Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein[1]

[1]Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

Caso n-dimensional

O método acima é prontamente estendido a n dimensões:

1. Obtém-se o polinômio característico a partir de
$$det\left(\overleftrightarrow{A} - \lambda\overleftrightarrow{I}\right) = 0.$$

$\leftarrow$ $\overleftrightarrow{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$

$(\overleftrightarrow{A} - \lambda\overleftrightarrow{I})\vec{v} = \vec{0}$

$\frac{d\vec{z}}{dt} = \vec{f}(\vec{z}, t)$

$= \overleftrightarrow{A}\vec{z}$

2. A cada autovalor real, temos um autovetor com a função $e^{\lambda_j t}$.
3. Se λ_j é real com multiplicidade m, as funções são
$$e^{\lambda_j t},\ te^{\lambda_j t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda_j t}.$$
4. Se $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ e $\lambda_{j+1} = \alpha_j - i\beta_j$, associam-se as funções
$$e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t) \text{ e } e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t).$$
5. Se há um par de autovalores complexos conjugados com multiplicidade m, associam-se as funções
$$e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t) \text{ e } e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t),\ te^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t) \text{ e } te^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t), \ldots,$$
$$t^{m-1}e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t) \text{ e } t^{m-1}e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t)$$

Exemplo

Determine a solução geral da equação diferencial

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 2\frac{dx}{dt} - 4x = 0$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = +4x + 2y \end{cases} \Rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \overleftrightarrow{A}\,\vec{\omega}$$

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + 4 - 2\lambda = 0$$

$$\boxed{\lambda^3 - 2\lambda + 4 = 0} \rightarrow$$

Solução de Cardano para cúbica

Newton-Rhapson

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1 + i)(\lambda + 1 - i) = 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_{2,3} = 1 \pm i$$

Exemplo (cont.)

$$\boxed{x(t) = k_1 e^{2t} + [k_2 \cos(t) + k_3 \operatorname{sen}(t)] e^{-t}}$$

Motivação

Caracterização de um sistema dinâmico:

- variável independente tempo, t;
- variáveis dependentes $\vec{x}$, que constituem o espaço de fases;
- métrica utilizada para medir distâncias no espaço de fases (gerelamente euclidiana: $||\vec{x}_2 - \vec{x}_1|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_{2j} - x_{1j})^2}$, onde n é a dimensão do espaço de fases);
- operador $\vec{\Phi}^t$, que dá a evolução temporal, ou seja, $\vec{x}(t) = \vec{\Phi}^t(\vec{x}(0))$.

Seja um sistema dinâmico linear

$$\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = \overset{\leftrightarrow}{A}\,\vec{z}(t), \tag{1}$$

com condição inicial $\vec{z}(0)$. Podemos escrever a expansão de $\vec{z}(t)$ em torno de $t = 0$:

Série de Taylor

$$\vec{z}(t) = \vec{z}(0) + \left.\frac{d\vec{z}}{dt}\right|_{t=0} \frac{t}{1!} + \left.\frac{d^2\vec{z}}{dt^2}\right|_{t=0} \frac{t^2}{2!} + \cdots + \left.\frac{d^k\vec{z}}{dt^k}\right|_{t=0} \frac{t^k}{k!} + \cdots \qquad (2)$$

Utilizando a eq. (1), podemos expressar as derivadas em termos da matriz $\overset{\leftrightarrow}{A}$:

$$\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = \overset{\leftrightarrow}{A}\,\vec{z}(t) \implies \left.\frac{d\vec{z}}{dt}\right|_{t=0} = \overset{\leftrightarrow}{A}\vec{z}(0)$$

$$\frac{d^2\vec{z}(t)}{dt^2} = \overset{\leftrightarrow}{A}\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = (\overset{\leftrightarrow}{A})^2\,\vec{z}(t) \implies \left.\frac{d^2\vec{z}}{dt^2}\right|_{t=0} = (\overset{\leftrightarrow}{A})^2\vec{z}(0)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^k\vec{z}(t)}{dt^k} = \overset{\leftrightarrow}{A}\frac{d^{k-1}\vec{z}(t)}{dt^{k-1}} = (\overset{\leftrightarrow}{A})^k\,\vec{z}(t) \implies \left.\frac{d^k\vec{z}}{dt^k}\right|_{t=0} = (\overset{\leftrightarrow}{A})^k\vec{z}(0)$$

