Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein[1]

[1] Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-2

1. **Classificação de sistemas dinâmicos**

2. **Sistemas de tempo contínuo**
   - Introdução
   - Técnicas de análise
   - Espaço de fases

1. **Classificação de sistemas dinâmicos**

2. **Sistemas de tempo contínuo**
   - Introdução
   - Técnicas de análise
   - Espaço de fases

Definições

Sistema dinâmico: Conjunto de objetos agrupados por interação ou interdependência, com relações de causa-efeito entre os elementos. Algumas grandezas caracterísiticas variam no tempo.

Ex.: circuitos elétricos, Júpiter e suas luas, o sistema nervoso, ...

Por que estudá-los se resultados teóricos, experimentais e simulacionais não necessariamente coincidem?

1. Para fins de projeto
2. Para entender algo existente
3. Porque o teste experimental é perigoso/custoso
4. Porque é interessante!

Objetivo: Prever o futuro de um modo científico.

Adequação do modelo

Exemplo: O que é mais adequado para modelar um homem?

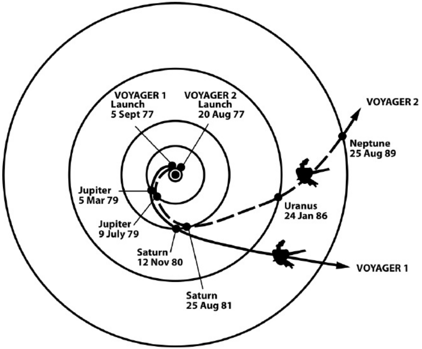
a) foto b) manequim c) macaco

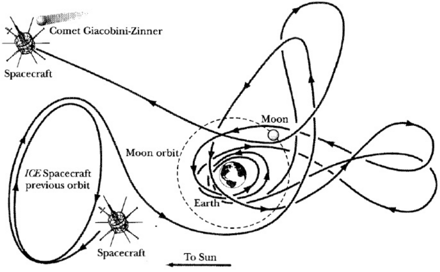
Adequação do modelo

Exemplo: O que é mais adequado para modelar um homem?

a) foto	b) manequim	c) macaco
↓	↓	↓
pintor	alfaiate	biólogo

Gravitação de Newton



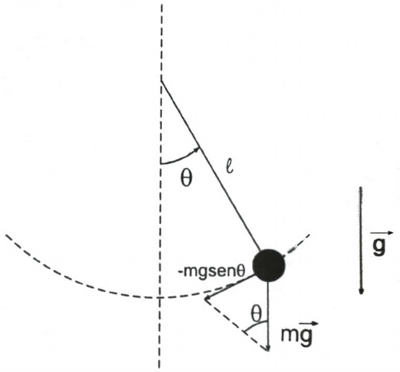


Voyager_ Path.jpg: created by NASA; derivative work: Rehua, Public domain, via Wikimedia Commons

Thornton, W.E. e Marion, R.C., “Classical dynamics of particles and systems”, 5^a ed, p.311

Parâmetro vs. variável

Sistema paradigmático: o pêndulo



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\mathrm{sen}(\theta)$$

$t \rightarrow$ variável independente

$\theta \rightarrow$ variável dependente

g e $l \rightarrow$ parâmetros

Classificação dos sistemas dinâmicos

Variável temporal $\rightarrow$ contínuo ou discreto

$$\text{discreto} \begin{cases} x(t+1) - 2x(t) = 0 & \text{linear, } 1^a \text{ ordem} \\ x(t+3)x(t) - 3x(t-2) & \text{não-linear, } 5^a \text{ ordem} \end{cases}$$

$$\text{contínuo} \begin{cases} \frac{dx}{dt} - 4x(t) = 0 & \text{linear, } 1^a \text{ ordem} \\ \frac{d^3x}{dt^3} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - x^3 = 0 & \text{não-linear, } 3^a \text{ ordem} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Ordem define o tamanho do vetor de condições iniciais.

Modelos lineares

Tempo discreto

$$a_n(t)x(t+n) + a_{n-1}x(t+n-1) + \cdots + a_1(t)x(t+1) + a_0(t)x(t) = F(t)$$

Tempo contínuo

$$a_n(t)\frac{d^n x(t)}{dt^n} + \cdots + a_1(t)\frac{dx(t)}{dt} + a_0(t)x(t) = F(t)$$

1. Princípio de aditividade

$$F_1(t) + F_2(t) \to x_1(t) + x_2(t)$$

2. Proporcionalidade entre excitação e resposta

$$kF(t) \to kx(t)$$

$\Rightarrow$ Princípio de superposição:

$$k_1F_1(t) + k_2F_2(t) \to k_1x_1(t) + k_2x_2(t)$$

Tipos de sistemas

- Parâmetros fixos ou dependentes do tempo
- Variáveis concentradas (EDO) ou distribuídas (EDP)
- Instantâneo ou dinâmico (com memória)

