Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein[1]

[1] Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

1. **Forma canônica de Jordan**

Forma canônica de Jordan

Dado um sistema dinâmico linear

$$\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = \overset{\leftrightarrow}{A}\,\vec{z}(t),$$

se sua matriz $\overset{\leftrightarrow}{A}$, $n \times n$, tem autovalores repetidos, há duas possibilidades:

- Se cada autovalor múltiplo permite autovetores independentes, ela pode ser diagonalizada e a versão desacopada do sistema pode ser escrita como

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \overset{\leftrightarrow}{D}\,\vec{v}(t),$$

  onde $\vec{v}(t) = (\overset{\leftrightarrow}{P})^{-1}\vec{z}(t)$, $\overset{\leftrightarrow}{D} = (\overset{\leftrightarrow}{P})^{-1}\overset{\leftrightarrow}{A}\overset{\leftrightarrow}{P}$ e $\overset{\leftrightarrow}{P}$ é a matriz modal de $\overset{\leftrightarrow}{A}$.
- se não, é possível transformá-la em uma matriz quase diagonal, a **forma canônica de Jordan**.

Sistemas dinâmicos na forma canônica de Jordan

No segundo caso, pode-se escrever a matriz

$$\overleftrightarrow{J} = (\overleftrightarrow{P})^{-1}\overleftrightarrow{A}\overleftrightarrow{P}$$

e fazer uma transformação de coordenadas $\vec{\omega}(t) = (\overleftrightarrow{P})^{-1}\vec{z}(t)$, de modo que

$$\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = \overleftrightarrow{A}\,\vec{z}(t)$$

$$(\overleftrightarrow{P})^{-1}\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = (\overleftrightarrow{P})^{-1}\overleftrightarrow{A}\,\vec{z}(t)$$

$$\frac{d}{dt}[(\overleftrightarrow{P})^{-1}\vec{z}(t)] = (\overleftrightarrow{P})^{-1}\overleftrightarrow{A}\,\vec{z}(t)$$

$$\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = [(\overleftrightarrow{P})^{-1}\overleftrightarrow{A}\overleftrightarrow{P}][(\overleftrightarrow{P})^{-1}\vec{z}(t)]$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \overleftrightarrow{J}\vec{\omega}(t).}$$

Autovetores generalizados

A solução desta equação, como vimos anteriormente é

$$\vec{\omega}(t) = e^{\overleftrightarrow{J}}\vec{\omega}(0).$$

Como neste caso não há n autovetores linearmente independentes, a base em que $\overleftrightarrow{A}$ é transformada em sua forma canônica de Jordan $\overleftrightarrow{J}$ é formada por **autovetores generalizados**.

Definição

*Um **autovetor generalizado** de uma matriz $\overleftrightarrow{A}$, $n \times n$, é um vetor para o qual*

$$(\overleftrightarrow{A} - \lambda\overleftrightarrow{I})^k\vec{v} = \vec{0},$$

para algum $k \in \mathbb{Z}^+$. Aqui $\overleftrightarrow{I}$ é a matriz identidade $n \times n$.

- k define a ordem do autovetor generalizado;
- Se $k = 1$, temos um autovetor usual.

Stover, Christopher. "Generalized Eigenvector." From MathWorld–A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein.
`https://mathworld.wolfram.com/GeneralizedEigenvector.html`

Base de Jordan

- Se $\overleftrightarrow{A}$ é uma matriz $n \times n$, existe uma base para $\mathbb{R}^n$ que consiste dos autovetores generalizados de $\overleftrightarrow{A}$ e que satisfaz:

$$\overleftrightarrow{A}\vec{b}_{i,1} = \lambda_i \vec{b}_{i,1} \qquad \text{e}$$

$$[\overleftrightarrow{A} - \lambda_i \overleftrightarrow{I}]\, \vec{b}_{i,j} = \vec{b}_{i,j-1}.$$

- Autovetores generalizados assim gerados são linearmente independentes.
- De posse de uma base de Jordan, basta calcular a **matriz modal generalizada** $\overleftrightarrow{P}$ usando os autovetores e autovetores generalizados como colunas de $\overleftrightarrow{P}$.
- As primeiras colunas são as dos autovetores com autovalores simples, seguidas pelos autovetores generalizados com ordem crescente.

