Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein[1]

[1]Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

Cálculo da matriz exponencial

Pode-se expressar a solução de um sistema diferencial de ordem n

$$\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = \overleftrightarrow{A}\,\vec{z}(t),\ \vec{z}(0) = \vec{z}_0$$

por meio de um operador evolução

$$\vec{z}(t) = \vec{\Phi}^t(\vec{z}(0)) = e^{\overleftrightarrow{A}\,t}\,\vec{z}_0.$$

Cálculo da matriz exponencial

Pode-se expressar a solução de um sistema diferencial de ordem n

$$\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = \overleftrightarrow{A}\,\vec{z}(t),\ \vec{z}(0) = \vec{z}_0$$

por meio de um operador evolução

$$\vec{z}(t) = \vec{\Phi}^t(\vec{z}(0)) = e^{\overleftrightarrow{A}\,t}\,\vec{z}_0.$$

Os resultados anteriores mostram que se pode calcular $f(\overleftrightarrow{B}) = e^{\overleftrightarrow{B}}$ a partir de um polinômio, ou seja, usando um número finito de termos

$$e^{\overleftrightarrow{B}} = \gamma_{n-1}(\overleftrightarrow{B})^{n-1} + \cdots + \gamma_2(\overleftrightarrow{B})^2 + \gamma_1\overleftrightarrow{B} + \gamma_0\overleftrightarrow{I} = g(\overleftrightarrow{B}).$$

Os coeficientes γ_j são obtidos impondo-se que

$$g(\Lambda) = \gamma_{n-1}\Lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_2\Lambda^2 + \gamma_1\Lambda + \gamma_0 = f(\Lambda) = e^{\Lambda},$$

para todos os autovalores Λ da matriz $\overleftrightarrow{B}$. No caso de um sistema linear homogêneo e autônomo,

$$\overleftrightarrow{B} = \overleftrightarrow{A}t.$$

Cálculo da matriz exponencial

- Se houver autovalores degenerados, usam-se as relações envolvendo derivadas. Para uma autovalor Λ_j com multiplicidade m, são necessárias as $(m-1)$ expressões adicionais

$$\left.\frac{d^l f}{d\Lambda^l}\right|_{\Lambda=\Lambda_j} = e^{\Lambda_j} = \left.\frac{d^l g}{d\Lambda^l}\right|_{\Lambda=\Lambda_j}, \; l = 1, 2, \ldots, m-1$$

Exemplo: Calcule $e^{\overset{\leftrightarrow}{A} t}$ para

$$\overset{\leftrightarrow}{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{B} = \vec{A}\, t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} t \longrightarrow p(\lambda) = \det(\vec{B} - \lambda \vec{I})$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & t \\ -2t & (-3t-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(3t+\lambda) + 2t^2$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 3t\lambda + 2t^2$$

$$p(\lambda) = 0$$

$\Downarrow$ autovalores

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= -t \\ \lambda_2 &= -2t \end{aligned}}$$

Exemplo (cont.)

$$g(\lambda) = a\lambda + b = f(\lambda)$$

$$\begin{cases} g(-t) = a(-t) + b = e^{-t} \\ g(-2t) = a(-2t) + b = e^{-2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -at + b = e^{-t} \\ -2at + b = e^{-2t} \end{cases}$$

$$at = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\boxed{a = \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}}$$

$$-(e^{-t} - e^{-2t}) + b = e^{-t}$$

$$\boxed{b = 2e^{-t} - e^{-2t}}$$

$$g(\overleftrightarrow{B}) = g(\overleftrightarrow{A}t) = a(\overleftrightarrow{A}t) + b\overleftrightarrow{I}$$

$$= \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\overleftrightarrow{A}t + (2e^{-t} - e^{-2t})\overleftrightarrow{I}$$

$$= (e^{-t} - e^{-2t})\overleftrightarrow{A} + (2e^{-t} - e^{-2t})\overleftrightarrow{I}$$

$$= (e^{-t} - e^{-2t})\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + (2e^{-t} - e^{-2t})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}) & -3(e^{-t} - e^{-2t}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 0 \\ 0 & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}) & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} = e^{\overleftrightarrow{A}t}$$

