

Introdução aos sistemas dinâmicos

Mendeli H. Vainstein¹

¹Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2020-2

1 Rápida introdução histórica

2 Exemplo de sistemas caóticos

- O sistema de Lorenz
- Pêndulo magnético caótico

1 Rápida introdução histórica

2 Exemplo de sistemas caóticos

- O sistema de Lorenz
- Pêndulo magnético caótico

Kepler \Rightarrow Galileo \Rightarrow Newton

- 3 leis de Newton;
- Lei da Gravitação Universal;
- Mesma física nos mundos sub- e supralunares.

Laplace em “Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades” (1812):

Se alguma “inteligência” pudesse conhecer a posição \vec{x} e a velocidade \vec{v} de cada partícula do Universo num dado instante t , assim como a massa e a força que age sobre cada uma dessas partículas, então essa “inteligência” poderia prever o futuro do Universo para o resto do tempo.

Sistemas determinísticos são simples?

Maxwell (1873): determinismo implica que uma mesma causa provoca sempre um mesmo efeito; o que não significa que causas similares provoquem efeitos similares.

Estabilidade do sistema solar

Laplace \Rightarrow Lagrange \Rightarrow Poisson

S. C. Haret (1878): mostrou que uma aproximação em terceira ordem com relação às massas, aparecem termos seculares* nas soluções.

\Rightarrow Possível instabilidade nas órbitas (mudança de forma)

Lyapunov (1892): definição de instabilidade para a solução de uma equação diferencial ordinária

- Desvincula estudo de estabilidade do estudo do sistema solar.

** Termos seculares: termos cujos valores crescem com o tempo.*

Dois é fácil, três é impossível

Poincaré (1889): ganha prêmio para prova sobre estabilidade (ou não) do sistema solar.

- Propriedades qualitativas da solução sem sua determinação explícita.
- Problema de 3 corpos: $M_1 \approx M_2 \gg m \Rightarrow$ insolúvel
- Provavelmente o primeiro a vislumbrar caos no problema de 3 corpos

Poincaré (1903):

“...pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam grandes diferenças no fenômeno final. Um pequeno erro na entrada produzirá um erro enorme na saída. Previsão torna-se impossível...”

Teorema KAM

A. N. Kolmogorov, V. I. Arnold, J. Moser. (\approx 1960)

A partir de certas condições iniciais as séries realmente divergem; mas, a partir de outras condições iniciais, elas convergem.

- Em um sistema com 3 ou mais corpos: movimento regular ou caótico

News and Views

Nature **459**, 781-782 (11 June 2009) | doi:10.1038/459781a; Published online 10 June 2009

Planetary science: The Solar System's extended shelf life

Gregory Laughlin¹

Simulations show that orbital chaos can lead to collisions between Earth and the inner planets. But Einstein's tweaks to Newton's theory of gravity render these ruinous outcomes unlikely in the next few billion years. ↖ Top

In the midst of a seemingly endless torrent of baleful economic and environmental news, a dispatch from the field of celestial dynamics manages to sound a note of definite cheer. On [page 817](#) of this issue, Laskar and Gastineau¹ report the outcome of a huge array of computer simulations. Their work shows that the orbits of the terrestrial planets — Mercury, Venus, Earth and Mars — have a roughly **99% chance** of maintaining their current, well-ordered clockwork for the roughly 5 billion years that remain before the Sun evolves into a red giant and engulfs the inner Solar System.

Letter

Nature **459**, 817–819 (11 June 2009) | doi:10.1038/nature08096; Received 17 February 2009; Accepted 22 April 2009

Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth

J. Laskar¹ & M. Gastineau¹

¹ Astronomie et Systèmes Dynamiques, IMCCE-CNRS UMR8028, Observatoire de Paris, UPMC, 77 Avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France

Correspondence to: J. Laskar¹ Correspondence and requests for materials should be addressed to J.L.L. (Email: laskar@imcce.fr).

It has been established that, owing to the proximity of a resonance with Jupiter, Mercury's eccentricity can be pumped to values large enough to allow collision with Venus within 5 Gyr (refs 1–3). This conclusion, however, was established either with averaged equations^{1,2} that are not appropriate near the collisions or with non-relativistic models in which the resonance effect is greatly enhanced by a decrease of the perihelion velocity of Mercury^{2,3}. In these previous studies, the Earth's orbit was essentially unaffected. Here we report numerical simulations of the evolution of the Solar System over 5 Gyr, including contributions from the Moon and general relativity. In a set of 2,501 orbits with initial conditions that are in agreement with our present knowledge of the parameters of the Solar System, we found, as in previous studies², that one per cent of the solutions lead to a large increase in Mercury's eccentricity—an increase large enough to allow collisions with Venus or the Sun. More surprisingly, in one of these high-eccentricity solutions, a subsequent decrease in Mercury's eccentricity induces a transfer of angular momentum from the giant planets that destabilizes all the terrestrial planets ~3.34 Gyr from now, with possible collisions of Mercury, Mars or Venus with the Earth.

