Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli Vainstein[1]

[1]Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-1

Tipos de estabilidade

Para que conjuntos de parâmetros e CI's o sistema possui um comportamento dinâmico estável?

$$\text{Estabilidade} \begin{cases} \text{sist. de eqs.} \longrightarrow & \text{equações isomórficas com} \\ & \text{parâmetros próximos} \\ \text{soluções} \longrightarrow & \text{condições iniciais vizinhas} \end{cases}$$

Estabilidade de um ponto de equilíbrio (no sentido de Lyapunov)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$$

Ponto de equilíbrio: $\vec{x}^*$ tal que $\vec{f}(\vec{x}^*) = \vec{0}$

Ponto ordinário ou regular: qualquer ponto <u>não</u> de equilíbrio

- Se $\vec{x}(0) = \vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, o sistema aí permanece.
- Se após uma pequena perturbação em $\vec{x}(0)$, o sistema voltar a $\vec{x}^*$, diz-se que ele é **assintoticamente** estável

$$\vec{x}(t) \to \vec{x}^*, \text{ para } t \to \infty$$

- Se o raio dentro do qual as trajetórias são atraídas é finito, diz-se que $\vec{x}^*$ é **localmente** estável; caso contrário, é **globalmente** estável.

$\Rightarrow$ Em ambos os casos, trata-se de um <u>atrator</u>.

Definições

Bacia de atração: conjunto de condições iniciais (CI's) que levam ao atrator.

Ponto neutramente estável: para $\vec{x}(0)$ dentro de uma esfera centrada em $\vec{x}^*$, $\vec{x}(t)$ permanece dentro de outra esfera centrada em $\vec{x}^*$, sem ir para $\vec{x}^*$.

Ponto instável: $\vec{x}(t)$ deixa a vizinhança de uma esfera centrada em $\vec{x}^*$.

Métrica euclidiana: distância entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$||\vec{u} - \vec{v}|| = [(u_1 - v_1)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2]^{1/2}$$

Um sistema de equações diferenciais <u>lineares autônomas</u> possui **um** ou **infinitos** pontos de equilíbrio. Se o ponto único é assintoticamente estável, então é globalmente assintoticamente estável.

$f(\vec{x}) = \vec{0}$

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

↳ Uma solução em geral

Infinitas soluções

Ex: $\begin{cases} ax + by = 0 \\ 2ax + 2by = 0 \end{cases}$

$by = -ax$

$\boxed{y = -\frac{a}{b} x}$

para qualquer x, é possível encontrar y que garanta a solução

Exemplo: Pêndulo físico

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\tau_R$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -\dfrac{1}{I}\tau_R \end{cases}$$

Sem atrito

$$\hookrightarrow \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -A\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Ponto de eq:

$$\begin{cases} \omega^* = 0 \\ \theta_1^* = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_2^* = \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega^* = 0 \\ \theta_1^* = 0 \end{cases} \rightarrow \text{ponto neutramente estável}$$

$$\begin{cases} \omega^* = 0 \\ \theta_2^* = \pi \end{cases} \rightarrow \text{ponto instável} \; ?$$

Com atrito

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -A\,\mathrm{sen}\,\theta - \mu\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega^* = 0 \;,\; \theta_1^* = 0 \rightarrow \text{assintoticamente estável} \\ \omega^* = 0 \;,\; \theta_2^* = \pi \rightarrow \text{instável} \end{cases}$$

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta + \frac{\partial}{\partial\omega} f_\omega = \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial\theta}(\omega)} + \frac{\partial}{\partial\omega}\left(-\cancelto{0}{A\,\mathrm{sen}\,\theta} - \mu\omega\right)$$

$$\nabla \cdot f = -\mu < 0 \leftarrow \text{DISSIPATIVO}$$

Estabilidade no sentido de Lagrange

A solução $\vec{x}(t)$ de um sistema não-autônomo

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t)$$

apresenta **estabilidade limitada** se $\vec{x}(t)$ é uma função limitada. Formalmente, existe uma constante $C < \infty$ e $||\vec{x}(t)|| < C$ para $\forall t$.

$\Rightarrow$ Só há ponto de equilíbrio se existe um valor $\vec{x}^*$ que anula $\vec{f}(\vec{x}, t)$ para $\forall t$

Suponha agora que

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{E}(t).$$

e seja $\vec{x}^*$ ponto de equilíbrio para $\vec{E}(t) = 0$.

O sistema apresenta **estabilidade bibo** (*bounded-input, bounded-output*) se uma entrada $\vec{E}(t)$ limitada produz uma saída também limitada.

Existência e unicidade

Para que

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t)$$

tenha solução única, as funções f_j e suas derivadas $\partial f_j / \partial x_i$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ devem ser contínuas.

