Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein[1]

[1] Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

1. **Autovalores e autovetores**

Autovalores e autovetores

Recapitulando, para encontrar a solução de

sistema $n \times n$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}} = \overset{\leftrightarrow}{A}\vec{x}, \tag{1}$$

suponha que $\vec{V}_0$ é um vetor não-nulo para o qual $\overset{\leftrightarrow}{A}\vec{V}_0 = \lambda\vec{V}_0$. Então

$$\vec{X}(t) = e^{\lambda t}\vec{V}_0$$

é solução de (1). De fato,

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{X}}(t) &= \lambda e^{\lambda t}\vec{V}_0 \\
&= e^{\lambda t}(\lambda\vec{V}_0) \\
&= e^{\lambda t}(\overset{\leftrightarrow}{A}\vec{V}_0) \\
&= \overset{\leftrightarrow}{A}(e^{\lambda t}\vec{V}_0) \\
&= \overset{\leftrightarrow}{A}\vec{X}
\end{aligned}$$

M. W. Hirsch, S. Smale, R. L. Devaney. Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos. 3ª ed. (2013)

Autovalores e autovetores

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = \overset{\leftrightarrow}{A}\vec{z}$$

Autovetor de $\overset{\leftrightarrow}{A}$:

$$\boxed{\overset{\leftrightarrow}{A}\,\vec{z}_0 = \lambda\,\vec{z}_0},$$

onde λ é o *autovalor* correspondente ao *autovetor* $\vec{z}_0$. Para um sistema de ordem n, temos:

$$\overset{\leftrightarrow}{A}\vec{z}_0 = \lambda\vec{z}_0 = \lambda\overset{\leftrightarrow}{I}\vec{z}_0 \quad , \overset{\leftrightarrow}{I} \text{ é a matriz identidade}$$

$$\left[\overset{\leftrightarrow}{A} - \lambda\overset{\leftrightarrow}{I}\right]\vec{z}_0 = \vec{0}.$$

A solução não-trivial é dada pelo **polinômio característico**:

$$det\left(\overset{\leftrightarrow}{A} - \lambda\overset{\leftrightarrow}{I}\right) = 0,$$

onde $\overset{\leftrightarrow}{I}$ é a matriz identidade de ordem n.

Autovalores e autovetores

↪ Sugestão : Youtube 3 blue 1 brown

↳ A quick trick for computing eigenvalues

Exemplo 4.3:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + 2y \\ \dot{y} &= 3y \end{cases}$$

(a) Determinar os autovalores e autovetores da matriz correspondente. (b) Encontrar a solução geral do sistema. (c) Esboçar o espaço de fases.

a) $\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\det(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I}) = 0$

$\det \left| \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$

$\det \begin{vmatrix} -(1+\lambda) & 2 \\ 0 & (3-\lambda) \end{vmatrix} =$

$-(1+\lambda)(3-\lambda) - 2 \times 0 = 0$

$-(1+\lambda)(3-\lambda) = 0$

↳ $\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$ AUTOVALORES

Autovetores: $\overleftrightarrow{A}\vec{v} = \lambda \vec{v}$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$

Exemplo 4.3 (cont.)

$\underline{\lambda_1 = -1}$: $\vec{A}\,\vec{v}_1 = \lambda\,\vec{v}_1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow \lambda = -1$

$$\begin{cases} -x_0 + 2y_0 = -x_0 \\ 3y_0 = -y_0 \end{cases}$$

$4y_0 = 0 \rightarrow \boxed{y_0 = 0}$

Subst:

$-x_0 + 0 = -x_0$

$0 = 0$ ou para qualquer x_0!

