# Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli Vainstein[1]

[1] Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

1. **Sistemas lineares autônomos a tempo contínuo**
   - Caso unidimensional
   - Sistema bidimensional

## 1) Caso unidimensional

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = ax + b, \quad x(0) = x_0$$

$f(x^*) = 0$

Neste caso o ponto de equilíbrio é, trivialmente, $x^* = -b/a$.

Solução:

- Se $a = 0$:

$$\frac{dx}{dt} = b \implies \boxed{x(t) = x_0 + bt}$$

- Se $a \neq 0$:

$$\frac{dx}{dt} = ax + b$$

$$\frac{dx}{ax+b} = dt$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{ax'+b} = \int_{t_0}^{t} dt'$$

$$y' = ax' + b$$

$$dy' = a\,dx'$$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy'}{ay} = [t']_{t_0}^{t}$$

$$\frac{1}{a}[\ln y']_{y_0}^{y} = t - t_0$$

$$\ln y - \ln y_0 = a(t - t_0)$$

## cont. ($a \neq 0$)

$$\ln \frac{y}{y_0} = a(t-t_0)$$

$$\frac{y}{y_0} = e^{a(t-t_0)}$$

$$y(t) = y_0\, e^{a(t-t_0)}$$

$$a\,x(t) + b = (a x_0 + b)\, e^{a(t-t_0)}$$

$$\boxed{x(t) = \left(x_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(t-t)} - \frac{b}{a}}$$

se $a \neq 0$

Exercício 3.15 (por transf. de Laplace)

- Se $a < 0$:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = -\frac{b}{a}$$

- Se $a > 0$: (e $x_0 \neq -\frac{b}{a}$)

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$$

## 1) Caso unidimensional

Pode-se redefinir a variável para que o ponto de equilibrio se situe na origem:

$$y(t) \equiv x(t) - x^* = x(t) + \frac{b}{a} \ \therefore \ y^* = 0$$

Assim pode-se transformar a equação original:

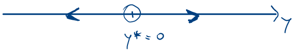
$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= ax + b \\
\frac{dy}{dt} &= a\left(y - \frac{b}{a}\right) + b, \quad \text{porque} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \\
\frac{dy}{dt} &= ay - \cancel{b} + \cancel{b} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = ay
\end{aligned}$$

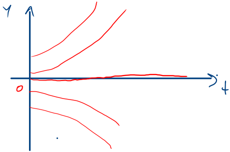
cuja solução é

$$\boxed{y(t) = y(0)\, e^{at}}$$

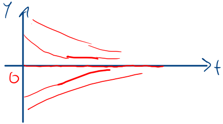
## Retrato de fases do caso unidimensional

- $a > 0$: (instável)




- $a < 0$: (estável)

## 2) Caso bidimensional

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \boxed{\dot{x}_1 = ax_1 + bx_2 + \alpha} = f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = \boxed{\dot{x}_2 = cx_1 + dx_2 + \beta} = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Para calcular o ponto de equilíbrio $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$, deve-se resolver:

$$\begin{cases} f_1(x_1^*, x_2^*) = 0 \\ f_2(x_1^*, x_2^*) = 0 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} ax_1^* + bx_2^* = -\alpha \\ cx_1^* + dx_2^* = -\beta \end{cases}$$

# 2) Caso bidimensional

Cramer

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -\alpha & b \\ -\beta & d \end{vmatrix} = -\alpha d + b\beta$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & -\alpha \\ c & -\beta \end{vmatrix} = -a\beta + \alpha c$$

$$x_1^* = \frac{D_1}{D} = \frac{b\beta - \alpha d}{ad - bc}$$

$$x_2^* = \frac{D_2}{D} = \frac{\alpha c - a\beta}{ad - bc}$$

## 2) Caso bidimensional

Novamente, pode-se mover o ponto de equilíbrio para a origem, fazendo a mudança de variáveis:

$$x(t) = x_1(t) - x_1^*$$
$$y(t) = x_2(t) - x_2^*.$$

Nas novas coordenadas, o sistema é reescrito como (verifique)

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

e o ponto de equilibrio é dado por $(x^*, y^*) = (0, 0)$. Este sistema é equivalente à equação de 2ª ordem: (verifique)

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a + d)\frac{dx}{dt} + (ad - bc) = 0.$$

# Notação matricial

É conveniente escrever o sistema na forma matricial:

$$\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = \overset{\leftrightarrow}{A}\,\vec{z}(t),$$

onde

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \overset{\leftrightarrow}{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Como o sistema corresponde a uma equação linear de segunda ordem, vale o princípio de superposição:

- Dadas $\vec{z}_1$ e $\vec{z}_2$ soluções linearmente independentes,

$$\vec{z} = k_1\,\vec{z}_1 + k_2\,\vec{z}_2$$

também é solução, com $k_1$ e $k_2$ constantes.

