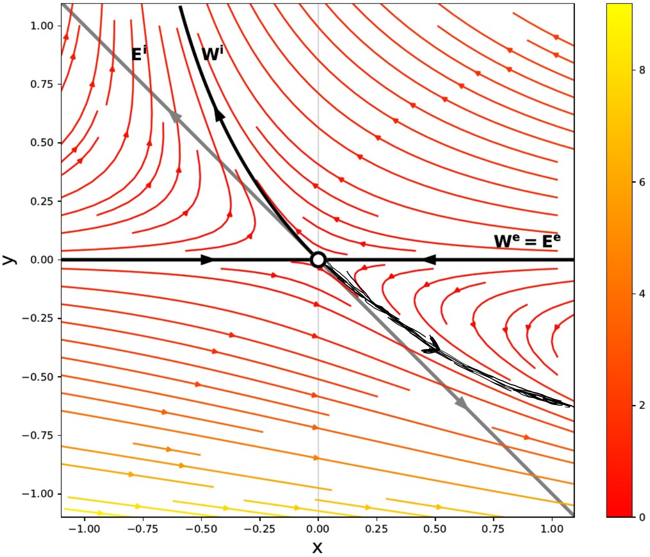
Exemplo 6.3 (cont.)



W^c: eixo x.

W^i: tangencia $y=-x$ em $P=(0,0)$.

Exemplo 6.3 - Espaço de fase



Exemplo 6.5

Determine as variedades W^e e W^i do sistema

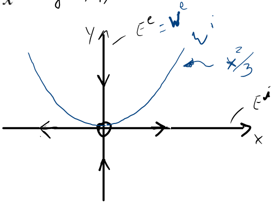
$$\frac{dx}{dt} = x \quad = f(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = -y + x^2 = g(x,y)$$

Eq. $\begin{cases} f(x^*, y^*) = 0 \\ g(x^*, y^*) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^* = 0 \\ y^* = 0 \end{cases}$ $\quad P = (0,0)$

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2x & -1 \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -1 \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 1 \rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$



Encontrar $y(x)$ tal que

$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ $\leftarrow$ tangência eixo x em $P = (0,0)$

Exemplo 6.5 (cont.)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-y + x^2}{x} = -\frac{y}{x} + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y - x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x) y - q(x) = 0$$

Fator integrante:

$$\mu(x) = e^{\int p(x') dx'} = e^{\int dx'/x'}$$

$$= e^{\ln x} = x$$

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left\{ \int_{x_0}^{x} \mu(x') q(x') dx' + C \right\}$$

$$y(x) = \frac{1}{x} \left[\int x' (x') dx' + \mu(x_0) y(0) \right]$$

$$= \frac{1}{x} \left[\int_{x_0}^{x} x'^2 dx + x_0 y_0 \right]$$

$$= \frac{1}{x} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x_0^3}{3} \right] + \frac{x_0 y_0}{x}$$

$$= \frac{x^2}{3} + \frac{x_0 y_0 - x_0^3}{x}$$

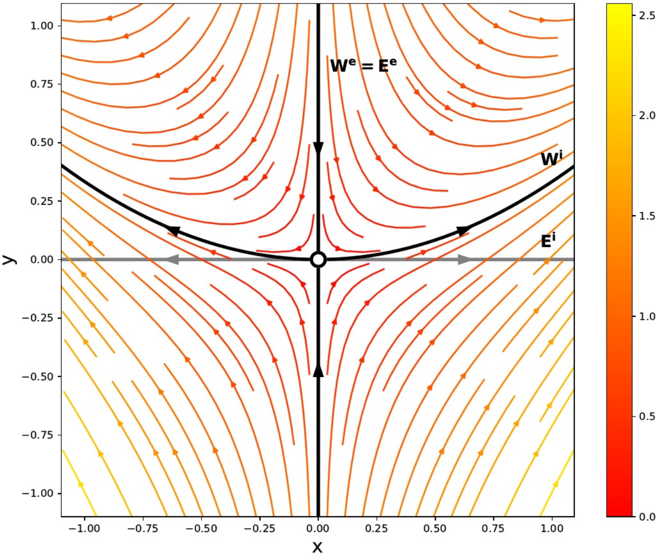
$$\boxed{y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}}$$

$y(0) = 0 \rightarrow C = 0$

$y'(0) = 0$. ou,

$\rightarrow w^i \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{x^2}{3}}$

Exemplo 6.5 - Espaço de fase



Exercícios

Monteiro cap 6:
6.8, 6.9, 6.10, 6.11, 6.12, 6.13, 6.14, 6.15, 6.16

Referências

1. Luiz H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos*, 3^a ed., Editora Livraria da Física, São Paulo (2011)
2. Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney, *Differential equations, dinamical systems, and an introduction to chaos.*, 3rd ed., Academic Press, Waltham, USA (2013)
3. Weisstein, Eric W. “Separatrix.” From MathWorld–A Wolfram Web Resource. `https://mathworld.wolfram.com/Separatrix.html` (acessado em 06/07/2020)