

*Sílvio R. Dahmen*  
*Marcia Russman Gallas*

# **Física E**

Florianópolis, 2009





## **Universidade Federal de Santa Catarina Consórcio RediSul**

Campus Universitário – Trindade

Caixa Postal 476 – CEP 88040-200 – Florianópolis – SC

<http://www.ead.ufsc.br> – [licenciatura@ead.ufsc.br](mailto:licenciatura@ead.ufsc.br)

**Reitor** Alvaro Toubes Prata

**Vice-Reitor** Carlos Alberto Justo da Silva

**Secretário de Educação à Distância** Cícero Barbosa

**Pró-Reitor de Ensino de Graduação** Yara Maria Rauh Muller

**Departamento de Educação a Distância** Araci Hack Catapan

**Pró-Reitora de Pesquisa e Extensão** Débora Peres Menezes

**Pró-Reitor de Pós-Graduação** José Roberto O’Shea

**Pró-Reitor de Desenvolvimento Humano e Social** Luiz Henrique V. Silva

**Pró-Reitor de Infra-Estrutura** João Batista Furtuoso

**Pró-Reitor de Assuntos Estudantis** Cláudio José Amante

**Centro de Ciências da Educação** Carlos Alberto Marques

**Centro de Ciências Físicas e Matemáticas** Méricles Thadeu Moretti

**Centro de Filosofia e Ciências Humanas** Maria Juracy Filgueira

### **Instituições Consorciadas**

**UDESC** Universidade do Estado de Santa Catarina

**UEM** Universidade Estadual de Maringá

**UFRGS** Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**UFSC** Universidade Federal de Santa Catarina

**UFSM** Universidade Federal de Santa Maria

### **Cursos de Licenciatura na Modalidade à Distância**

**Coordenação Acadêmica Física** Sônia Maria S. Corrêa de Souza Cruz

**Coordenação de Ambiente Virtual** Nereu Estanislau Burin

**Coordenação de Tutoria** Rene B. Sander

**Coordenação de Infra-Estrutura e Pólos** Vladimir Arthur Fey

## Comissão Editorial

Demétrio Delizoicov Neto, Frederico F. de Souza Cruz, Gerson Renzetti  
Ouriques, José André Angotti, Nilo Köhlkamp, Silvio Luiz Souza Cunha.

## Coordenação Pedagógica das Licenciaturas à Distância UFSC/CED/CFM

Coordenação Roseli Zen Cerny

## Núcleo de Formação

Responsável Nilza Godoy Gomes

## Núcleo de Criação e Desenvolvimento de Material

Responsável Isabella Benfica Barbosa

Design Gráfico e Editorial Carlos Antonio Ramirez Righi

Diogo Henrique Ropelato

Mariana da Silva

Produção Gráfica Thiago Rocha Oliveira, Laura Martins Rodrigues

Design Instrucional Juliana Machado, Rodrigo Machado Cardoso

Revisão Ortográfica Vera Bazzo

Preparação de Gráficos Laura Martins Rodrigues, Rafael de Queiroz Oliveira,  
Alexandre dos Santos Oliveira, Thiago Rocha Oliveira

Ilustrações Aberturas de Capítulos Camila Piña Jafelice, Felipe Oliveira Gall,  
Bruno Nucci, Robson Felipe Parucci

Editoração Eletrônica Paula Reverbel, Guilherme André Carrion, Rafael de  
Queiroz Oliveira, Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira

*Copyright © 2009, Universidade Federal de Santa Catarina / Consórcio RediSul  
Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qual-  
quer meio eletrônico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da  
Coordenação Acadêmica do Curso de Licenciatura em Física na Modalidade à Distância.*

P372f Gallas, Márcia R.

Física E/ Márcia Russmann Gallas, Sílvio Renato Dahmen. –  
Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2009.  
217p.