Série de Taylor

Voltando à eq. (2), temos

$$\vec{z}(t) = \left[\overset{\leftrightarrow}{I} + \overset{\leftrightarrow}{A}t + (\overset{\leftrightarrow}{A})^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + (\overset{\leftrightarrow}{A})^k \frac{t^k}{k!} + \cdots \right] \vec{z}(0)$$

Em analogia com a série de Taylor da função exponencial, pode-se definir:

$$e^{\overset{\leftrightarrow}{A}t} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\overset{\leftrightarrow}{A})^k t^k}{k!} = \overset{\leftrightarrow}{I} + \overset{\leftrightarrow}{A}t + (\overset{\leftrightarrow}{A})^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots$$

Assim, temos formalmente

$$\boxed{\vec{z}(t) = \vec{\Phi}^t(\vec{z}(0)) = e^{\overset{\leftrightarrow}{A}t}\, \vec{z}(0)}$$

Exemplo 1

Calcule $e^{\overleftrightarrow{A}t}$, se

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{A}^2 = \overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}$$

Suponha que $\overleftrightarrow{A}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$

$$\overleftrightarrow{A}^{n+1} = \overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{A}^n = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{n+1} & 0 \\ 0 & b^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$e^{\overleftrightarrow{A}t} = \overleftrightarrow{I} + \frac{\overleftrightarrow{A}t}{1!} + \frac{\overleftrightarrow{A}^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\overleftrightarrow{A}^k t^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overleftrightarrow{A}^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum \frac{t^k}{k!} a^k & 0 \\ 0 & \sum \frac{b^k t^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

Calcule $e^{\overleftrightarrow{A}t}$, se

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{A}^2 = \overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{A}^3 = \overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a^2b \\ ab^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{A}^4 = \overleftrightarrow{A}^2\,\overleftrightarrow{A}^2 = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ab)^2 & 0 \\ 0 & (ab)^2 \end{bmatrix}$$

Suponha que $\overleftrightarrow{A}^{2n} = \begin{bmatrix} (ab)^n & 0 \\ 0 & (ab)^n \end{bmatrix}$

Exemplo 2 (cont.)

$$\overleftrightarrow{A}^{2n+2} = \overleftrightarrow{A}^{2n}\,\overleftrightarrow{A}^{2} = \begin{bmatrix} (ab)^n & 0 \\ 0 & (ab)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (ab) & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ab)^{n+1} & 0 \\ 0 & (ab)^{n+1} \end{bmatrix} = \overleftrightarrow{A}^{2(n+1)}$$

$$\overleftrightarrow{A}^{5} = \overleftrightarrow{A}^{3}\,\overleftrightarrow{A}^{2} = \begin{bmatrix} 0 & a^2b \\ ab^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a^3b^2 \\ a^2b^3 & 0 \end{bmatrix}$$

Suponha que $\overleftrightarrow{A}^{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & a^{n+1}b^n \\ a^n b^{n+1} & 0 \end{bmatrix}$

$$\overleftrightarrow{A}^{2n+3} = \overleftrightarrow{A}^{2n+1}\,\overleftrightarrow{A}^{2} = \begin{bmatrix} 0 & a^{n+1}b^n \\ a^n b^{n+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a^{n+2}b^{n+1} \\ a^{n+1}b^{n+2} & 0 \end{bmatrix} = \overleftrightarrow{A}^{2(n+1)+1}$$

Exemplo 2 (cont.)

$$e^{\tilde{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{A}^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{A}^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{A}^{2n} t^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \begin{bmatrix} 0 & a^{n+1} b^n \\ a^n b^{n+1} & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^{2n}}{(2n)!} \begin{bmatrix} (ab)^n & 0 \\ 0 & (ab)^n \end{bmatrix} \right\}$$