⇒ Façam exercícios 4.33 e 4.34

Diagonalização de matrizes

Quando a matrix $\overset{\leftrightarrow}{A}$, $n \times n$, é diagonal, a solução de

$$\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = \overset{\leftrightarrow}{A}\,\vec{z}(t)$$

é muito simples e dada por

$$z_j(t) = z_j(0)\,e^{\lambda_j t}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Aqui, os λ_j são os elementos da diagonal.

$$\overset{\leftrightarrow}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\leftrightarrow}{A}\,\vec{z}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x & \longrightarrow \quad x(t) = x_0 e^{t} \\ \frac{dy}{dt} = 2y & \longrightarrow \quad y(t) = y_0 e^{2t} \end{cases}$$

Diagonalização de matrizes

Quando a matrix $\overleftrightarrow{A}$, $n \times n$, é diagonal, a solução de

$$\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = \overleftrightarrow{A}\,\vec{z}(t)$$

é muito simples e dada por

$$z_j(t) = z_j(0)\,e^{\lambda_j t}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Aqui, os λ_j são os elementos da diagonal.

- Nem todas as matrizes são diagonalizáveis.
- Para que uma matriz seja diagonalizável, seus autovetores devem ser **linearmente independentes**.
- Se os autovalores são todos distintos, então seus autovetores serão linearmente independentes.

Diagonalização de matrizes

Se $\overleftrightarrow{A}$ não é diagonal mas possui todos autovalores distintos, existe uma matriz $\overleftrightarrow{P}$ tal que

$$\overleftrightarrow{D} = (\overleftrightarrow{P})^{-1}\overleftrightarrow{A}\overleftrightarrow{P}. \tag{1}$$

A matriz $\overleftrightarrow{P}$, chamada matriz modal, é formada pelos autovetores de $\overleftrightarrow{A}$ arranjados em colunas.

Transformação de coordenadas ($\vec{z} \to \vec{v}$)

- A análise de sistemas dinâmicos fica facilitada quando feita em um sistema de coordenadas em que a matriz é diagonal. Nestas coordenadas, o sistema será **desacoplado**.

Partindo de

$$\overleftrightarrow{D} = \overleftrightarrow{P}^{-1} \overleftrightarrow{A} \overleftrightarrow{P}$$

$$\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = \overleftrightarrow{A}\,\vec{z}(t),$$

$$\overleftrightarrow{P}^{-1} \frac{d\vec{z}}{dt} = \overleftrightarrow{P}^{-1} \overleftrightarrow{A}\, \vec{z}(t)$$

$$= \overleftrightarrow{P}^{-1} \overleftrightarrow{A}\, \overleftrightarrow{I}\, \vec{z}(t)$$

$$= \underbrace{\overleftrightarrow{P}^{-1} \overleftrightarrow{A}\, \overbrace{\overleftrightarrow{P}}\!\!}\ \overleftrightarrow{P}^{-1} \vec{z}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\overleftrightarrow{P}^{-1} \vec{z}(t)\right) = \overleftrightarrow{D}\, \overleftrightarrow{P}^{-1} \vec{z}(t) \quad ; \quad \underline{\vec{v}(t) = \overleftrightarrow{P}^{-1} \vec{z}(t)}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \overleftrightarrow{D}\, \vec{v}(t)}$$

Transformação de coordenadas

Como $\overset{\leftrightarrow}{D}$ é diagonal,

$$\vec{v}(t) = e^{\overset{\leftrightarrow}{D}t}\,\vec{v}(0),$$

onde a condição inicial é dada por $\vec{v}(0) = (\overset{\leftrightarrow}{P})^{-1}\,\vec{z}(0)$.