Rowland, Todd. "Jordan Basis." From MathWorld–A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein.
https://mathworld.wolfram.com/JordanBasis.html
Moore, S. "Generalized Eigenvectors" (2013).
https://hans.math.upenn.edu/~moose/240S2013/slides7-31.pdf.

Exemplo 1

Calcule os autovetores generalizados da matriz

$$\overset{\leftrightarrow}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$p(\lambda) = \det(\overset{\leftrightarrow}{A} - \lambda \overset{\leftrightarrow}{I})$

$= \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 \\ 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$* \ A\vec{v} = \lambda \vec{v}$

$(\overset{\leftrightarrow}{A} - \lambda \overset{\leftrightarrow}{I})\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} 0v_1 + v_2 = 0 \\ 0v_1 + 0v_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_1 \text{ é qualquer} \end{cases}$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ vetor $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ não é autovetor,

mas forma uma base junto com $\vec{v}$.

Como calculá-lo?

Exemplo 1 (cont.)

Exemplo 1 (cont.)

$$(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I})\vec{u} = \vec{v}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0u_1 + 1u_2 = 1 \\ 0u_1 + 0u_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_2 = 1 \\ u_1 \text{ é qualquer} \end{cases}$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Note que

$$(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I})^2 \vec{u} = (\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I})\underbrace{\left[(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I})\vec{u}\right]}$$

$$= (\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I})\ \vec{v}$$

$$= \vec{0}$$

$\vec{u}$ é autovetor generalizado de ordem 2.

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{array}{cc} \vec{v} & \vec{u} \\ \downarrow & \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \overleftrightarrow{I}$$

$\rightarrow$ $\overleftrightarrow{A}$ já está na forma canônica de Jordan.

Exemplo 2

Calcule os autovetores generalizados da matriz

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

sua matriz modal generalizada e sua forma canônica de Jordan.

$$p(\lambda) = \det(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I})$$

$$= \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 2 & 0 \\ 1 & (1-\lambda) & 2 \\ 0 & -1 & (1-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^3 + \cancel{2(1-\lambda)} - \cancel{2(1-\lambda)}$$

$$= (1-\lambda)^3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

* Autovetor:

$$(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I})\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2v_2 = 0 \\ v_1 + 2v_3 = 0 \\ -v_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} v_2 = 0 \\ v_1 = -2v_3 \\ v_3 \text{ é qualquer} \end{array}$$

Exemplo 2 (cont.)

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$* \quad (\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I})^2 \vec{u} = \vec{0}$$

$$(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I}) \underbrace{(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I}) \vec{u}}_{\vec{v}} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2u_2 = -2 \\ u_1 + 2u_3 = 0 \\ -u_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_2 = -1 \\ u_1 = -2u_3 \\ u_3 \text{ é qualquer} \end{cases}$$

escolho $u_3 = 0$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$* \quad (\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I})^3 \vec{w} = \vec{0}$$

$$(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I})^2 \underbrace{(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I}) \vec{w}}_{\vec{u}} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2w_2 = 0 \\ w_1 + 2w_3 = -1 \\ -w_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_2 = 0 \\ w_1 = -1 - 2w_3 \\ w_3 \text{ é qualquer} \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ escolho 0.

Exemplo 2 (cont.)

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overleftrightarrow{P} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \vec{v} & \ \vec{u} & \ \vec{\omega} \\ \downarrow & \ \downarrow & \ \downarrow \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\overleftrightarrow{P}\,\overleftrightarrow{P}^{-1} = \overleftrightarrow{I}$$

Python ↳

ou

Mathworld

$$\overleftrightarrow{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{J} = \overleftrightarrow{P}^{-1}\,\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 4.36

Mostre que, para um sistema linear bidimensional com autovalores iguais, a forma canônica de Jordan é

$$\overleftrightarrow{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

$\frac{d\vec{z}}{dt} = \overleftrightarrow{A}\vec{z}$

Assuma que a solução tentativa seja da forma (ver aula 6)

$$\vec{z}(t) = e^{\lambda t}(t\,\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2).$$

a) $\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}(t\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)\right] = \overleftrightarrow{A}\left[e^{\lambda t}(t\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)\right]$