Caso geral

Dada a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ então } e^{\overset{\leftrightarrow}{A}} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix},$$

onde

$$m_{11} = e^{(a+d)/2} \left[\Delta \cosh\left(\frac{1}{2}\Delta\right) + (a-d) \sinh\left(\frac{1}{2}\Delta\right) \right]$$

$$m_{12} = 2b\, e^{(a+d)/2} \sinh\left(\frac{1}{2}\Delta\right)$$

$$m_{21} = 2c\, e^{(a+d)/2} \sinh\left(\frac{1}{2}\Delta\right)$$

$$m_{22} = e^{(a+d)/2} \left[\Delta \cosh\left(\frac{1}{2}\Delta\right) + (d-a) \sinh\left(\frac{1}{2}\Delta\right) \right]$$

$$\Delta = \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}$$

Rowland, Todd and Weisstein, Eric W. "Matrix Exponential."From MathWorld–A Wolfram Web Resource.

`https://mathworld.wolfram.com/MatrixExponential.html` (22/07/2020)

Teorema de Cayley-Hamilton

- Teorema de A. Cayley e W. R. Halmilton permite o cáculo simplificado de qualquer função de uma matriz quadrada.

Sejam $\overset{\leftrightarrow}{B}$ uma matriz $n \times n$ e Λ um autovalor dessa matriz. Por definição, Λ satisfaz o polinômio característico de $\overset{\leftrightarrow}{B}$

$$\det(\overset{\leftrightarrow}{B} - \Lambda \overset{\leftrightarrow}{I}) = 0$$
$$\alpha_n \Lambda^n + \alpha_{n-1} \Lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \Lambda^1 + \alpha_0 = 0$$

O teorema estabelece que a matriz $\overset{\leftrightarrow}{B}$ também satisfaz seu polinômio caracteristico:

$$\boxed{\alpha_n (\overset{\leftrightarrow}{B})^n + \alpha_{n-1} (\overset{\leftrightarrow}{B})^{n-1} + \cdots + \alpha_1 (\overset{\leftrightarrow}{B})^1 + \alpha_0 \overset{\leftrightarrow}{I} = \overset{\leftrightarrow}{0}}$$

Exemplo 4.11

Mostre que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

satisfaz seu polinômio característico.

$$\det(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} (a-\lambda) & b \\ c & (d-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

$$p(\lambda) = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$p(\overleftrightarrow{A}) = (a\overleftrightarrow{I} - \overleftrightarrow{A})(d\overleftrightarrow{I} - \overleftrightarrow{A}) - bc\overleftrightarrow{I}$$

$$\left[a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]\left[d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] - bc\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4.11 (cont.)

$$= \left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ -c & (a-d) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (d-a) & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} bc & 0 \\ -c\cancel{(d-a)-c(a-d)}^{\,0} & bc \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\boxed{p(\vec{A}) = \vec{0}}$$

Theorem (Cayley-Hamilton)

Sejam $\overset{\leftrightarrow}{A}$ *uma matriz* $n \times n$ *e* $p(\lambda) = \det(\overset{\leftrightarrow}{A} - \lambda \overset{\leftrightarrow}{I})$ *seu polinômio característico. Então* $p(\overset{\leftrightarrow}{A}) = \overset{\leftrightarrow}{0}$.

Demonstração.

1. Suponha que $\overset{\leftrightarrow}{A}$ é diagonalizável. Neste caso, existe uma matriz inversível $\overset{\leftrightarrow}{S}$ tal que a matriz diagonalizada $\overset{\leftrightarrow}{D}$ é dada por $\overset{\leftrightarrow}{D} = \overset{\leftrightarrow}{S}^{-1} \overset{\leftrightarrow}{A} \overset{\leftrightarrow}{S}$. A matriz $\overset{\leftrightarrow}{D}$ e sua k-ésima potência são dadas por

$$\overset{\leftrightarrow}{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ e } (\overset{\leftrightarrow}{D})^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix},$$

onde λ_j, para $j = 1, 2, \ldots, n$ são os autovalores de $\overset{\leftrightarrow}{A}$.

Demonstração.