ISBN 978-85-99379-39-4

1. Física E. I. Dahmen, Sílvio R.. II. Título.

CDU 53

*Catálogo na fonte: Eleonora Milano Falcão Vieira*

# Sumário

<b>1 Corrente alternada .....</b>	<b>9</b>
1.1 Definição de corrente e tensão (ou voltagem) alternadas .....	11
1.2 Correntes senoidais .....	12
1.3 Um pouco de história: porque usamos correntes senoidais .....	13
1.4 Geração de uma corrente alternada.....	14
1.5 Valores eficazes de corrente e tensão.....	18
1.6 Representação vetorial de correntes e tensões alternadas .....	20
1.7 Circuitos simples de corrente alternada.....	22
1.8 Ligações em série .....	24
1.9 Potência instantânea e potência eficaz.....	26
Resumo .....	27
Problemas.....	28
Referências.....	34
<b>2 Equações de Maxwell .....</b>	<b>35</b>
2.1 As leis básicas do eletromagnetismo.....	37
2.2 O eletromagnetismo em forma integral .....	40
2.3 As propriedades de campos vetoriais: como caracterizá-los .....	41
2.4 O gradiente.....	41
2.5 O fluxo de um vetor .....	42
2.6 O fluxo infinitesimal por unidade de volume: a divergência .....	45
2.7 A divergência e o teorema de Gauss-Ostrogradsky: a Lei de Gauss na forma diferencial.....	48
2.8 A circulação de um vetor.....	50
2.9 A circulação infinitesimal por unidade de área: o rotacional .....	52
2.10 O Rotacional e o Teorema de Stokes: a Lei de Indução de Faraday na forma diferencial .....	55
2.11 A corrente de deslocamento .....	56
Resumo .....	61
Problemas.....	61
Referências.....	67
<b>3 Ondas eletromagnéticas .....</b>	<b>69</b>
3.1 Introdução .....	71
3.2 Equação de onda para os campos eletromagnéticos .....	72

3.3 Ondas planas .....	76
3.4 Um pouco de história: os experimentos de H. Hertz.....	80
3.5 A energia e o momentum de uma onda eletromagnética ..	81
3.6 Emissão de um dipolo .....	84
3.7 Ondas de Luz .....	88
Resumo .....	93
Problemas Resolvidos.....	94
Problemas propostos com respostas .....	96
Referências.....	96
<b>4 Óptica geométrica .....</b>	<b>97</b>
4.1 Reflexão e Refração.....	100
4.2 Dispersão e prismas .....	107
4.3 Reflexão Interna Total.....	112
4.4 Princípio de Fermat .....	114
4.5 Espelhos Planos .....	115
4.6 Espelhos esféricos.....	117
4.7 Superfícies refratoras.....	124
4.8 Lentes delgadas .....	128
Resumo .....	137
Problemas.....	140
Referências.....	146
<b>5 Instrumentos ópticos .....</b>	<b>147</b>
5.1 Olho .....	149
5.2 Máquina Fotográfica.....	152
5.3 Lente de aumento .....	154
5.4 Microscópio Composto .....	156
5.5 Telescópio .....	159
Resumo .....	161
Problemas.....	163
Referências.....	166
<b>6 Óptica física.....</b>	<b>167</b>
6.1 Introdução .....	170
6.2 Princípio de Huygens .....	170
6.3 Interferência .....	172
6.4 Difração .....	188
Resumo .....	207
Problemas.....	211
Referências.....	217

# Apresentação

Este livro destina-se a estudantes que necessitam dos conhecimentos de Física básica e tem por objetivo fornecer uma apresentação clara e lógica dos conceitos e princípios básicos em tópicos importantes de Física, como: correntes alternadas, as equações de Maxwell e as ondas eletromagnéticas; fenômenos envolvendo ondas luminosas quando estas encontram uma interface entre dois meios, formação de imagens por espelhos e lentes, instrumentos ópticos, tópicos explicados através da Óptica Geométrica; e finalmente, fenômenos de interferência e difração, explicados pela teoria ondulatória e descritos na Óptica Física.

Qual o motivo de se ter optado por um curso que começa diretamente com as correntes alternadas e não com as leis básicas da Eletrostática, como a Lei de Coulomb? A razão é simples: com a descoberta e estudo das correntes alternadas, novos fenômenos físicos surgiram, fenômenos estes que se mostraram fundamentais ao desenvolvimento da ciência e tecnologia a partir do século XIX. Estamos falando da Lei da Indução de Faraday. Com ela descobriu-se a possibilidade de gerar correntes por meio de campos magnéticos, abrindo as portas de uma série de novos e interessantes estudos, que foram sumarizados de forma magistral por Maxwell. Maxwell aventou a hipótese e Hertz mostrou que a luz nada mais era que uma onda eletromagnética, unificando assim o Eletromagnetismo à Óptica. Por este motivo este livro se dedica a estes tópicos particulares.