Contra-exemplo

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{4/5}, \quad x(0) = 0$$

$$\frac{dx}{x^{4/5}} = 3\,dt$$

$$\int_{x_0}^{x} x'^{-4/5}\,dx' = 3\int_{t_0}^{t} dt'$$

$$\left[5x'^{1/5}\right]_{x_0}^{x} = 3(t - t_0)$$

$$5\left[x^{1/5} - \cancel{(x(0))}^{\,0\,1/5}\right] = 3(t - t_0)$$

$$x^{1/5} = \frac{3}{5}(t - t_0)$$

$$\boxed{x(t) = \left[\frac{3}{5}(t - t_0)\right]^5}$$

Contra-exemplo de existência e unicidade

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3\,x^{4/5} \\ x(0) = 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = 3x^{4/5}$$

↳ contínua → ok!

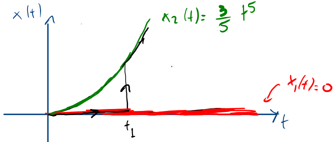
$$\frac{df}{dx} = 3\,\frac{4}{5}\,x^{-1/5} = \frac{12}{5}\,\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{df}{dx} = \lim_{x\to 0^+} \frac{12}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x}} \rightarrow \infty \,!$$

↳ não é contínua em $x = 0$!

⇒ $f(x)$ não satisfaz às condições para garantir unicidade

$x(t) \equiv 0$ é solução também



$$x_3(t) = \begin{cases} \dfrac{3}{5}\,t^5, & \text{se } t > t_1 \\ 0 & \text{se } t < t_1 \end{cases}$$

↑ também é solução!

Conseqüência de existência e unicidade

- Se $\vec{x}_1(t)$ e $\vec{x}_2(t)$ são soluções de um sistema

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$$

onde existência e unicidade estão garantidas (pelas condições acima), então se para dado t_0

$$\vec{x}_1(t_0) = \vec{x}_2(t_0)$$

então estas soluções devem ser iguais para todo t.

Caso unidimensional - exemplos

1)

$$\frac{dx}{dt} = (x-1)[e^{2x} - 3\,\text{sen}(4x)]$$

- $x(t) = 1$ é claramente uma solução $\Rightarrow$ qualquer CI $x(0) < 1$ leva a uma solução que não pode ultrapassar 1!

2)

$$\frac{dx}{dt} = (x-1)(x+3)$$

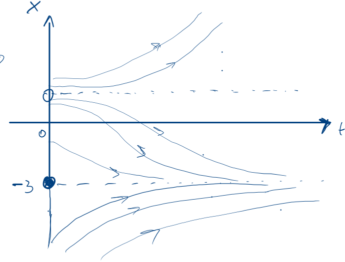
- $x_1^* = 1$ e $x_2^* = -3$
- soluções com $-3 \leqslant x(0) \leqslant 1$ devem permanecer neste intervalo.

Caso unidimensional - exemplos

$f(2) = (2-1)(2+3) = 1 \times 5 > 0$

2) (cont.)

- se $x(0) = -2$ ou $x(0) = -4$?



$$\frac{dx}{dt} = (x-1)(x+3) = f(x)$$

$$f(-2) = (-2-1)(-2+3) = (-3)(1) < 0$$

$$f(-4) = (-4-1)(-4+3) = (-5)(-1) > 0$$

Caso bidimensional

Regra da cadeia

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_2}{dt}\frac{dt}{dx_1} = \frac{dx_2/dt}{dx_1/dt} = \frac{f_2}{f_1}$$

Derivada da função inversa é o inverso da derivada

Seja um sistema bidimensional autônomo

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2)$$

Pode-se reescrevê-lo como

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = h(x_1, x_2)$$

- h tem um único valor em quaisquer x_1 e x_2, exceto para pontos de equilíbrio. (O mesmo vale para dimensões > 2).
- h representa a inclinação no da reta tangente à trajetória no espaço de fase.

$\Rightarrow$ trajetórias só se cruzam em pontos de equilíbrio.

Equação de primeira ordem separável

Uma equação é dita separável se

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) = g(x)h(t) \Rightarrow \frac{dx}{g(x)} = h(t)dt$$

Se $h(t) = 1$, a equação é autônoma e

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{g(x)} = \int_{t_0}^{t} h(t)dt = t - t_0.$$

Logo:

- $x(t) = x(t - t_0)$.
- No caso não-autônomo, $x = x(t, t_0)$.

A equação é dita **integrável** quanto é possível resolver as duas integrais acima analiticamente, obtendo-se x em função de t e t_0.

Exercícios

Monteiro cap 3:
3.1 - 3.9, **3.11** (epidemia de varíola - artigo no Moodle), 3.13