

# Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

**1** Sistemas não lineares de tempo contínuo

**2** Caso unidimensional

**3** Caso bidimensional

**4** Equivalência topológica

# Introdução

- Em geral, não há solução analítica
- Às vezes, não há garantia de existência/unicidade
- Às vezes, há infinitas soluções
- Podem haver soluções que tendem a  $\infty$  em tempo finito.
- O que ocorre ao variar ligeiramente condições iniciais? Soluções variam continuamente?
- “Faltam” nomes para soluções analíticas. No caso caótico, não adianta nomeá-las.
- Concentraremos nos casos  $1d$  e  $2d$
- Equivalência topológica
- Validade da aproximação linear
- Teoria da variedade central e forma normal

## Caso 1d

Problema da forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x)$$

com  $F(x)$  qualquer.

- Pontos de equilíbrio:  $F(x^*) = 0$

Exemplo: Modelo de dinâmica populacional de Verhulst (equação logística (1838))

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= rN - \alpha N^2 && \text{ou} \\ &= Nr \left(1 - \frac{N}{K}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r \left(\frac{K-N}{K}\right) \quad \rightarrow \quad \int_{N_0}^N \frac{dN'}{N'(K-N')} = \int_{t_0}^t \frac{dt'}{K}$$

## Exemplo: Equação logística

$$\int \frac{dy}{y(k-y)}$$

$$\frac{1}{y(k-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{k-y} = \frac{A(k-y) + By}{y(k-y)}$$

$$= \frac{Ak - Ay + By}{y(k-y)}$$

$$\frac{1}{y(k-y)} = \frac{(B-A)y + Ak}{y(k-y)}$$

$$\begin{cases} B = A \\ Ak = 1 \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{k}$$

$$B = \frac{1}{k}$$

$$k \int_{n_0}^n \frac{dn'}{n'(k-n')} = r \int_{t_0}^t dt'$$

$$k \left[ \int_{n_0}^n \left(\frac{1}{k}\right) \frac{dn'}{n'} + \int_{n_0}^n \left(\frac{1}{k}\right) \frac{dn'}{k-n'} \right] = r \left[ t' \right]_{t_0}^t$$

$$\int_{n_0}^n \frac{1}{n'} dn' + \int_{n_0}^n \frac{dn'}{k-n'} = r(t-t_0) \quad ; \quad z = k-n'$$

$dz = -dn'$

$$\ln n' \Big|_{n_0}^n - \int_{z_0}^z \frac{dz}{z} = r(t-t_0)$$

$$\ln \frac{n}{n_0} - \ln \frac{z}{z_0} = r(t-t_0)$$

$$\ln \frac{n}{n_0} \frac{z_0}{z} = r(t-t_0)$$

$$\ln \frac{n}{n_0} \frac{k-n_0}{k-n} = r(t-t_0)$$

## Exemplo: Equação logística

$$\frac{N}{N_0} \frac{k - N_0}{k - N} = e^{r(t-t_0)}$$

$$\frac{N}{N_0} (k - N_0) = (k - N) e^{r(t-t_0)}$$

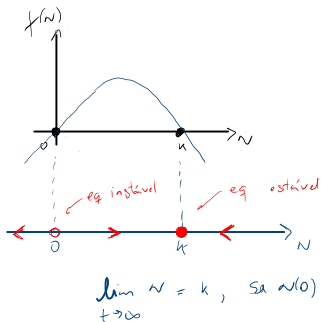
$$Nk - N_0N = (k - N) e^{r(t-t_0)} N_0$$

$$N(k - N_0 e^{r(t-t_0)}) = k e^{r(t-t_0)}$$

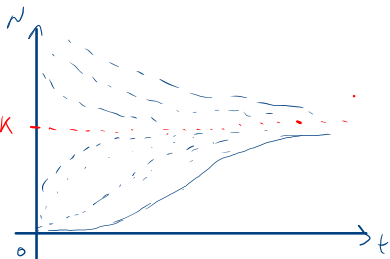
$$N(t) = \frac{k e^{r(t-t_0)}}{k - N_0 (1 - e^{r(t-t_0)})}$$

$$\frac{dN}{dt} = f(N) = rN \left(1 - \frac{N}{k}\right) = rN - \frac{r}{k} N^2$$

$$N^* \Rightarrow f(N^*) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} N^* = 0 \\ N^* = k \end{array} \right\}$$