Os autores procuraram, dentro do possível, trazer o conteúdo mais próximo da realidade do aluno e do dia-a-dia. Embora alguns dos capítulos tenham um caráter mais matemático, procurou-se fazer a discussão a mais clara possível utilizando para tanto ilustrações e cálculos matemáticos detalhados. Esperamos que estes capítulos em particular não assustem nossos leitores, mas sejam antes vistos como um saudável desafio à melhor compreensão dos trabalhos de grandes nomes da Física.

*Saudação*

**Sílvio R. Dahmen**

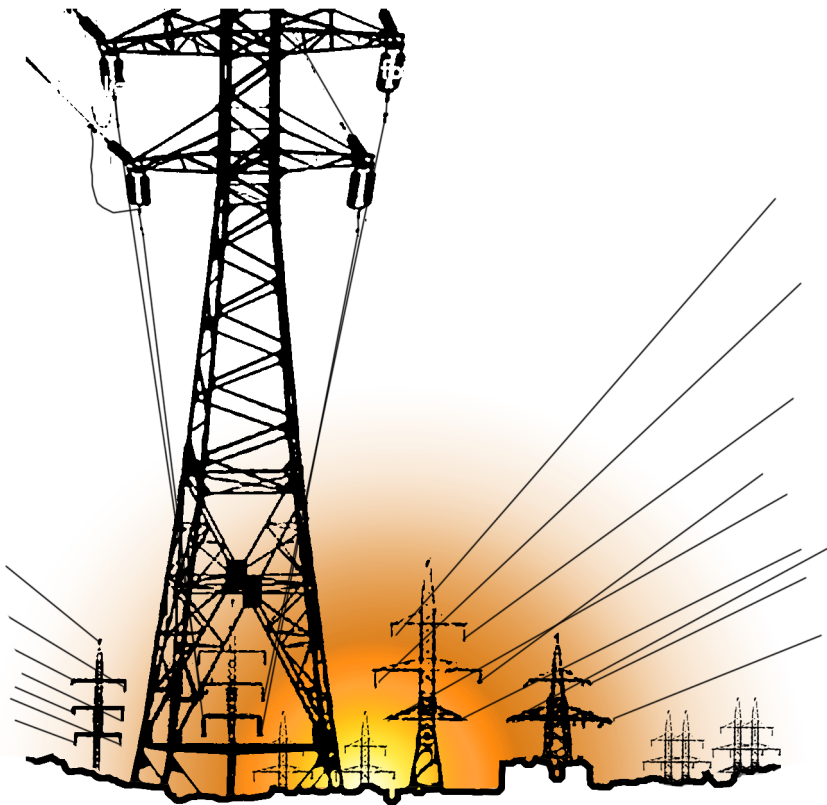
**Marcia Russman Gallas**

*Porto Alegre, Dezembro de 2007*





# 1 Corrente alternada





# 1 Corrente alternada

*Ao final deste capítulo estaremos aptos a compreender: o que é uma corrente alternada e como ela pode ser gerada; quais os fenômenos básicos associados a circuitos submetidos a correntes alternadas; entender as possíveis aplicações práticas de circuitos de corrente ou tensão alternada.*

Iniciaremos este curso pelo estudo de correntes alternadas. As correntes alternadas são importantes não apenas pela variedade de novos conceitos a elas associadas, mas também pela sua aplicação prática na tecnologia: é justamente o uso de correntes alternadas em dispositivos eletro-eletrônicos que nos permite, entre outras coisas, fazer com que a energia gerada nas usinas chegue às casas, que possamos amplificar sons ou transmitir informações a grandes distâncias.

## 1.1 Definição de corrente e tensão (ou voltagem) alternadas

Uma corrente ou uma tensão alternada é aquela cujo valor varia periodicamente no tempo, sendo que seu **valor médio** é igual a zero. Como toda função periódica, a corrente alternada é caracterizada por:

- Período  $T$ : se observarmos uma corrente num instante de tempo  $t_0$ , então o tempo necessário, a partir deste para que as variações voltem a se repetir, é chamado de período  $T$  da corrente. Sua unidade é segundos. Como exemplo, podemos falar do período de um pêndulo ou de um satélite em órbita.
- Frequência  $f$ : esta grandeza está diretamente ligada ao período, sendo definida como  $\frac{1}{T}$ . O significado físico da frequência é o número de ciclos que a corrente perfaz numa unidade de tempo, ou seja, em 1 segundo. A unidade de frequência é o  $s^{-1}$  ou Hertz (símbolo Hz). Em alguns países como o Brasil e Estados Unidos, a frequência da corrente alternada fornecida aos domicílios é de 60 Hz. Na Europa continental, esta frequência é de 50 Hz. A importância de uma padronização de frequências se dá em função da padronização dos aparelhos em seu projeto original (os

O valor médio de uma função matemática é soma dos valores da função durante um período completo dividido pelo número de valores somados

dispositivos elétricos e eletrônicos são projetados para trabalhar em frequências específicas). Uma frequência de 60 Hz significa que em 1 segundo o sistema realiza 60 ciclos completos.