More than six hundred new families of Newtonian periodic planar collisionless three-body orbits

XiaoMing Li¹, and ShiJun Liao^{1,2*}

¹*School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China;*

²*MoE Key Laboratory in Scientific and Engineering Computing, Shanghai 200240, China*

Received July 4, 2017; accepted July 11, 2017; published online September 11, 2017

The famous three-body problem can be traced back to Isaac Newton in the 1680s. In the 300 years since this “three-body problem” was first recognized, only three families of periodic solutions had been found, until 2013 when Šuvakov and Dmitrašinović [Phys. Rev. Lett. **110**, 114301 (2013)] made a breakthrough to numerically find 13 new distinct periodic orbits, which belong to 11 new families of Newtonian planar three-body problem with equal mass and zero angular momentum. In this paper, we numerically obtain 695 families of Newtonian periodic planar collisionless orbits of three-body system with equal mass and zero angular momentum in case of initial conditions with isosceles collinear configuration, including the well-known figure-eight family found by Moore in 1993, the 11 families found by Šuvakov and Dmitrašinović in 2013, and more than 600 new families that have never been reported, to the best of our knowledge. With the definition of the average period $\bar{T} = T/L_A$, where L_A is the length of the so-called “free group element”, these 695 families suggest that there should exist the quasi Kepler’s third law $\bar{T}^* \approx 2.433 \pm 0.075$ for the considered case, where $\bar{T}^* = \bar{T}|E|^{3/2}$ is the scale-invariant average period and E is its total kinetic and potential energy, respectively. The movies of these 695 periodic orbits in the real space and the corresponding close curves on the “shape sphere” can be found via the website: <http://numericaltank.sjtu.edu.cn/three-body/three-body.htm>.

three-body problem, periodic orbits, clean numerical simulation (CNS)

Estabilidade de órbitas nos dias de hoje

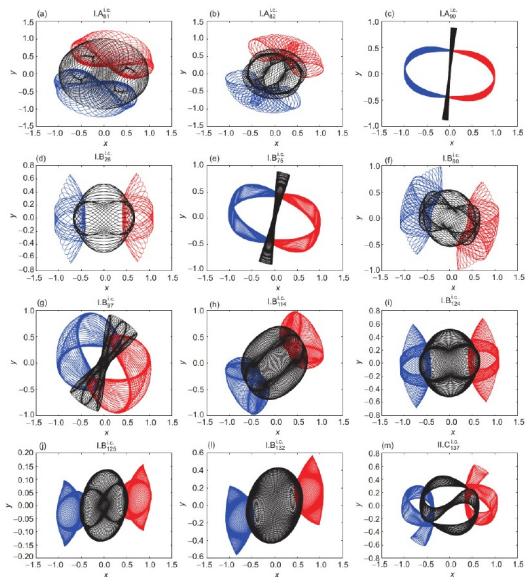


Figure 1 (Color online) Periodic orbits of the three-body system in the case of the isosceles collinear configurations: $\mathbf{r}_1(0) = (-1, 0) = -\mathbf{r}_2(0)$, $\dot{\mathbf{r}}_1(0) = (v_1, v_2) = \dot{\mathbf{r}}_2(0)$ and $\mathbf{r}_3(0) = (0, 0)$, $\dot{\mathbf{r}}_3(0) = (-2v_1, -2v_2)$, where $G = 1$ and $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. Blue line, orbit of Body-1; red line, orbit of Body-2; black line, orbit of Body-3.

1 Rápida introdução histórica

2 Exemplo de sistemas caóticos

- O sistema de Lorenz
- Pêndulo magnético caótico

O sistema de Lorenz

- Modelo baseado em meteorologia
- Equação de Navier-Stokes (não-linear), equação de condução do calor e equação de conservação da massa

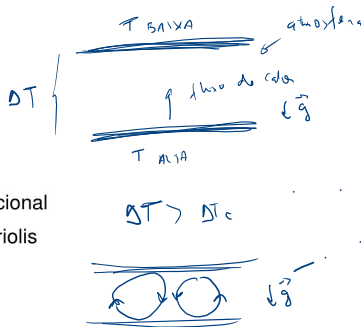
$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = \vec{F} + \vec{F}_c - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

- T : temperatura
- μ : viscosidade
- κ : condutibilidade térmica
- $\rho(T)$: densidade

- \vec{v} : velocidade
- \vec{F} : força gravitacional
- \vec{F}_c : força de Coriolis
- p : pressão



O sistema de Lorenz

- Inicialmente 12 equações, simplificadas para 3 (ver livro texto)

O sistema de equações de Lorenz é um modelo simplificado para descrever rolos de convecção que ocorrem na atmosfera. É uma simplificação de um modelo para o fluxo de um fluido em duas dimensões com altura constante, sujeito a um gradiente de temperaturas e à ação da gravidade, com difusividade térmica e viscosidade cinética. As equações de Lorenz formam um sistema de equações diferenciais não-lineares, que não possui solução analítica e exibe comportamento caótico.