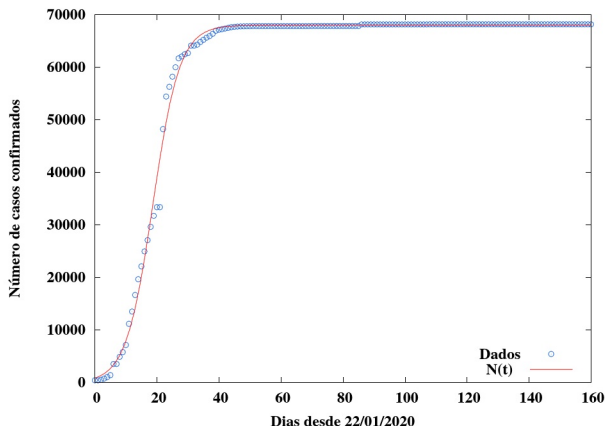


## Exemplo: Equação logística



## Exemplo: Ajuste aos dados de COVID-19 em Hubei, China

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K - N_0(e^{rt} - 1)}, \quad \begin{cases} N_0 = 855 \pm 73 \\ K = 67982 \pm 110 \\ r = 0.232 \pm 0.004 \end{cases}$$

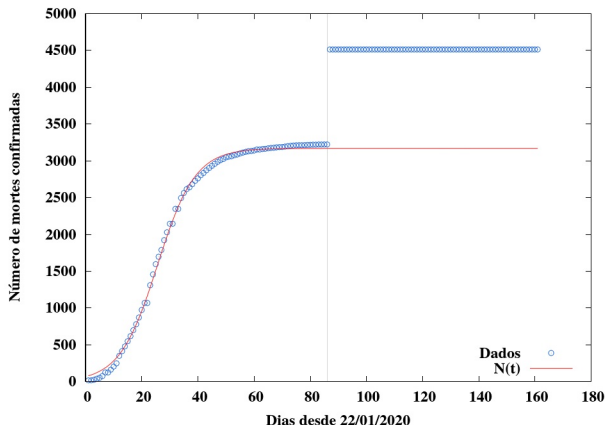


Dados: <https://github.com/CSSEGISandData/COVID-19>, acessados em 01/07/2020



## Exemplo: Ajuste aos dados de COVID-19 em Hubei, China

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K - N_0(e^{rt} - 1)}, \quad \begin{cases} N_0 = 68.3 \pm 3.8 \\ K = 3168.2 \pm 8.5 \\ r = 0.149 \pm 0.002 \end{cases}$$



Dados: <https://github.com/CSSEGISandData/COVID-19>, acessados em 01/07/2020

## Aproximação linear

Pode-se analisar a estabilidade de um ponto de equilíbrio  $N^*$  tomando uma trajetória  $N(t)$  com condição inicial próxima a  $N^*$ . Sua distância ao ponto de equilíbrio é

$$\eta(t) \equiv N(t) - N^*, \text{ com } |\eta(t)| \ll 1.$$

Assim, temos

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \frac{dN(t)}{dt} = F(N(t)) = F(N^* + \eta(t)).$$

O lado direito pode ser expandido em série de Taylor

$$F(N(t)) = F(N^* + \eta(t)) = F(N^*) + \eta(t) \left. \frac{dF}{dN} \right|_{N=N^*} + \mathcal{O}(\eta^2).$$

## Aproximação linear

Como  $F(N^*) = 0$ , conclui-se que

$$\frac{d\eta(t)}{dt} \approx \lambda \eta(t),$$

uma equação linear onde

$$\lambda \equiv \left. \frac{dF}{dN} \right|_{N=N^*}$$

e que tem solução

$$\eta(t) = \eta(0)e^{\lambda t}.$$

- Ponto de equilíbrio  $\eta^* = 0$  corresponde a  $N = N^*$ .
- Se  $\lambda < 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$  e o ponto é assintoticamente estável ( $N \rightarrow N^*$ )
- Se  $\lambda > 0$ ,  $\eta \rightarrow \pm\infty$  e o ponto é instável ( $N$  se afasta de  $N^*$ )
- Se  $\lambda = 0$ , é necessário olhar termos demais alta ordem.

## Aproximação linear

⇒ Basta analisar o gráfico de  $F(N)$  e olhar o comportamento de  $dF(N)/dt$  no ponto de equilíbrio para determinar a estabilidade do ponto de equilíbrio.

- Note que  $\lambda \equiv \left. \frac{dF}{dN} \right|_{N=N^*}$  corresponde ao autovalor do sistema linear associado.