1º Partícula Browniana

Busquem vídeos

Exemplos de memória

- Tensão em um capacitor

$$m\frac{dv}{dt} = \underbrace{-\gamma v}_{\text{força dissipativa}} + \underbrace{\xi(t)}_{\text{aleatória}}$$

$$V(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt$$

- Equação de Langevin generalizada (origem na hidrodinâmica)

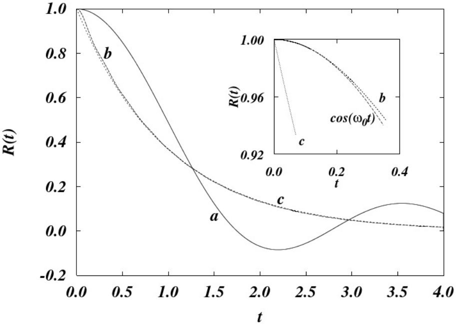
$$m\frac{dv(t)}{dt} + \int_{-\infty}^{\cancel{\infty}\,t} \alpha(t-t')v(t')dt' = F_{rand}(t)$$

Equação de Langevin generalizada

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\int_0^t R(t-t')\Pi(t')\,dt'$$

$$\Pi(t) = \int \rho(\omega)\cos(\omega t)\,d\omega$$

$$\rho(\omega) = \begin{cases} \frac{2\gamma}{\pi}\left(\frac{\omega}{\omega_D}\right)^{\beta}, \omega < \omega_D \\ 0 \end{cases}$$

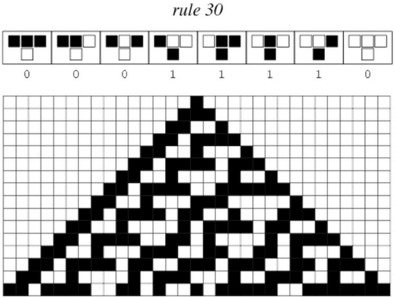


Vainstein, M. H. *et al.* Europhys. Lett., 73, 726 (2006)

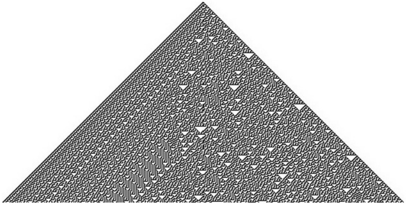
Classificação de sistemas dinâmicos sem memória

TIPO	TEMPO	VARIÁVEIS	EXTENSÃO ESPACIAL
E.D.O.	contínuo	contínuas	local (1 ponto)
Mapas (aplicações)	discreto	contínuas	local (1 ponto)
E.D.P.	contínuo	contínuas	contínuo
Redes de E.D.O.	contínuo	contínuas	discreto
Redes de mapas (aplicações acopladas)	~~contínuo~~ discreto	contínuas	discreto
Autômatos celulares	discreto	discretas	discreto

Exemplo de Autômato celular: Regra 30



Após 250 iterações:



Weisstein, Eric W. "Rule 30."From MathWorld–A Wolfram Web Resource.

http://mathworld.wolfram.com/Rule30.html

1. Classificação de sistemas dinâmicos

2. **Sistemas de tempo contínuo**
   - Introdução
   - Técnicas de análise
   - Espaço de fases

Introdução

$$\text{Soluções para EDO} \begin{cases} \text{analíticas} & \rightarrow \text{não existe sempre} \\ \text{numéricas} & \rightarrow \text{recalcular para cada C.I.} \end{cases}$$

Aprenderemos a teoria para a realização de um estudo qualitativo das soluções, i.e., que famílias de soluções podem ser associadas a valores de parâmetros e/ou das C. I.

- Técnicas para solução de eq. dif. com ênfase na abordagem qualitativa
- Definições: sistemas autônomos/não-autônomos, conservativos/não-conservativos, pontos de equilíbrio, estabilidade

Forma geral para equações lineares

$$a_n(t)\frac{d^n x(t)}{dt^n} + \cdots + a_1(t)\frac{dx(t)}{dt} + a_0(t)x(t) = F(t)$$

Se $F(t) = 0$, a equação é dita *homogênea*, caso contrário é chamada de *não-homogênea*

Não há um método analítico geral para se obter a solução explícita desa equação para quaisquer coeficientes $a_j(t)$ e entrada $F(t)$.

O que se sabe resolver de modo geral? Apenas equação linear de 1^a ordem!