$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}t\right]\vec{\omega}_1 + \frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}\right]\vec{\omega}_2 = e^{\lambda t}\left[t\overleftrightarrow{A}\vec{\omega}_1 + \overleftrightarrow{A}\vec{\omega}_2\right]$

$\lambda e^{\lambda t} t\,\vec{\omega}_1 + e^{\lambda t}\vec{\omega}_1 + \lambda e^{\lambda t}\vec{\omega}_2 = e^{\lambda t}(t\overleftrightarrow{A}\vec{\omega}_1) + e^{\lambda t}\overleftrightarrow{A}\vec{\omega}_2$

$t(\lambda\vec{\omega}_1) + (\lambda\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1) = t(\overleftrightarrow{A}\vec{\omega}_1) + \overleftrightarrow{A}\vec{\omega}_2$

$(\overleftrightarrow{A}\vec{\omega}_1 - \lambda\vec{\omega}_1)t + (\overleftrightarrow{A}\vec{\omega}_2 - \lambda\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) = \vec{0}$

$\hookrightarrow \begin{cases} \overleftrightarrow{A}\vec{\omega}_1 = \lambda\vec{\omega}_1 \\ \overleftrightarrow{A}\vec{\omega}_2 = \lambda\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1 \end{cases}$

Exercício 4.36 (cont.)

b) $\vec{\omega}_1 = \begin{bmatrix} \omega_{1x} \\ \omega_{1y} \end{bmatrix}, \quad \vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \omega_{2x} \\ \omega_{2y} \end{bmatrix}$

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{bmatrix} \omega_{1x} & \omega_{2x} \\ \omega_{1y} & \omega_{2y} \end{bmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{P}\,\overleftrightarrow{P}^{-1} = \overleftrightarrow{I}$$

↳ MOSTRAR QUE

$$\overleftrightarrow{P}^{-1} = \frac{1}{\det \overleftrightarrow{P}} \begin{bmatrix} \omega_{2y} & -\omega_{2x} \\ -\omega_{1y} & \omega_{1x} \end{bmatrix}$$

$$\det \overleftrightarrow{P} = \omega_{1x}\omega_{2y} - \omega_{2x}\omega_{1y}$$

c) $\overleftrightarrow{J} = (\overleftrightarrow{P}^{-1})\,\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{P}$

$$= (\overleftrightarrow{P}^{-1})\,\overleftrightarrow{A} \begin{bmatrix} \omega_{1x} & \omega_{2x} \\ \omega_{1y} & \omega_{2y} \end{bmatrix}$$

$$= \overleftrightarrow{P}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda\omega_{1x} & (\lambda\omega_{2x} + \omega_{1x}) \\ \lambda\omega_{1y} & (\lambda\omega_{2y} + \omega_{1y}) \end{bmatrix}$$

Elemento de

- multiplicação matricial:

$\vec{C} = \overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{B}$

$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$

- matriz por vetor:

$\vec{v} = \overleftrightarrow{A}\,\vec{u}$

$v_j = \sum_k a_{jk} u_k$

$$= \frac{1}{\det(\overleftrightarrow{P})} \begin{bmatrix} \omega_{2y} & -\omega_{2x} \\ -\omega_{1y} & \omega_{1x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda\omega_{1x} & (\lambda\omega_{2x} + \omega_{1x}) \\ \lambda\omega_{1y} & (\lambda\omega_{2y} + \omega_{1y}) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(\overleftrightarrow{P})} \begin{bmatrix} \lambda\omega_{1x}\omega_{2y} - \lambda\omega_{2x}\omega_{1y} & \lambda\cancel{\omega_{2x}\omega_{2y}} + \omega_{1x}\omega_{2y} - \lambda\cancel{\omega_{2y}\omega_{2x}} - \omega_{2x}\omega_{1y} \\ -\lambda\cancel{\omega_{1x}}\omega_{1y} + \lambda\cancel{\omega_{1x}}\omega_{1y} & -\lambda\omega_{1y}\omega_{2x} \cdot \cancel{\omega_{1x}\omega_{1y}} + \lambda\omega_{1x}\omega_{2y} + \cancel{\omega_{1x}\omega_{1y}} \end{bmatrix}$$