## Aproximação linear

Dado o sistema de equações não lineares de primeira ordem

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y),\end{aligned}$$

se existe um ponto de equilíbrio  $P = (x^*, y^*)$ , podemos expandir  $f$  e  $g$  ao seu redor:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} = f(x, y) &= \cancel{f(x^*, y^*)}^0 + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_P (x - x^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_P (y - y^*) + \dots \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) &= \cancel{g(x^*, y^*)}^0 + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_P (x - x^*) + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_P (y - y^*) + \dots\end{aligned}$$

Novamente, podemos transladar o ponto  $P$  para a origem de um novo sistema de coordenadas

$$\begin{aligned}X(t) &\equiv x(t) - x^* \\ Y(t) &\equiv y(t) - y^*.\end{aligned}$$

## Aproximação linear

Em termos das novas variáveis, o sistema linear correspondente é

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_P \right) X + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_P \right) Y \\ \frac{dY}{dt} &= \left( \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_P \right) X + \left( \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_P \right) Y.\end{aligned}$$

Note que as derivadas estão calculadas no ponto  $P$ , de modo que são coeficientes. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= aX + bY \\ \frac{dY}{dt} &= cX + dY,\end{aligned}$$

## Aproximação linear

Em notação matricial

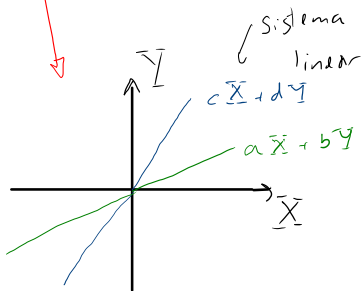
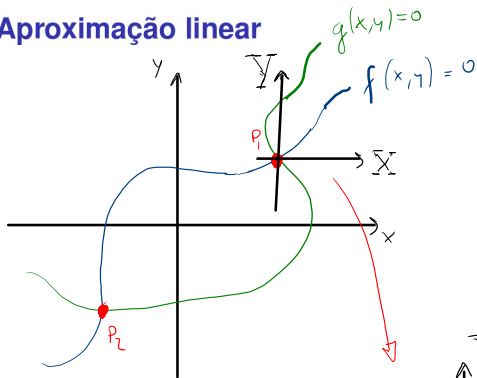
$$\frac{d\vec{Z}(t)}{dt} = \overset{\leftrightarrow}{A} \vec{Z}(t),$$

onde  $\vec{Z}$  é o vetor das variáveis de estado e  $\overset{\leftrightarrow}{A}$  é a **matrix jacobiana**

$$\vec{Z}(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}, \quad \overset{\leftrightarrow}{A} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}_{P=(x^*, y^*)} \equiv \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- O estudo da estabilidade de um sistema não linear próximo a um ponto de equilíbrio se reduz ao estudo do sistema linear correspondente, dadas algumas condições.

# Aproximação linear



Depois fazer o mesmo para  $P_2$ .



## Equivalência topológica

Suponha que existe uma relação entre  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$

$$\vec{y} = \vec{h}(\vec{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1 \\ \vdots \\ h_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_n \end{cases}$$

onde  $\vec{h}$  é uma função bijetora e, portanto, invertível ( $\vec{x} = \vec{h}^{-1}(\vec{y})$ ).

### Definição (Homeomorfismo)

*Se  $\vec{h}$  é contínua, invertível e sua inversa  $\vec{h}^{-1}$  é contínua então  $\vec{h}$  é chamada de homeomorfismo.*

- domínio  $\vec{x}$  e imagem  $\vec{y}$  possuem as mesmas propriedades topológicas.

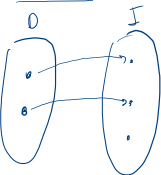
### Definição (Difeomorfismo)

*Um homeomorfismo é um difeomorfismo se  $\vec{h}(\vec{y})$  e  $\vec{h}^{-1}(\vec{x})$  são diferenciáveis em todos os pontos do domínio.*

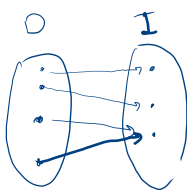
# Exemplos

$$f: D \rightarrow I$$

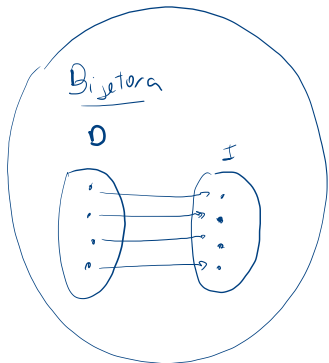
Injetora



Sobrejetora



Bijetora



## Exemplos

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$f(x) = x^2$  não é injetora,

$$\text{ex: } f(1) = f(-1) = 1.$$

$f(x) = e^x$  não é sobrejetora

$\nexists x$  tal que  $f(x) \leq 0$ .

