Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli Vainstein[1]

[1]Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

Tipos de estabilidade

Para que conjuntos de parâmetros e CI's o sistema possui um comportamento dinâmico estável?

$$\text{Estabilidade} \begin{cases} \text{sist. de eqs.} \longrightarrow & \text{equações isomórficas com} \\ & \text{ parâmetros próximos} \\ \text{soluções} \quad\quad \longrightarrow & \text{condições iniciais vizinhas} \end{cases}$$

Estabilidade de um ponto de equilíbrio (no sentido de Lyapunov)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$$

Ponto de equilíbrio: $\vec{x}^*$ tal que $\vec{f}(\vec{x}^*) = \vec{0}$

Ponto ordinário ou regular: qualquer ponto <u>não</u> de equilíbrio

- Se $\vec{x}(0) = \vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, o sistema aí permanece.
- Se após uma pequena perturbação em $\vec{x}(0)$, o sistema voltar a $\vec{x}^*$, diz-se que ele é **assintoticamente** estável

$$\vec{x}(t) \to \vec{x}^*, \text{ para } t \to \infty$$

- Se o raio dentro do qual as trajetórias são atraídas é finito, diz-se que $\vec{x}^*$ é **localmente** estável; caso contrário, é **globalmente** estável.

$\Rightarrow$ Em ambos os casos, trata-se de um <u>atrator</u>.

Definições

Bacia de atração: conjunto de condições iniciais (CI's) que levam ao atrator.

Ponto neutramente estável: para $\vec{x}(0)$ dentro de uma esfera centrada em $\vec{x}^*$, $\vec{x}(t)$ permanece dentro de outra esfera centrada em $\vec{x}^*$, sem ir para $\vec{x}^*$.

Ponto instável: $\vec{x}(t)$ deixa a vizinhança de uma esfera centrada em $\vec{x}^*$.

Métrica euclidiana: distância entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$||\vec{u}-\vec{v}|| = [(u_1-v_1)^2+\cdots+(u_n-v_n)^2]^{1/2}$$

Um sistema de equações diferenciais lineares autônomas possui **um** ou **infinitos** pontos de equilíbrio. Se o ponto único é assintoticamente estável, então é globalmente assintoticamente estável.

$f(\vec{x}) = \vec{0}$

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

↳ Uma solução em geral

Infinitas soluções

Ex:
$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ 2ax + 2by = 0 \end{cases}$$

$by = -ax$

$$\boxed{y = -\frac{a}{b}x}$$

para qualquer x, é possível encontrar y que garanta a solução

Exemplo: Pêndulo físico

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\tau_R$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -\dfrac{1}{I}\tau_R \end{cases}$$

Sem atrito

$$\hookrightarrow \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -A \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Ponto de eq.:

$$\begin{cases} \omega^* = 0 \\ \theta_1^* = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_2^* = \pi \end{cases}$$

$\begin{cases} \omega^* = 0 \\ \theta_1^* = 0 \end{cases}$ → ponto neutramente estável

$\begin{cases} \omega^* = 0 \\ \theta_2^* = \pi \end{cases}$ → ponto instável ?

Com atrito

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -A \operatorname{sen}\theta - \mu\omega \end{cases}$$

$\omega^* = 0, \ \theta_1^* = 0$ → assintoticamente estável

$\omega^* = 0, \ \theta_2^* = \pi$ → instável

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta + \frac{\partial}{\partial\omega} f_\omega = \underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial\theta}(\omega)}}_{0} + \frac{\partial}{\partial\omega}(\underbrace{\cancel{-A \operatorname{sen}\theta}}_{0} - \mu\omega)$$

$\nabla \cdot f = -\mu < 0$ ← DISSIPATIVO

Estabilidade no sentido de Lagrange

A solução $\vec{x}(t)$ de um sistema não-autônomo

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t)$$

apresenta **estabilidade limitada** se $\vec{x}(t)$ é uma função limitada. Formalmente, existe uma constante $C < \infty$ e $||\vec{x}(t)|| < C$ para $\forall t$.

$\Rightarrow$ Só há ponto de equilíbrio se existe um valor $\vec{x}^*$ que anula $\vec{f}(\vec{x}, t)$ para $\forall t$

Suponha agora que

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{E}(t).$$

e seja $\vec{x}^*$ ponto de equilíbrio para $\vec{E}(t) = 0$.

O sistema apresenta **estabilidade bibo** (*bounded-input, bounded-output*) se uma entrada $\vec{E}(t)$ limitada produz uma saída também limitada.

Existência e unicidade

Teorema

Considere o problema de valor inicial

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$$

com condição inicial $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$*, para* $\vec{x}_0$ *em um conjunto aberto e conexo* $D \subset \mathbb{R}^n$*. Suponha que* $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *seja* C^1*, ou seja todas as funções* f_j *e suas derivadas parciais* $\partial f_j / \partial x_i$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ *existem e são contínuas para* $\vec{x}$ *em* D*. Dadas estas condições, o sistema tem solução* $\vec{x}(t)$ ***única*** *em algum um intervalo de tempo* $(-\tau, \tau)$ *ao redor de* $t = 0$*.*

- $f \in C^1$ é condição **suficiente**, não necessária.

Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 2^{nd} ed. (2015)

M. W. Hirsch, S. Smale, R. L. Devaney. Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos. 3^a ed. (2013)

Existência e unicidade

Para que

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t)$$

tenha solução única, as funções f_j e suas derivadas $\partial f_j / \partial x_i$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ devem ser contínuas.