# Solução geral

Suponha que o sistema

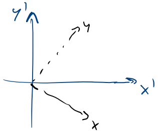
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

Motivação

$\frac{dx'}{dt} = ax'$ → sei resolver

tem solução

$$x(t) = x_0\, e^{\lambda t}$$
$$y(t) = y_0\, e^{\lambda t},$$




que representa uma linha reta no espaço de fases, dado que

$$y(t) = \frac{y_0}{x_0} x(t).$$

↳ é um sistema linear nas coordenadas x, y.

Substituindo a solução no sistema acima, obtém-se

# Solução geral

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}$$
$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_0 e^{\lambda t}) = x_0 \lambda e^{\lambda t}$$

$$\dot{y} = y_0 \lambda e^{\lambda t}$$

Subst. no sistema:

$$\begin{cases} x_0 \lambda e^{\lambda t} = a x_0 e^{\lambda t} + b y_0 e^{\lambda t} \\ y_0 \lambda e^{\lambda t} = c x_0 e^{\lambda t} + d y_0 e^{\lambda t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a x_0 - \lambda x_0 + b y_0) e^{\lambda t} = 0 \\ (c x_0 + d y_0 - \lambda y_0) e^{\lambda t} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a - \lambda) x_0 + b y_0 = 0 \\ c x_0 + (d - \lambda) y_0 = 0 \end{cases}$$

→ Solução trivial: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ → origem $\vec{z}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ponto de eq.

→ Solução não-trivial (Cramer)

$$D = \begin{vmatrix} (a-\lambda) & b \\ c & (d-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$

$ad - a\lambda - d\lambda + \lambda^2 - bc = 0$

$$\boxed{\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0}$$

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Traço de $\overleftrightarrow{A}$ : $T = a + d$

Det de $\overleftrightarrow{A}$ : $\Delta = ad - bc$

Polinômio característico :

$$\boxed{\lambda^2 - T\lambda + \Delta = 0}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4\Delta}}{2}}$$

↳ possivelmente $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\boxed{T^2 \neq 4\Delta}$

* Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ :

→ para cada $\lambda_j$ encontra $x_{0j}$ e $y_{0j}$

Assim

$$\boxed{\vec{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} x_{01} \\ y_{01} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + k_2 \begin{bmatrix} x_{02} \\ y_{02} \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}}$$

## Autovetores e autovalores

Sistema: $\boxed{\dot{\vec{z}} = \overleftrightarrow{A}\,\vec{z}}$

vale para n dimensões

$\vec{V}_0$ é uma autovetor de $\overleftrightarrow{A}$

$$\overleftrightarrow{A}\,\vec{V}_0 = \lambda\,\vec{V}_0$$

Suposição: $\vec{z}(t) = e^{\lambda t}\,\vec{V}_0$ é solução do sistema

$$\dot{\vec{z}}(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\vec{V}_0\right)$$

$$= \vec{V}_0\,\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\right)$$

$$= \vec{V}_0\,\lambda\,e^{\lambda t}$$

$$= e^{\lambda t}\left(\lambda\vec{V}_0\right)$$

Eq dos autovalores

$$= e^{\lambda t}\,\overleftrightarrow{A}\,\vec{V}_0$$

$$= \overleftrightarrow{A}\left(e^{\lambda t}\vec{V}_0\right)$$

$$\boxed{\dot{\vec{z}} = \overleftrightarrow{A}\,\vec{z}(t)}$$ ok

$\vec{z}(t) = e^{\lambda t}\,\vec{V}_0$, com $\vec{V}_0$ autovetor de $\overleftrightarrow{A}$ é solução do sistema.