Exemplo 4.14: Diagonalize o sistema (ver exemplos 4.1 e 4.3 - aula 5)

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + 2y \\ \dot{y} &= 3y \end{cases}$$

e escreva sua solução para a condição inicial $\vec{z}(0) = (x_0, y_0)$.

$$\overset{\leftrightarrow}{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(\overset{\leftrightarrow}{A} - \lambda \overset{\leftrightarrow}{I}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 2 \\ 0 & (3-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$-(1+\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

Exemplo 4.14 (cont.)

$\lambda_1 = -1$: $\vec{A}\vec{\omega}_1 = \lambda_1 \vec{\omega}_1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1x} \\ \omega_{1y} \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} \omega_{1x} \\ \omega_{1y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -\omega_{1x} + 2\omega_{1y} = -\omega_{1x} \\ 3\omega_{1y} = -\omega_{1y} \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ $\boxed{\omega_{1y} = 0}$

$\Rightarrow$ ω_{1x} é qualquer

$\Rightarrow$ autovetor: $\vec{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 3$: $\vec{A}\vec{\omega}_2 = \lambda_2 \vec{\omega}_2$

$$\begin{cases} -\omega_{1x} + 2\omega_{1y} = 3\omega_{1x} \\ 3\omega_{1y} = 3\omega_{1y} \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ ω_{1y} é qualquer

$2\omega_{1y} = 4\omega_{1x}$

$\boxed{\omega_{1y} = 2\omega_{1x}}$

$\Rightarrow$ autovetor: $\vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Exemplo 4.14 (cont.)

$\overleftrightarrow{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e sua inversa $\overleftrightarrow{P}\,\overleftrightarrow{P}^{-1} = \overleftrightarrow{I}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (a+c) & (b+d) \\ 2c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a+c = 1 \\ b+d = 0 \\ 2c = 0 \rightarrow c = 0 \\ 2d = 1 \rightarrow d = 1/2 \end{cases}$$

$a = 1$

$b = -1/2$

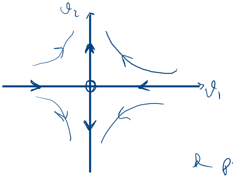
$$\overleftrightarrow{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{D} = \overleftrightarrow{P}^{-1}\,\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \overleftrightarrow{D}\,\vec{v}(t)$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = e^{\overleftrightarrow{D}t}\,\vec{v}(0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \vec{v}(0)$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} v_1(t) = v_1(0)\, e^{-t} \\ v_2(t) = v_2(0)\, e^{3t} \end{cases}$$



$\&$ ponto de sela

Exemplo 4.14 (cont.)

$$\overleftrightarrow{D} = \underbrace{\overleftrightarrow{P}^{-1}\,\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{P}} \rightarrow \overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{P} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & (-1+4) \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & (3 - \tfrac{1}{2}(6)) \\ 0 & \tfrac{1}{2}(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Voltando às coordenadas originais:

$$\vec{\vartheta} = \overleftrightarrow{P}^{-1}\,\vec{z} \Rightarrow \overleftrightarrow{P}\,\vec{\vartheta} = \overleftrightarrow{P}\,\overleftrightarrow{P}^{-1}\,\vec{z} \Rightarrow \vec{z} = \overleftrightarrow{P}\,\vec{\vartheta}$$

$$\vec{z}(t) = \overleftrightarrow{P}\, e^{\overleftrightarrow{D}t}\,\vec{\vartheta}(0)$$

$$= \overleftrightarrow{P}\, e^{\overleftrightarrow{D}t}\,\overleftrightarrow{P}^{-1}\, z(0)$$

Exemplo 4.14 (cont.)

$$\vec{z}(t) = \overleftrightarrow{P}\, e^{\overleftrightarrow{D}t}\, \overleftrightarrow{P}^{-1}\, \vec{z}(0)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \overleftrightarrow{P}^{-1}\, \vec{z}(0)$$