Autovetores da forma $\begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ Escolher $x_0 = 1$

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

autovetor normalizado

$\rightarrow \vec{v}_1$

$\underline{\lambda_2 = 3}$ $\quad \vec{A}\,\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$

$$\rightarrow \begin{cases} -x_0 + 2y_0 = 3x_0 \; (*) \\ 3y_0 = 3y_0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ y_0 é qualquer

$(*)$ $4x_0 = 2y_0$

$2x_0 = y_0$

$\rightarrow$ Autovetores são da forma $\begin{bmatrix} x_0 \\ 2x_0 \end{bmatrix}$

Escolher $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\vec{v}_2$

(b) Solução Geral

$$\vec{z}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 = e^{-t}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\vec{z}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 = e^{3t}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

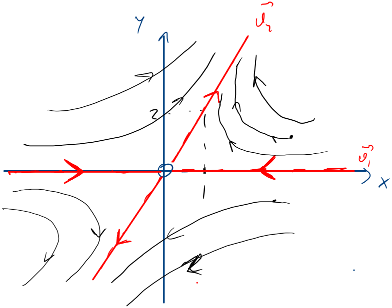
Sol. Geral:

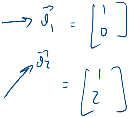
$$\vec{z}(t) = k_1\vec{z}_1(t) + k_2\vec{z}_2(t),$$

k_1 e k_2 são determinadas pelas condições iniciais

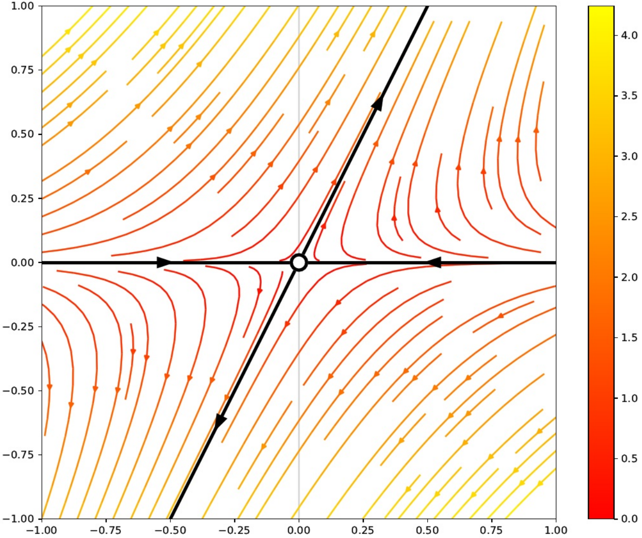
$$\vec{z}(t) = k_1 e^{-t}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + k_2 e^{3t}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$\vec{z}(t) = \begin{bmatrix}k_1 e^{-t} + k_2 e^{3t}\\ 2k_2 e^{3t}\end{bmatrix}$$





Exemplo 4.3 - Espaço de fase



Exemplo 4.3 - Código Python para o espaço de fase

```
from pylab import *

xmin = -1; xmax = 1.01; dx = 0.01
ymin = -1; ymax = 1.01; dy = 0.01

x, y = meshgrid(arange(xmin,xmax,0.01),arange(ymin,ymax,0.01))

xdot = -x + 2*y
ydot =  3*y

fig0, ax0 = plt.subplots(num=None, figsize=(11,9))
strm = ax0.streamplot(x,y,xdot,ydot,color=(sqrt(xdot**2+ydot**2)),cmap='autumn') #cmap='jet')
x1 = np.linspace(-0.5, 0.5, 2)
x2 = np.linspace(-1.0, 1.0, 2)
xa1  = 0.25; dxa1 = 0.05
xa2  = 0.6
ax0.arrow(0,-1,0,2, color='lightgray')
ax0.arrow(xa1, 2*xa1, dxa1, 2*dxa1, head_width=0.04, color='black',zorder=5)
ax0.arrow(-xa1, -2*xa1, -dxa1, -2*dxa1, head_width=0.04, color='black',zorder=5)
ax0.arrow(xa2, 0, -dxa1, 0, head_width=0.04, color='black',zorder=5)
ax0.arrow(-xa2, 0, dxa1, 0, head_width=0.04, color='black',zorder=5)
ax0.plot(x1, 2*x1,color='black',linewidth=3)
ax0.plot(x2, 0*x2,color='black',linewidth=3)
circle0 = plt.Circle((0, 0), 0.03, color='white', fill=True, linewidth=3,zorder=10)
circle1 = plt.Circle((0, 0), 0.03, color='black', fill=False, linewidth=3,zorder=20)
ax0.add_artist(circle0)
ax0.add_artist(circle1)

fig0.colorbar(strm.lines)

plt.show(fig0)
#plt.savefig("phase_space_4-3.eps", dpi=150)
```