- Comprimento de onda: o comprimento de onda  $\lambda$  é a distância entre os dois pontos mais próximos que tem o mesmo valor e sentido de variação (ou seja, tem a mesma fase).

## 1.2 Correntes senoidais

A corrente alternada é um processo periódico e há várias funções matemáticas que representam processos deste tipo. A mais simples função é um seno (ou cosseno), e por este motivo será usada como exemplo de todas as discussões que seguem, até porque também a tensão que chega a nossos lares tem a forma senoidal. Não apenas isso, nossa familiaridade com funções trigonométricas as tornam objetos de estudo ideais, pois sabemos trabalhar bem com funções deste tipo. Na figura abaixo temos um exemplo de uma senóide, onde representamos também as grandezas acima definidas com período, fase, etc.

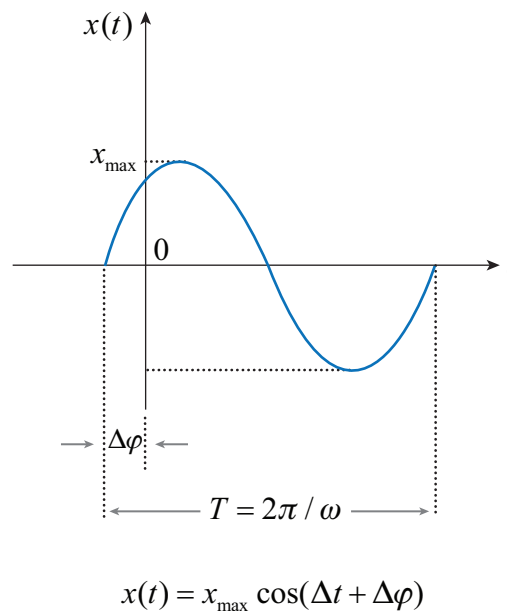


Figura 1.1 – Uma função periódica do tipo senóide.

Para melhor entender o porquê das correntes que chegam aos domicílios tem esta forma, convém fazer uma pequena digressão das origens históricas da física das correntes alternadas.

### 1.3 Um pouco de história: porque usamos correntes senoidais

Em 1820 o químico dinamarquês *Hans Christian Oersted* notou, durante uma aula experimental expositiva, que ao aproximar uma bússola de um fio por onde passava uma corrente, a agulha da mesma sofria uma deflexão, ou seja, a corrente elétrica gerava um campo magnético que era sentido pela agulha imantada. Descobriu-se assim, que havia uma relação entre eletricidade e magnetismo, dois temas até então tratados pelos cientistas separadamente. Esta descoberta de Oersted não foi acidental, pois já havia indícios da ligação entre a eletricidade e o magnetismo e o próprio Oersted já tentara fazer esta observação anteriormente, sem sucesso (Veja o artigo “Oersted e a descoberta do eletromagnetismo”, do Prof. Roberto de Andrade Martins; <http://www.ifi.unicamp.br/~ghhc/ram-pub.htm> ).

Mas se pensarmos um pouco mais no assunto, a primeira indagação que nos vem à mente diz respeito ao fenômeno recíproco: se uma corrente produz um campo magnético, como podemos comprovar aproximando uma bússola de um fio de cobre sobre o qual passa uma corrente, por que não haveria então de ser possível produzir uma corrente a partir de um campo magnético? Na verdade, para sermos mais precisos, devemos perguntar qual a relação entre campos elétricos e campos magnéticos, pois na verdade a corrente elétrica é formada, na maioria das situações de interesse, por elétrons que se movem ao longo dos fios metálicos (há outros tipos de condutores elétricos que não os elétrons, como por exemplo íons em soluções aquosas). Esses elétrons geram campos elétricos que variam no tempo e no espaço (pois os elétrons se movem) e o campo elétrico resultante também varia no tempo e no espaço – e é justamente este campo elétrico variando que gera um campo magnético.