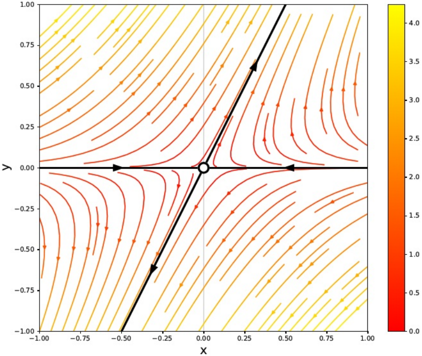
$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ 0 & 2e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \vec{z}(0)$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{z}(t) = \begin{bmatrix} x_0 e^{-t} - \frac{y_0}{2}\left(e^{-t} - e^{3t}\right) \\ y_0 e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

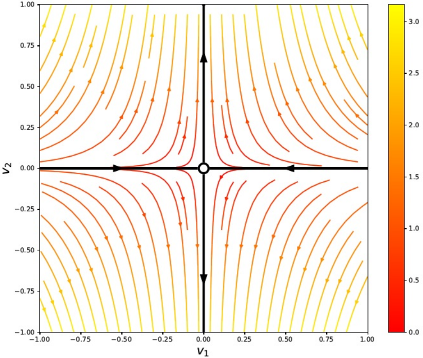
Espaços de fase

Ex. 4.3



$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + 2y \\ \dot{y} &= 3y \end{cases}$$

Ex. 4.14



$$\begin{cases} \dot{v}_1 &= -v_1 \\ \dot{v}_2 &= 3v_2 \end{cases}$$

Forma canônica de Jordan

Quando há autovalores repetidos, há duas possibilidades:

- Se cada autovalor múltiplo permite autovetores independentes então $\overleftrightarrow{A}$ pode ser diagonalizada;
- se não, é possível transformar $\overleftrightarrow{A}$ em uma matriz quase diagonal, a **forma canônica de Jordan**.

Exemplo 4.16: Diagonalize a matriz

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (-1-\lambda) & -2 \\ 0 & 3 & (4-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$\longrightarrow -(1-\lambda)(1+\lambda)(4-\lambda) + 6(1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)\left[-(1+\lambda)(4-\lambda) + 6\right] = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 1$$

$$(1+\lambda)(\lambda-4) + 6 = 0 \longrightarrow \lambda_{2,3}$$

Exemplo 4.16 (cont.)

$(1-\lambda)(\lambda-4)+6=0$

$\lambda^2-3\lambda+2=0$

→ Soma : $S=3$

→ Produto : $P=2$

$\boxed{\lambda_1=1 \quad \lambda_2=1 \quad \lambda_3=2}$

* $\underline{\lambda_{1,2}=1}$ → autovalor com multiplicidade $m=2$

$\overleftrightarrow{A}\vec{\vartheta}_1=\lambda_1\vec{\vartheta}_1$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&-2\\0&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}x=x\\-y-2z=y\\3y+4z=z\end{cases}$$

$$\begin{cases}x \text{ é qualquer}\\ z=-y \rightarrow y \text{ também é qualquer}\\ 3y-4y=-y \text{ ok}\end{cases}$$

$$\vec{\vartheta}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \qquad \vec{\vartheta}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

* $\underline{\lambda_3=2}$ $\qquad \overleftrightarrow{A}\vec{\vartheta}_3=\lambda_3\vec{\vartheta}_3$

$$\begin{cases}x=2x \rightarrow x=0\\ -y-2z=2y \rightarrow -2z=3y\\ 3y+4z=2z \rightarrow -2z=3y \text{ ok}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=0\\ y \text{ é qualquer}\\ z=-\frac{3}{2}y\end{cases} \rightarrow \vec{\vartheta}_3=\begin{bmatrix}0\\2\\-3\end{bmatrix}$$

Exemplo 4.16 (cont.)

$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são lineamente independentes?