Atribuindo C.I. ao exemplo 4.3

a) $\vec{z}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ no eixo x

Sol geral:

$$\vec{z}(t) = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{0} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{0}$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 2 \\ 2k_2 = 0 \rightarrow k_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = 2$$

$$\boxed{\vec{z}(t) = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t}}$$

b) $\vec{z}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 1 \\ 2k_2 = 2 \rightarrow k_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow k_1 = 0$$

$$\boxed{\vec{z}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t}} \rightarrow \begin{matrix} x(t) = e^{3t} \\ y(t) = 2e^{3t} \end{matrix}$$

Atribuindo C.I. ao exemplo 4.3

c) $\vec{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \to$ no eixo y

(não é autovetor)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^0 + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^0$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ 2k_2 = 2 \end{cases} \to k_2 = 1$$

$$\Rightarrow k_1 = -1$$

$$\boxed{\vec{z}(t) = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t}}$$

$$\begin{cases} x(t) = -e^{-t} + e^{3t} \\ y(t) = 2e^{3t} \end{cases}$$

Classificação quanto à topologia e à estabilidade (2D)

$\det(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I}) = 0$

$\overleftrightarrow{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} (a-\lambda) & b \\ c & (d-\lambda) \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$

Em duas dimensões, o polinômio característico e autovalores são:

$$\lambda^2 - T\lambda + \Delta = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4\Delta}}{2}$$

1. $\Delta < 0 \implies \lambda_{1,2}$ são reais e de sinais opostos. O ponto de equilíbrio é um **ponto de sela**, instável no sentido de Lyapunov.

Classificação quanto à topologia e à estabilidade (2D)

Em duas dimensões, o polinômio característico e autovalores são:

$$\lambda^2 - T\lambda + \Delta = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4\Delta}}{2}$$

1. $\Delta < 0 \implies \lambda_{1,2}$ são reais e de sinais opostos. O ponto de equilíbrio é um **ponto de sela**, instável no sentido de Lyapunov.
2. $\Delta > 0$ e $T^2 - 4\Delta > 0 \implies \lambda_{1,2}$ são reais e tem o mesmo sinal. Se $T > 0$, temos um **nó instável**; se $T < 0$, temos um **nó assintoticamente estável**.

$$\sqrt{T^2 - 4\Delta} = \sqrt{T^2\left(1 - \frac{4\Delta}{T^2}\right)} = |T|\underbrace{\sqrt{1 - \frac{4\Delta}{T^2}}}_{<1} < |T|$$

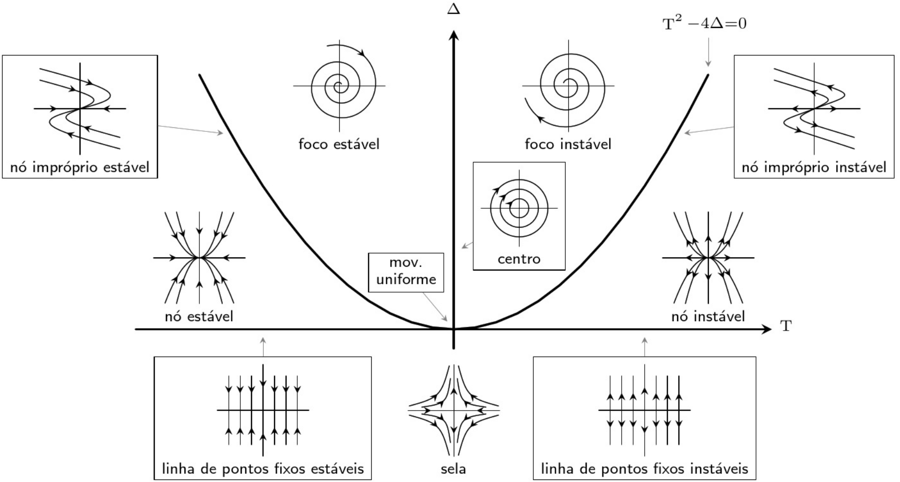
Classificação quanto à topologia e à estabilidade (2D)

Em duas dimensões, o polinômio característico e autovalores são:

$$\lambda^2 - T\lambda + \Delta = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4\Delta}}{2}$$

1. $\Delta < 0 \implies \lambda_{1,2}$ são reais e de sinais opostos. O ponto de equilíbrio é um **ponto de sela**, instável no sentido de Lyapunov.
2. $\Delta > 0$ e $T^2 - 4\Delta > 0 \implies \lambda_{1,2}$ são reais e tem o mesmo sinal. Se $T > 0$, temos um **nó instável**; se $T < 0$, temos um **nó assintoticamente estável**.
3. $\Delta > 0$ e $T^2 - 4\Delta < 0 \implies \lambda_{1,2}$ são complexos conjugados. Se $T < 0$, temos um **foco assintoticamente estável**; se $T > 0$, um **foco instável**; se $T = 0$, um **centro neutramente estável**.