Eq. dif. de 1^a ordem: fator integrante

$$a_1(t)\frac{dx(t)}{dt} + a_0(t)x(t) - F(t) = 0$$

Exercício 3.2

Exercício 3.15

(Transf. de Laplace)

Se $a_1(t) \neq 0$, para qualquer t, então

$$\frac{dx(t)}{dt} + p(t)x(t) - q(t) = 0,$$

onde

$$p(t) \equiv \frac{a_0(t)}{a_1(t)} \quad \text{e} \quad q(t) \equiv \frac{F(t)}{a_1(t)}$$

Eq. dif. de 1^a ordem: fator integrante

A solução analítica é então dada por

$$x(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int_{t_0}^{t} \left[\mu(t')q(t')dt' + C \right],$$

onde C é uma constante determinada pela condição inicial e

$$\mu(t) = \exp\left(\int p(t')dt' \right)$$

é o fator integrante.

$\Rightarrow$ a solução pode ser impossível de integrar analiticamente

Boyce, W.E. e Di Prima, R.C., "Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno", 5^a ed, p.13

Monteiro, L.H.A., "Sistemas dinâmicos", 3^a ed, p. 77-78, exercício 3.2

Eq. dif. de 2^a ordem

$$a_2(t)\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1(t)\frac{dx(t)}{dt} + a_0(t)x(t) - F(t) = 0$$

Não há método geral!

- Solução geral apenas se todos a_j são constantes
- Podem-se tentar soluções em série de potências

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j$$

Eq. dif. de 2^a ordem

Equação de Bessel (órbitas planetárias: simetria cilíndrica)

$$t^2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + t\frac{dx(t)}{dt} + (t^2 - b^2)x(t) = 0, \quad b = \text{constante}$$

Equação de Legendre (gravitação: simetria esférica)

$$(1 - t^2)\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 2t\frac{dx(t)}{dt} + l(l+1)x(t) = 0, \quad l = \text{constante}$$

Equação de Euler

$$t^2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + at\frac{dx(t)}{dt} + bx(t) = 0, \quad a, b = \text{constantes}$$

Equação de Euler

$$t^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + at\frac{dx(t)}{dt} + bx(t) = 0, \quad a, b = \text{constantes}$$

Solução: $x(t) = t^\beta$, onde β é raiz do polinômio

$$\beta^2 + (a-1)\beta + b = 0$$

Técnicas de análise

Escrever a equação de ordem n como um sistema de n equações de 1^a ordem.
Ex. Reescrever

$$a_2(t)\frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = F(t)$$

como

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &\equiv x_2(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{F(t)}{a_2(t)} - \frac{a_1(t)}{a_2(t)}x_2 - \frac{a_0(t)}{a_2(t)}x_1
\end{aligned}$$

Técnicas de análise

Em forma vetorial, temos

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \overleftrightarrow{\mathsf{A}}(t)\vec{x}(t) + \vec{E}(t)$$

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \overleftrightarrow{\mathsf{A}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0/a_2 & -a_1/a_2 \end{bmatrix}, \vec{E}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ F/a_2 \end{bmatrix}$$

Técnicas de análise

- *Estado* do sistema em um instante t é especificado pelos valores das variáveis de estado $x_j(t)$ no instante
- Notação simplificada
- Computacionalmente mais fácil lidar com sistema de equações de 1^a ordem
- Conceito de espaço de fases $\Rightarrow$ técnica qualitativa

1. Técnica analítica
2. Técnica numérica
3. Técnica qualitativa (comportamento assintótico)

Espaço de fases

Espaço n-dimensional, cujos eixos coordenados são $x_1, x_2, \dots, x_n$. Um estado é representado como um ponto com coordenadas $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$. Este ponto se movimenta com o passar do tempo de acordo com

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)
\end{aligned}
$$

Espaço de fases

Na notação vetorial

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x},t),$$

com $f_j : B \times R_+ \to A(j = 1,2,\ldots,n)$, sendo $B \subseteq R^n, A \subseteq R$.

1. As funções f_j definem o campo de velocidades desse sistema.
2. *Retrato de fases* é o nome dado ao conjunto de curvas obtidas pela evolução temporal do sistema a partir de todas as condições iniciais para as quais as f_j são definidas.

Exemplo 1

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_1}{dt}\right) = -x_1$$

$$\boxed{\frac{d^2x_1}{dt^2} = -x_1}$$

seno ou cosseno

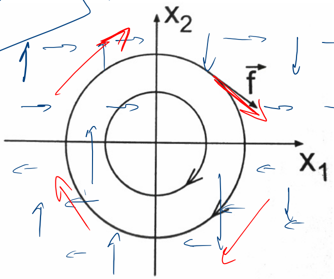
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} & = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = -x_1 \end{cases}$$

$$\frac{dx_1/dt}{dx_2/dt} = \frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{x_2}{x_1}$$

$$-x_1 dx_1 = x_2 dx_2$$

$$\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} = C$$

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{dx_1}{dt}\,\frac{dt}{dx_2} = \frac{dx_1/dt}{dx_2/dt}$$