O sistema de Lorenz (1961)

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= \sigma(Y - X) \\ \frac{dY}{dt} &= X(r - Z) - Y \\ \frac{dZ}{dt} &= XY - \beta Z,\end{aligned}$$

onde $X(t)$ é proporcional à intensidade convectiva ($X > 0$: circulação horária; $X < 0$, circulação anti-horária e $X = 0$ transporte de calor por condução), $Y(t) \propto \Delta T$ entre correntes ascendentes e descendentes, $Z(t)$ é proporcional à distorção do perfil vertical de temperatura em relação ao perfil linear.

O sistema de Lorenz

$$\frac{dX}{dt} = \sigma(Y - X)$$

$$\frac{dY}{dt} = X(r - Z) - Y$$

$$\frac{dZ}{dt} = XY - \beta Z,$$

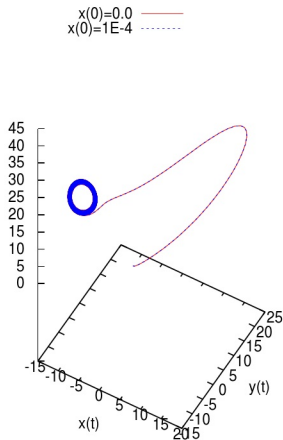
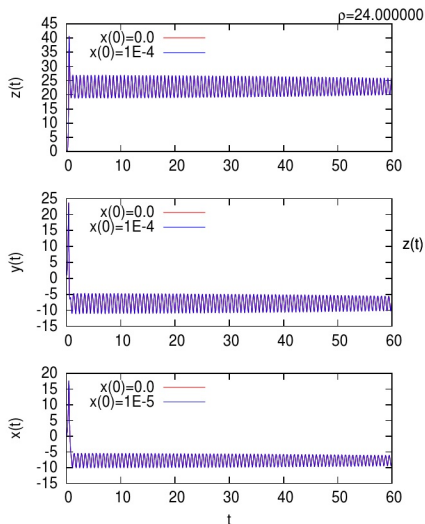
onde

- $\sigma = \mu/\kappa$ é o número de Prandtl
- $r = R/R_c$ é o número de Rayleigh, proporcional a ΔT (ver livro texto)
- β é um fator geométrico.

<http://mathworld.wolfram.com/LorenzAttractor.html>

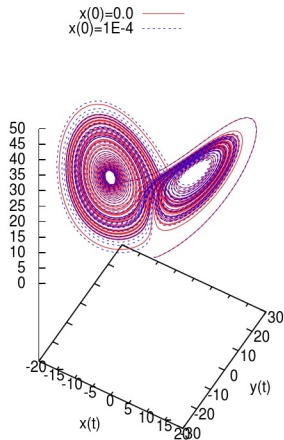
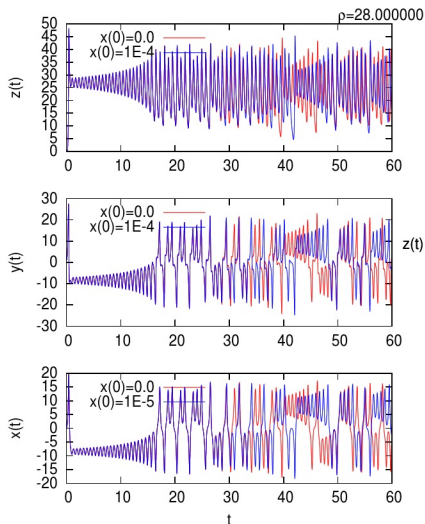
O sistema de Lorenz ($r = 24$)

$\sigma = 10.0$, $\beta = 8/3$, $Y(0) = 1.0$ e $Z(0) = 0.0$



O sistema de Lorenz ($r = 28$)

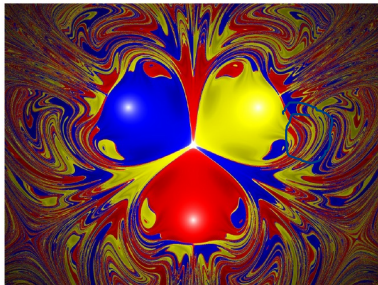
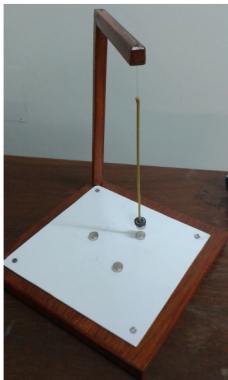
$\sigma = 10.0$, $\beta = 8/3$, $Y(0) = 1.0$ e $Z(0) = 0.0$



Pêndulo magnético caótico (ROMP)

Equações para versão simplificada (2D):

$$\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2} = - \sum_{\text{magnets}} \frac{\vec{r}}{(h^2 + \vec{r} \cdot \vec{r})^{3/2}} - g \vec{x} - \mu \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}, \quad \vec{r} \equiv \vec{x} - \vec{x}_{\text{magnet}}$$



<http://bugman123.com/Fractals/index.html>

<http://www.codeproject.com/Articles/16166/The-magnetic-pendulum-fractal#idOverview>