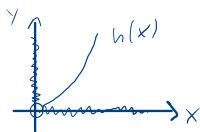
$$h: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

$$y = h(x) = x^2 \quad \text{é}$$

bijetora, invertível

$$x = h^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

$\Rightarrow$  é homeomorfismo



$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$g(x) = h^3$  é bijetora, invertível

$\Rightarrow$  é homeomorfismo

mas não difeomorfismo

# Exemplos

## Equivalência topológica

Quando os espaços de fase de dois sistemas dinâmicos

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) \quad \text{e} \quad \frac{d\vec{y}(t)}{dt} = \vec{g}(\vec{y})$$

podem ser relacionados por um homeomorfismo que preserva o sentido das trajetórias, então são **topologicamente orbitalmente equivalentes**.

- Deformações contínuas, sem cortes ou emendas, levam as trajetórias de um sistema às do outro.

$$\begin{array}{ccc} \vec{x} & \xrightarrow{\vec{f}} & \vec{f}(\vec{x}) \\ \downarrow \vec{h} & & \downarrow \vec{h} \\ \vec{y} & \xrightarrow{\vec{g}} & \vec{g}(\vec{y}) \end{array}$$

- Se  $\vec{y} = \vec{h}(\vec{x})$  então  $\vec{g}(\vec{y}) = \vec{h}(\vec{f}(\vec{x}))$

## Equivalência topológica

- Sendo  $\vec{h}$  um difeomorfismo, ela preserva a orientação das trajetórias se o determinante da matriz jacobiana, o **jacobiano**, for sempre positivo, i.e.,

$$\det \left| \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \right| > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 1, 2, \dots, n$$

### Exemplo 6.1:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x) = -x, \quad \frac{dy(t)}{dt} = g(y) = -2y$$

$$x(0) = y(0) = 1$$

$$x(t) = e^{-t}$$

$$y(t) = e^{-2t} = (e^{-t})^2$$

$$h: \begin{cases} y = x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ y = -x^2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

## Exemplo 6.1 (cont.)

$$h^{-1} : \begin{cases} x = \sqrt{y} & , \text{ se } y \geq 0 \\ x = -\sqrt{-y} & , \text{ se } y < 0 \end{cases}$$

$h$ : é homeomorfismo, mas  
não difeomorfismo pois  
 $h^{-1}$  não é diferenciável  
na origem

$$\frac{dh}{dx} = \begin{cases} 2x & , x \geq 0 \\ -2x & , x < 0 \end{cases} = |2x| \geq 0$$

$\Rightarrow$  preserva sentido das  
trajetórias

## Exemplo 6.1 (cont.)



## Exemplo 6.2

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 \quad \text{e} \quad \frac{dy_1}{dt} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -y_1$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\tilde{A} - \lambda \tilde{I}) \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Nos dois casos:  $\lambda_{1,2} = \pm i$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(0) = y_1(0) = 1 \\ x_2(0) = y_2(0) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = \cos(t) \\ x_2(t) = \sin(t) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1(t) = \cos(t) \\ y_2(t) = -\sin(t) \end{array} \right.$$

## Exemplo 6.2 (cont.)

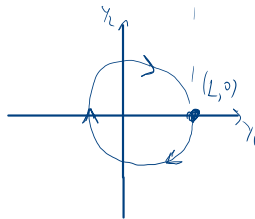
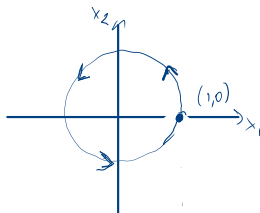
$$h_1(x_1) = \gamma_1 = x_1$$

$$h_2(x_2) = \gamma_2 = -x_2$$

$$\left| \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0 =$$

não são  
preservados os  
sentidos das  
trajetórias

$\Rightarrow$  não são topologicamente  
orbitalmente equivalentes.



## Exercícios

Monteiro cap 6:

6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7

## Referências

- 1 Luiz H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos*, 3<sup>a</sup> ed., Editora Livraria da Física, São Paulo (2011)
- 2 Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney, *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos.*, 3<sup>rd</sup> ed., Academic Press, Waltham, USA (2013)