Exercício 4.36 (cont.)

$$= \frac{1}{\det \overleftrightarrow{P}} \begin{bmatrix} \lambda \det(\overleftrightarrow{P}) & \det \overleftrightarrow{P} \\ 0 & \lambda \det(\overleftrightarrow{P}) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\overleftrightarrow{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}}$$

d) Calcule $e^{\overleftrightarrow{J} t}$; Autovalores de $\overleftrightarrow{J} t$ são $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda t$

Buscamos um polinômio de grau no máximo 1.

$R(x) = ax + b$, $f(x) = e^x$

$$\begin{cases} R(\lambda t) = f(\lambda t) \\ R'(\lambda t) = f'(\lambda t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \lambda t + b = e^{\lambda t} \\ a = e^{\lambda t} \end{cases}$$

$\lambda t e^{\lambda t} + b = e^{\lambda t}$

$b = e^{\lambda t}(1 - \lambda t)$

$\Rightarrow R(x) = x e^{\lambda t} + e^{\lambda t}(1 - \lambda t)$

$= e^{\lambda t} [x + 1 - \lambda t]$

$e^{\overleftrightarrow{J} t} = R(\overleftrightarrow{J} t) = e^{\lambda t} [\overleftrightarrow{J} t + (1 - \lambda t) \overleftrightarrow{I}]$

Exercício 4.36 (cont.)

$$e^{\overleftrightarrow{J}t} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-\lambda t) & 0 \\ 0 & (1-\lambda t) \end{bmatrix} \right\} e^{\lambda t}$$

$$\boxed{e^{\overleftrightarrow{J}t} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda t}}$$

e) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases} \rightarrow \overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$p(\lambda) = \det(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I})$$

$$= \begin{vmatrix} (3-\lambda) & -1 \\ 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1$$

$$p(\lambda) = 3 - 4\lambda + \lambda^2 + 1$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \;//$$

Autovetores $\rightarrow$ WOLFRAM ALPHA

$$\vec{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I})\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{2x} \\ \omega_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} \omega_{2x} - \omega_{2y} = 1 \\ \omega_{2x} - \omega_{2y} = 1 \end{cases} \rightarrow \omega_{2x} = 1 - \omega_{2y}$

ω_{2y} é qualquer

$$\vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 4.36 (cont.)

Livro Monteiro

$\vec{\omega}_1$

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det \overleftrightarrow{P} = -1$$

$$\overleftrightarrow{P}^{-1} = \frac{1}{(-1)} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{J} = \overleftrightarrow{P}^{-1} \overleftrightarrow{A} \overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{P}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \overleftrightarrow{P}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

// ou

$$\vec{v} = \overleftrightarrow{P}^{-1} \vec{z}$$

$$\hookrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \overleftrightarrow{J} \vec{v} \Rightarrow \vec{v}(t) = e^{\overleftrightarrow{J} t} \vec{v}(0)$$

(d)

$$e^{\overleftrightarrow{J} t} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{2t} \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (v_1(0) + v_2(0)\, t)\, e^{2t} \\ v_2(0)\, e^{2t} \end{bmatrix}$$

Exercícios

Monteiro cap 4:

4.25, 4.27, 4.33, 4.34, 4.35, 4.36, 4.37, 4.38

Faltam

Referências

1. Luiz H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos*, 3^a ed., Editora Livraria da Física, São Paulo (2011)
2. Stover, Christopher. "Generalized Eigenvector." From MathWorld–A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein. `https://mathworld.wolfram.com/GeneralizedEigenvector.htm` (acessado em 29/07/2020)
3. Rowland, Todd. "Jordan Basis." From MathWorld–A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein. `https://mathworld.wolfram.com/JordanBasis.html` (acessado em 29/07/2020)
4. Moore, S. "Generalized Eigenvectors" (2013). `https://hans.math.upenn.edu/~moose/240S2013/slides7-31.pdf` (acessado em 29/07/2020)