Classificação dos pontos de equilibrio no espaço $\Delta \times T$



Modificado de

`https://tex.stackexchange.com/questions/347201/drawing-the-trace-determinant-diagram-on-latex`

Autor: Gernot Salzer.

Exemplo 4.4

$$\begin{cases} \dot{x} &= -3x + 2y \\ \dot{y} &= -y \end{cases}$$

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -(3+\lambda) & 2 \\ 0 & -(1+\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$+(3+\lambda)(1+\lambda) = 0$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ nó estável.

Autovetores

$\lambda_1 = -3$

$$\overleftrightarrow{A}\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$$

$$(\overleftrightarrow{A} - \lambda_1 \overleftrightarrow{I})\vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -(3+\lambda_1) & 2 \\ 0 & -(1+\lambda_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \left.\begin{cases} 0x_0 + 2y_0 = 0 \\ 0x_0 + 2y_0 = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow y_0 = 0$$

x_0 é qualquer

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x_0 + 2y_0 = 0 \\ 0x_0 + 0y_0 = 0 \end{cases} \text{ ok} \rightarrow y_0 = x_0$$

$$\hookrightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4.4 (cont.)

Solução geral:

$$\vec{z}(t) = k_1 \vec{z}_1(t) + k_2 \vec{z}_2(t)$$

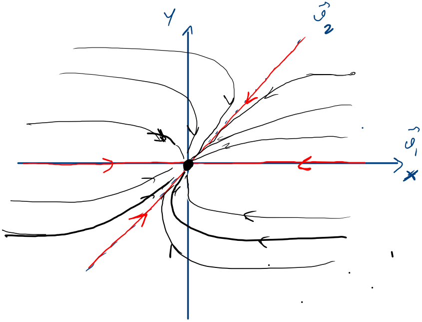
$$= k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3t} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

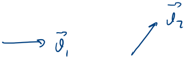
$$\begin{cases} x(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-t} \\ y(t) = k_2 e^{-t} \end{cases}$$

Direção de aproximação do eq.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-k_2 e^{-t}}{-3k_1 e^{-3t} - k_2 e^{-t}} \times \left(\frac{e^{t}}{e^{t}}\right)$$

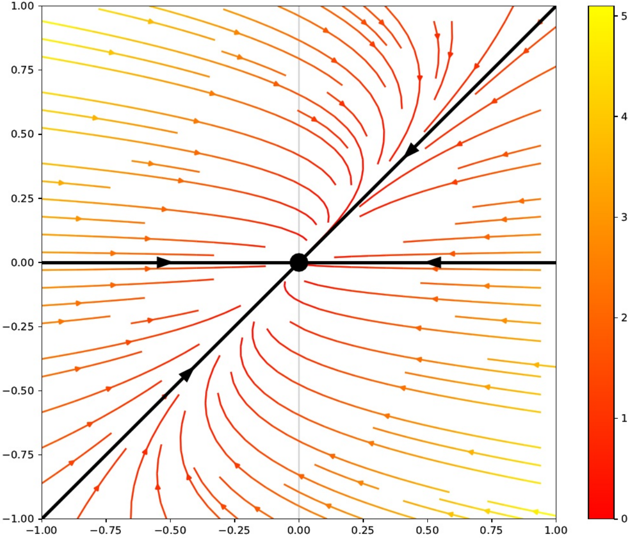
$$= \frac{-k_2}{-3k_1 e^{-2t} - k_2} \xrightarrow{t \to \infty} \frac{-k_2}{-k_2} = 1$$





equilíbrio estável

Exemplo 4.4 - Espaço de fase



Exemplo 4.5

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = -4x + 3y \end{cases}$$

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$T = -1 + 3 = 2$

$\Delta = -3 + 8 = 5$

$\det(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I}) = 0$

$\Downarrow$

$\lambda^2 - T\lambda + \Delta = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

$\lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$

$\boxed{\lambda = 1 \pm 2i}$

Auto valores complexos.