Exemplo 2: Pêndulo simples

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\mathrm{sen}(\theta), \text{ se } \theta \ll 1, \mathrm{sen}(\theta) \approx \theta$$

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} & = \phi \\ \frac{d\phi}{dt} & = -\frac{g}{l}\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$$

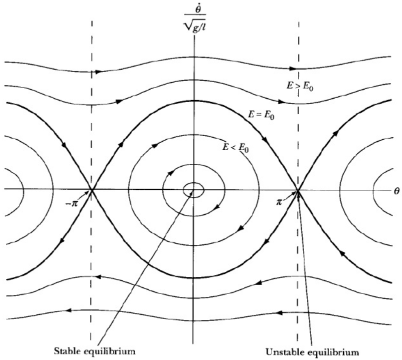
$$\frac{\frac{d\theta}{dt}}{\frac{d\phi}{dt}} = \frac{\phi}{-\frac{g}{l}\mathrm{sen}(\theta)} \Rightarrow \frac{d\theta}{d\phi} = -\frac{g\phi}{l\mathrm{sen}(\theta)}$$

Exemplo 2: Pêndulo simples

$$\text{sen}(\theta)d\theta = -\frac{l}{g}\phi d\phi$$

$$-\int \text{sen}(\theta)d\theta = \int lg\phi d\phi$$

$$\cos(\theta) = \frac{l\phi^2}{2g} + C$$



$$\phi = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{C + \cos(\theta)}$$

Thornton, W.E. e Marion, R.C., "Classical dynamics of particles and systems", 5^a ed, p.159

Sistemas autônomos e não-autônomos

- Sistema autônomo: sistema a parâmetros constantes cujas funções de entrada independem explicitamente do tempo (a_j **e** F constantes) $\Rightarrow \vec{x} = \vec{x}(t - t_0)$
- Sistema não-autônomo $\Rightarrow \vec{x} = \vec{x}(t, t_0)$
- Sistema não-autônomo pode ser escrito como autônomo, tomando $x_{n+1} = t$ e $dx_{n+1}/dt = 1$.

<u>Sistema autônomo linear:</u>

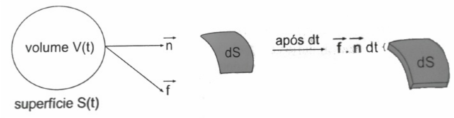
$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_0 x = 0$$

Sistemas conservativos e dissipativos

- Conservativo: conserva o “volume” no espaço de fases
- Dissipativo: o “volume” no espaço de fases se contrai com o tempo.

Seja o sistema autônomo

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t),$$



Em um tempo infinitesimal dt, um elemento de área dS “cria” um volume $(\vec{n} \cdot \vec{f} dt) dS$

Sistemas conservativos e dissipativos

$V(t+dt) = V(t) + \left(\frac{dV}{dt}\right)dt + \cdots +$

$= dV$

$$V(t+dt) = V(t) + \int_S (\vec{n}\cdot\vec{f}dt)dS$$

$$\frac{V(t+dt)-V(t)}{dt} = \int_S \vec{n}\cdot\vec{f}dS$$

$$\frac{dV}{dt} = \underbrace{\int_S \vec{n}\cdot\vec{f}dS = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{f}dV}_{\text{Teorema da divergência}}$$

Se o sistema é conservativo, $\frac{dV}{dt} = 0$, o que é sempre verdade se $\vec{\nabla}\cdot\vec{f} = 0$.

Sistemas conservativos e dissipativos

Divergente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

Se

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} < 0 & \rightarrow \quad \text{dissipativo} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{f} > 0 & \rightarrow \quad \text{expansivo} \end{cases}$$

Exercícios

Classifique os sistemas abaixo quanto a serem conservativos ou não

1. Sistema massa-mola: $\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$
2. Pêndulo com atrito: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\mathrm{sen}(\theta) - \mu\frac{d\theta}{dt}$
3. Sistema de Lorenz:

$$\frac{dX}{dt} = \sigma(Y - X)$$
$$\frac{dY}{dt} = X(r - Z) - Y$$
$$\frac{dZ}{dt} = XY - \beta Z$$

Estabilidade

Pergunta: Para que valores de parâmetros e C.I.s um sistema exibe um comportamento dinâmico estável ou instável?

Ex.: Avião: Equações da hidrodinâmica (não-lineares). Para que conjuntos de valores das condições iniciais e dos parâmetros a aeronave permanece em vôo?

- Estabilidade de uma solução estacionária
- Estabilidade Orbital: estabilidade uma solução periódica
- Estabilidade estrutural de uma equação diferencial: preservação ou não da topologia do espaço de fases
  - Bifurcações $\Rightarrow$ mudança da topologia do espaço de fases
  - Quão robusto é o retrato de fase sob uma perturbação do campo vetorial completo? (realizada através de uma perturbação da equação diferencial)