Contra-exemplo

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{4/5}, \quad x(0) = 0$$

$$\frac{dx}{x^{4/5}} = 3\,dt$$

$$\int_{x_0}^{x} x'^{-4/5}\,dx' = 3\int_{t_0}^{t} dt'$$

$$\left[5\,x'^{1/5}\right]_{x_0}^{x} = 3(t-t_0)$$

$$5\left[x^{1/5} - \cancel{(x(0))}^{1/5}\right] = 3(t-t_0)$$

$$x^{1/5} = \frac{3}{5}(t-t_0)$$

$$\boxed{x(t) = \left[\frac{3}{5}(t-t_0)\right]^5}$$

Contra-exemplo de existência e unicidade

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x^{4/5} \\ x(0) = 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = 3x^{4/5}$$

↳ contínua → ok!

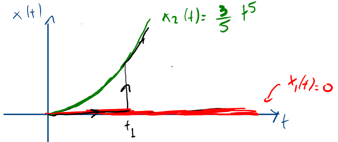
$$\frac{df}{dx} = 3\,\frac{4}{5}\,x^{-1/5} = \frac{12}{5}\,\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{df}{dx} = \lim_{x\to 0^+} \frac{12}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x}} \rightarrow \infty \,!$$

↳ não é contínua em $x=0$!

⇒ $f(x)$ não satisfaz às condições para garantir unicidade

$x(t) \equiv 0$ é solução também



$$x_3(t) = \begin{cases} \frac{3}{5}t^5, & \text{se } t > t_1 \\ 0 & \text{se } t < t_1 \end{cases}$$

também é solução!

Conseqüência de existência e unicidade

- Se $\vec{x}_1(t)$ e $\vec{x}_2(t)$ são soluções de um sistema

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$$

onde existência e unicidade estão garantidas (pelas condições acima), então se para dado t_0

$$\vec{x}_1(t_0) = \vec{x}_2(t_0)$$

então estas soluções devem ser iguais para todo t.

Caso unidimensional - exemplos

1)

$$\frac{dx}{dt} = (x-1)[e^{2x} - 3\,\text{sen}(4x)]$$

- $x(t) = 1$ é claramente uma solução $\Rightarrow$ qualquer CI $x(0) < 1$ leva a uma solução que não pode ultrapassar 1!

2)

$$\frac{dx}{dt} = (x-1)(x+3)$$

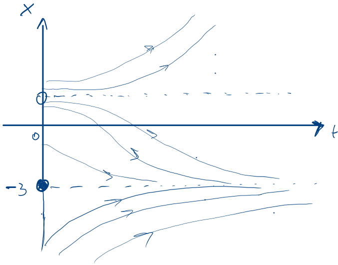
- $x_1^* = 1$ e $x_2^* = -3$
- soluções com $-3 \leqslant x(0) \leqslant 1$ devem permanecer neste intervalo.
- se $x(0) = -2$ ou $x(0) = -4$?

Caso unidimensional - exemplos

$f(2) = (2-1)(2+3) = 1 \times 5 > 0$

2) (cont.)

- se $x(0) = -2$ ou $x(0) = -4$?



$$\frac{dx}{dt} = (x-1)(x+3) = f(x)$$

$f(-2) = (-2-1)(-2+3) = (-3)(1) < 0$

$f(-4) = (-4-1)(-4+3) = (-5)(-1) > 0$

Caso unidimensional - exemplos

3) Strogatz, exemplo 2.5.2:

$$\dot{x} = 1 + x^2, \text{ com } x(0) = x_0 = 0$$

4) Strogatz, $\dot{x} = \text{sen}(x)$

Caso bidimensional

Seja um sistema bidimensional autônomo

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2)$$

Pode-se reescrevê-lo como

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = h(x_1, x_2)$$

Regra da cadeia

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_2}{dt}\frac{dt}{dx_1} = \frac{dx_2/dt}{dx_1/dt} = \frac{f_2}{f_1}$$

Derivada da função inversa é o inverso da derivada

- h tem um único valor em quaisquer x_1 e x_2, exceto para pontos de equilíbrio. (O mesmo vale para dimensões > 2).
- h representa a inclinação no da reta tangente à trajetória no espaço de fase.

$\Rightarrow$ trajetórias só se cruzam em pontos de equilíbrio.

Equação de primeira ordem separável

Uma equação é dita separável se

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) = g(x)h(t) \Rightarrow \frac{dx}{g(x)} = h(t)dt$$

Se $h(t) = 1$, a equação é autônoma e

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{g(x)} = \int_{t_0}^{t} h(t)dt = t - t_0.$$

Logo:

- $x(t) = x(t - t_0)$.
- No caso não-autônomo, $x = x(t, t_0)$.

A equação é dita **integrável** quanto é possível resolver as duas integrais acima analiticamente, obtendo-se x em função de t e t_0.

Exercícios

Monteiro cap 3:
3.1 - 3.9, **3.11** (epidemia de varíola - artigo no Moodle), 3.13

Referências

1. Luiz H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos*, 3^a ed., Editora Livraria da Física, São Paulo (2011)
2. Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 2^{nd} ed., CRC Press, Cambridge (2015)
3. Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney, *Differential equations, dinamical systems, and an introduction to chaos.*, 3^{rd} ed., Academic Press, Waltham, USA (2013)