$Re(\lambda) > 0 \to$ instável

foco instável

Autovetores:

$$\begin{bmatrix} -(1+\lambda) & 2 \\ -4 & (3-\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\vec{v}$

$(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I})\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{cases} -(1+\lambda) x_0 + 2 y_0 = 0 \\ -4 x_0 + (3-\lambda) y_0 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 1 + 2i$

$$\begin{cases} -(2+2i) x_0 + 2 y_0 = 0 \quad (*) \\ -4 x_0 + (2 - 2i) y_0 = 0 \end{cases}$$

$(*)$ $\boxed{y_0 = (1+i) x_0}$

Subst. na 2ª

$-4x_0 + (2-2i)(1+i) x_0 = 0$

$-4x_0 + 2(1-i)(1+i) x_0 = 0$

$-4x_0 + 2(1 - i^2) x_0 = 0$

$-4x_0 + 2(2) x_0 = 0$

$-4x_0 + 4x_0 = 0$

$\hookrightarrow$ ok para qualquer x_0!

Exemplo 4.5 (cont.)

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} x_0 \\ (1+i)x_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ (1+i) \end{bmatrix}$$

escolhe $x_0 = 1$

Autovetor é complexo!

$\Rightarrow$ Não existe reta real que não seja modificada por $\overleftrightarrow{A}$

$$\Rightarrow \underline{\lambda_2 = 1-2i} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ (1-i) \end{bmatrix}$$

VERIFIQUEM!

Sol. geral:

$$\vec{z}(t) = k_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\vec{z}(t) = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} e^{(1+2i)t} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix} e^{(1-2i)t}$$

$$= k_1 \vec{v}_1 e^t e^{2it} + k_2 \vec{v}_2 e^t e^{-2it}$$

$$\downarrow \quad e^{ia} = \cos(a) + i \operatorname{sen}(a)$$

$$= e^t \left\{ k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} [\cos(2t) + i \operatorname{sen}(2t)] + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix} [\cos(2a) - i \operatorname{sen}(2a)] \right\}$$

$$\vdots$$

$$= e^t \begin{bmatrix} (k_1+k_2)\cos(2t) + (k_1-k_2)\, i \operatorname{sen}(2t) \\ (k_1+k_2)[\cos(2t) - \operatorname{sen}(2t)] + (k_1-k_2)\, \underline{\underline{i}}[\cos(2t) + \operatorname{sen}(2t)] \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(\alpha + i\beta) \\ k_2 = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta) \end{cases} ; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

↳ Somente 2 constantes arbitrárias

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = \alpha \\ k_1 - k_2 = i\beta \end{cases}$$

$$\vec{z}(t) = e^{t}\left\{ \alpha \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix} + \beta i^{2} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(2t) \\ \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix} \right\}$$

$\downarrow$ volto a chamar as constantes de k_1 e k_2

$$\boxed{\vec{z}(t) = e^{t} \begin{bmatrix} k_1 \cos(2t) - k_2 \operatorname{sen}(2t) \\ k_1 [\cos(2t) - \operatorname{sen}(2t)] - k_2 [\cos(2t) + \operatorname{sen}(2t)] \end{bmatrix}}$$

* se $x_0 = 0$; $y_0 = 1$

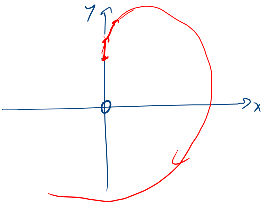
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{0} \begin{bmatrix} k_1 \cos(0) - \cancel{k_2 \operatorname{sen}(0)}^{\,0} \\ k_1 [\cos(0) - \cancel{\operatorname{sen}(0)}] - k_2 (\cos(0) + \cancel{\operatorname{sen}(0)}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_1 - k_2 \end{bmatrix}$$

$-$ ou $+$?

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{z}(t) = e^{t} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(2t) \\ \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix}}$$



Exemplo 4.5 - Espaço de fase