Como $\overleftrightarrow{D}$ é diagonal,

$$p(\overleftrightarrow{D}) = \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p(\lambda_n) \end{bmatrix} = \overleftrightarrow{0},$$

pela própria definição de autovalores. Como $\overleftrightarrow{A} = \overleftrightarrow{S}\overleftrightarrow{D}\overleftrightarrow{S}^{-1}$, temos que $(\overleftrightarrow{A})^k = \overleftrightarrow{S}(\overleftrightarrow{D})^k\overleftrightarrow{S}^{-1}$ para qualquer k. Portanto, $p(\overleftrightarrow{A}) = \overleftrightarrow{S}p(\overleftrightarrow{D})\overleftrightarrow{S}^{-1} = \overleftrightarrow{0}$.

2. Mesmo quando $\overleftrightarrow{A}$ não é diagonalizável, é possível usar o fato de que qualquer matriz $\overleftrightarrow{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pode ser aproximada por uma matriz diagonalizável. Isto significa que dada qualquer matriz $\overleftrightarrow{A}$, é possível encontrar uma seqüência de matrizes $\{\overleftrightarrow{A}_k : k \in \mathbb{N}\}$ tal que $\overleftrightarrow{A}_k \to \overleftrightarrow{A}$ quando $k \to \infty$ e que cada matriz $\overleftrightarrow{A}_k$ tem n autovalores distintos.

$$\overleftrightarrow{A}^2 = \overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{A}$$
$$= (\overleftrightarrow{S}\overleftrightarrow{D}\overleftrightarrow{S}^{-1})(\overleftrightarrow{S}\overleftrightarrow{D}\overleftrightarrow{S}^{-1})$$
$$= \overleftrightarrow{S}\overleftrightarrow{D}(\overleftrightarrow{S}^{-1}\overleftrightarrow{S})\overleftrightarrow{D}\overleftrightarrow{S}^{-1}$$
$$= \overleftrightarrow{S}\overleftrightarrow{D}\overleftrightarrow{I}\overleftrightarrow{D}\overleftrightarrow{S}^{-1}$$
$$= \overleftrightarrow{S}\overleftrightarrow{D}^2\overleftrightarrow{S}^{-1}$$

Demonstração.

Deste modo, como cada matriz $\overset{\leftrightarrow}{A}_k$ é diagonalizável, vale o passo 1 acima. Portanto $p_k(\overset{\leftrightarrow}{A}_k) = \overset{\leftrightarrow}{0}$, onde $p_k(\lambda) = \det(\overset{\leftrightarrow}{A}_k - \lambda \overset{\leftrightarrow}{I})$ é o polinômio característico da matriz $\overset{\leftrightarrow}{A}_k$.

Note que cada termo da matriz $p(\overset{\leftrightarrow}{A})$ pode ser escrito como um polinômio dos termos de $\overset{\leftrightarrow}{A}$. Como $\lim_{k\to\infty} \overset{\leftrightarrow}{A}_k = \overset{\leftrightarrow}{A}$, concluímos que $\lim_{k\to\infty} p_k(\overset{\leftrightarrow}{A}_k) = p(\overset{\leftrightarrow}{A})$. Visto que $p_k(\overset{\leftrightarrow}{A}_k) = \overset{\leftrightarrow}{0}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, necessariamente temos que $p(\overset{\leftrightarrow}{A}) = \overset{\leftrightarrow}{0}$.

$\square$

`http://math.stanford.edu/~ralph/math53h/notes2.pdf` (2016)

Uso do teorema para reduzir a ordem de um polinômio em $\overset{\leftrightarrow}{A}$