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \\ -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2a_3 \\ -3a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 + 2a_3 \\ -a_1 - 3a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$a_2 = 0$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_3 = 0 \rightarrow a_1 = -2a_3 \\ -a_1 - 3a_3 = 0 \end{cases}$$

$+ 2a_3 - 3a_3 = 0$

$a_3 = 0 = a_1 = a_2$

SÃO INDEPENDENTES!

Contra-exemplo

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases} \rightarrow a_1 = -2a_2$$

a_2 qualquer

Exemplo 4.16 (cont.)

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{encontrar } \overleftrightarrow{P}^{-1}:$$

$$\overleftrightarrow{P}\,\overleftrightarrow{P}^{-1} = \overleftrightarrow{I}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\overleftrightarrow{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \overleftrightarrow{D} = \overleftrightarrow{P}^{-1}\,\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{P}$$

$$\vdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ ou}$$

Exemplo 4.17

Verifique que não se pode diagonalizar a matriz

$$\overset{\leftrightarrow}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$p(\lambda) = \det(\overset{\leftrightarrow}{A} - \lambda \overset{\leftrightarrow}{I}) = 0$

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (4-\lambda) & 0 \\ 0 & 3 & (4-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$(1-\lambda)(4-\lambda)(4-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_{2,3} = 4$

$\underline{\lambda_{2,3} = 4}$: $\overset{\leftrightarrow}{A}\,\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 4x \rightarrow x = 0 \\ 4y = 4y \\ 3y + \cancel{4z} = \cancel{4z} \rightarrow y = 0 \end{cases}$$

z é qualquer : $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

NÃO HÁ OUTRO LINEARMENTE INDEPENDENTE!

Exemplo 4.17 (cont.)

$$\underline{\lambda_1 = 1} : \longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Forma canônica de Jordan

Se $\overleftrightarrow{A}$, $n \times n$, não possui n autovalores distintos e não possui n autovetores linearmente independentes, existe $\overleftrightarrow{P}$ tal que

$$(\overleftrightarrow{P})^{-1}\overleftrightarrow{A}\overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{J},$$

onde $\overleftrightarrow{J}$ é $n \times n$ e está na forma canônica de Jordan

$$\overleftrightarrow{J} = \begin{bmatrix} \overleftrightarrow{J}_{1,m_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{J}_{2,m_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \overleftrightarrow{J}_{s,m_s}(\lambda_s) \end{bmatrix},$$

onde os λ_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ são os autovalores de $\overleftrightarrow{A}$, **sem repetição**, e $\overleftrightarrow{J}_{i,m_i}$ são matrizes $m_i \times m_i$, onde m_i é a multiplicidade do autovalor λ_i.

Blocos de Jordan

Os **blocos de Jordan de ordem** m_i são da forma

$$\overleftrightarrow{J}_{i,m_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Blocos de Jordan

Os **blocos de Jordan de ordem** m_i são da forma

$$\overleftrightarrow{J}_{i,m_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Observações:

- Note que
$$\sum_{i=1}^{s} m_i = n.$$
- Se λ_k tem multiplicidade $m_k = 1$, $\overleftrightarrow{J}_{k,1} = [\lambda_k]$, matriz 1×1.
- Se $m_i = 1$, $\forall i$, então $\overleftrightarrow{J} = \overleftrightarrow{D}$, diagonal.

Exemplo

Suponha que uma matriz $\overleftrightarrow{A}$, 5×5, tem como autovalores $\{2, 3, 4, 4, 4\}$. Sua forma canônica de Jordan pode ser de dois tipos:

1. Se $\overleftrightarrow{A}$ possui 5 autovetores linearmente independentes

$$\overleftrightarrow{J} = \overleftrightarrow{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Se $\overleftrightarrow{A}$ **não** possui 5 autovetores linearmente independentes

$$\overleftrightarrow{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Referências

1. Luiz H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos*, 3^a ed., Editora Livraria da Física, São Paulo (2011)