Sejam uma matriz $\overset{\leftrightarrow}{A}$, seu polinômio característico $p(x)$ e um outro polinômio qualquer $M(x)$. Primeiramente, escreva

$$M(x) = Q(x)p(x) + R(x),$$

onde $Q(x)$ é encontrado por divisão (veja exemplo) e o polinômio resto $R(x)$ é de grau $(n-1)$ ou menor. Por definição, $p(s) = 0$ se $s = \lambda_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, portanto

$$M(\lambda_i) = R(\lambda_i). \tag{3}$$

Ao considerar o polinômio matricial correspondente $M(\overset{\leftrightarrow}{A})$

$$M(\overset{\leftrightarrow}{A}) = Q(\overset{\leftrightarrow}{A})p(\overset{\leftrightarrow}{A}) + R(\overset{\leftrightarrow}{A}),$$

podemos chegar ao resultado análogo usando o Teorema de Cayley-Hamilton ($p(\overset{\leftrightarrow}{A}) \equiv \overset{\leftrightarrow}{0}$), então

$$\boxed{M(\overset{\leftrightarrow}{A}) = R(\overset{\leftrightarrow}{A})}$$

http://web.mit.edu/2.151/www/Handouts/CayleyHamilton.pdf

Exemplo

Reduza a ordem de $M(\overleftrightarrow{A}) = (\overleftrightarrow{A})^4 + 3(\overleftrightarrow{A})^3 + 2(\overleftrightarrow{A})^2 + \overleftrightarrow{A} + \overleftrightarrow{I}$ para a matriz

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(\overleftrightarrow{A} - \lambda\overleftrightarrow{I})$$

$$= \begin{vmatrix} (3-\lambda) & 1 \\ 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 1$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda - 1 + 6$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 5$$

$$\overleftrightarrow{M}(x) = Q(x)\,p(x) + R(x)$$

$$\overleftrightarrow{M}(\overleftrightarrow{A}) = Q(\overleftrightarrow{A})\,\cancel{p(\overleftrightarrow{A})}^{\overleftrightarrow{0}} + R(\overleftrightarrow{A})$$

$$\frac{M(x)}{p(x)} \Rightarrow$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 & x^2 - 5x + 5 \\ \hline
-x^4 + 5x^3 - 5x^2 & \underbrace{x^2 + 8x + 37}_{Q(x)} \\ \hline
8x^3 - 3x^2 + x + 1 & \\
-8x^3 + 40x^2 - 40x & \\ \hline
37x^2 - 39x + 1 & \\
-37x^2 + 185x - 185 & \\ \hline
\underbrace{146x - 184}_{R(x)} &
\end{array}
$$

Exemplo (cont.)

$$\mathcal{M}(\overleftrightarrow{A}) = R(\overleftrightarrow{A}) =$$

$$\mathcal{M}(\overleftrightarrow{A}) = 146\,\overleftrightarrow{A} - 184\,\overleftrightarrow{I}$$

$$= 146 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 184 & 0 \\ 0 & 184 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 438 & 146 \\ 146 & 292 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 184 & 0 \\ 0 & 184 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 254 & 146 \\ 146 & 108 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4.13

Calcule $f(\overleftrightarrow{B}) = (\overleftrightarrow{B})^{131}$ para

$$\overleftrightarrow{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 3 \\ 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$\hookrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$f(\overleftrightarrow{B}) = Q(\overleftrightarrow{B})\,\cancel{p(\overleftrightarrow{B})} + R(\overleftrightarrow{B}).$$

$$\overleftrightarrow{0}$$

$$x^{131}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 2x + 1 \\ \hline -x^{131} + 2x^{130} - x^{129} & x^{129} + 2x^{128} + \dots \\ 2x^{130} - x^{129} & \\ -2x^{130} + 4x^{129} - 2x^{128} & \\ -3x^{129} - 2x^{128} & \end{array}$$

$\downarrow$

MUITO

TRABALHOSO!

Exemplo 4.13 (cont.)

Sabemos que $R(x) = ax + b$ (grau $n-1$ no máximo)

$$f(\lambda_j) = R(\lambda_j), \quad \text{pois} \quad p(\lambda_j) = 0$$

Como a multiplicidade de $\lambda_1 = 1$ é 2, esta equação não é suficiente para determinar $R(x)$. No entanto, podemos usar:

$$f(x) = \underbrace{Q(x)\, P_*(x)\, (x-\lambda)^2}_{p(x)} + R(x)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left[Q(x)\, P_*(x)(x-\lambda)^2\right] + \frac{dR(x)}{dx}$$

$$= (x-\lambda)^2 \frac{d}{dx}\left[Q(x)\, P_*(x)\right] + 2(x-\lambda)\, Q(x) P_*(x) + \frac{dR}{dx}$$

Exemplo 4.13 (cont.)

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\lambda} = \left.\frac{dR}{dx}\right|_{x=\lambda} \longrightarrow \frac{dR}{dx} = a$$

$$\begin{cases} f(\lambda) = R(\lambda) \\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\lambda} = \left.\frac{dR}{dx}\right|_{x=\lambda} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^{131} = a\lambda + b \\ 131\,\lambda^{130} = a \end{cases}$$

$$\underline{\lambda = 1}$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a = 131 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} a = 131 \\ b = -130 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{R(x) = 131\,x - 130}$$

$$f(\overleftrightarrow{B}) = \overleftrightarrow{B}^{131} = R(\overleftrightarrow{B}) = 131\,\overleftrightarrow{B} - 130\,\overleftrightarrow{I}$$

$$= 131\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 130 & 0 \\ 0 & 130 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 393 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} //$$

Uso do teorema de Cayley-Hamilton para cálculo de polinômios matriciais

1. Autovalores distintos: Sejam λ_j os autovalores simples de uma matriz $\overset{\leftrightarrow}{A}$, $n \times n$. A partir do teorema de Cayley-Hamilton, prova-se que se $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios e se

$$f(\lambda_j) = g(\lambda_j), \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

então há um conjunto de n equações independentes, suficiente para determinar $g(x)$ e

$$\boxed{f(\overset{\leftrightarrow}{A}) = g(\overset{\leftrightarrow}{A})}$$

Uso do teorema de Cayley-Hamilton para cálculo de polinômios matriciais

2. Autovalores repetidos: Se λ_k tem multiplicidade m, haverá entre as eqs. (4) duas ou mais equações idênticas. Portanto, não formarão um conjunto de n equações independentes necessário para determinar $g(x)$. Neste caso, as primeiras $(m-1)$ derivadas do polinômio característico $p(x)$ se anulam em $x = \lambda_k$, de modo que é possível formar um conjunto de m equações linearmente independentes

$$
\begin{aligned}
f(\lambda_k) &= g(\lambda_k) \\
\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\lambda_k} &= \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=\lambda_k} \\
&\vdots \\
\left.\frac{d^{(m-1)}f}{dx^{(m-1)}}\right|_{x=\lambda_k} &= \left.\frac{d^{(m-1)}g}{dx^{(m-1)}}\right|_{x=\lambda_k}
\end{aligned}
$$

Uso do teorema de Cayley-Hamilton para cálculo de polinômios matriciais

Este conjunto, combinado com as equações independentes entre as eqs. (4) completam o conjunto necessário de n equações para determinar $g(x)$. Novamente,

$$\boxed{f(\overset{\leftrightarrow}{A}) = g(\overset{\leftrightarrow}{A})}$$

$\Rightarrow$ Um polinômio matricial de uma matriz $n \times n$ $\overset{\leftrightarrow}{A}$ sempre pode ser expresso como um polinômio de grau máximo igual a $n-1$.

http://web.mit.edu/2.151/www/Handouts/CayleyHamilton.pdf

Uso do teorema de Cayley-Hamilton para cálculo de funções analíticas de matrizes

- Se $f(z)$ é uma função escalar analítica em uma região do plano complexo, nesta região ela pode ser expressa como

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k.$$

De forma análoga ao caso polinomial, pode-se escrever

$$f(z) = p(z)Q(z) + R(z),$$

onde $p(z)$ é o polinômio característico de uma matriz $n \times n$ $\overset{\leftrightarrow}{A}$ e seguir os mesmos passos para chegar a

$$\boxed{f(\overset{\leftrightarrow}{A}) = R(\overset{\leftrightarrow}{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (\overset{\leftrightarrow}{A})^k}$$

Exemplo

Calcule $\sin(\overleftrightarrow{A})$, onde

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

- Calcule $e^{\overleftrightarrow{B}t}$, para $\overleftrightarrow{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ usando o Teorema de Cayley-Hamilton
- Faça o mesmo para $\overleftrightarrow{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.