No entanto, à época de Oersted a física microscópica e as partículas elementares ainda não eram conhecidas e portanto, o caminho até a descoberta do efeito recíproco, só foi conseguido com o surgimento no cenário da ciência do século XVIII, daquele que é considerado por muitos como o maior físico experimental que já viveu: *Michael Faraday*. Depois de aproximadamente 10 anos de intenso trabalho, Faraday concluiu que era possível sim, gerar um campo elétrico e consequentemente, uma corrente num fio, a partir de um campo magnético. No entanto isso só era possível pela variação do campo magnético no tempo, mais precisamente, pela variação temporal do fluxo magnético através da área formada pelo circuito.

*Filho de um farmacêutico, o contato com a profissão paterna cedo despertou no jovem Hans Christian Oersted o interesse pelas ciências. Nascido em 1777 na Dinamarca, teve a formação inicial com professores privados. Com 16 anos mudou-se para Copenhague, onde um ano mais tarde ingressou na Universidade local para também estudar farmácia (não havendo então cursos, como os atuais, de física e química. Foi um dos principais cientistas do século XVIII, e suas contribuições ao eletromagnetismo foram fundamentais. Faleceu em Copenhague, em 1851.*

*Michael Faraday, de origem humilde, nasceu em 1791 em Londres. Em 1821, um ano após a descoberta de Oersted, Faraday inicia o trabalho no eletromagnetismo, e em 1831 descobre o que é talvez o mais importante de seus legados: a indução eletromagnética. Faraday faleceu em 25 de agosto de 1867.*

Fluxo magnético é a quantidade de linhas de campo magnético que atravessam uma área. A definição é análoga àquela da hidrodinâmica, onde o fluxo de um líquido é o volume de líquido que passa por uma determinada área num determinado tempo (também chamado neste caso de vazão).

*Importante periódico científico alemão, cuja publicação teve início no século XIX e se estendeu até o século XX. Grande parte das importantes descobertas em física no século XX foi publicada nesta revista. Era, até o início da Segunda Guerra Mundial, o mais prestigioso jornal científico para física.*

Esta famosa descoberta, conhecida como Lei da Indução de Faraday, teve consequências extraordinárias para o desenvolvimento tecnológico da sociedade moderna: era possível gerar correntes a partir do uso de ímãs permanentes, simplesmente fazendo com que o **fluxo magnético** que esses ímãs geram num circuito variasse no tempo. Há principalmente duas maneiras de fazer isso:

- Movendo o circuito em relação ao ímã fixo no referencial do laboratório;
- Movendo o ímã em relação ao circuito fixo no referencial do laboratório.

Embora à primeira vista isto pareça algo trivial (uma vez que não deve em princípio haver diferença entre quem se move e quem fica parado, pois tudo é uma questão do referencial inercial escolhido) há, segundo a física clássica, uma assimetria nestes dois processos. Isso só pode ser discutido em conjunto com a teoria microscópica, motivo pelo qual esta assimetria passou despercebida para os contemporâneos de Faraday e Oersted (Maxwell inclusive).

Mas este é um problema profundo e interessante, e a razão pela qual Einstein desenvolveu, em 1905, a sua famosa Teoria Especial da Relatividade. Não é por menos que o trabalho original de Einstein, publicado no *Annalen der Physik* chama-se “Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento”.

## 1.4 Geração de uma corrente alternada

Se considerarmos um pouco mais o problema da geração de uma corrente pela movimentação de um corpo imantado próximo a um fio, veremos que para fins práticos é mais conveniente mantermos os fios parados e movimentar o ímã: em outras palavras, acoplando o ímã a um sistema mecânico podemos transformar a energia mecânica usada para movimentar o ímã em energia elétrica. Este é o funcionamento básico de todas as usinas geradoras de eletricidade, sejam elas térmicas (combustíveis fósseis ou radioativos), sejam elas hidroelétricas ou eólicas (há também usinas que utilizam ondas do mar como fonte de energia mecânica). Nas usinas ditas térmicas, os combustíveis são usados para produzir vapor d’água que então moverá as pás de uma turbina, ao qual está acoplado um sistema de ímãs. Nas usinas hidroelétricas e eólicas, a queda d’água pela barragem ou os ventos movimentam diretamente as pás das turbinas.

O processo de geração de uma fonte de tensão alternada pode ser facilmente entendido através da representação esquemática do sistema abaixo: por questão de clareza, imaginemos que aqui quem se move é um circuito, que pode girar sobre o próprio eixo longitudinal (paralelo ao plano do circuito). Este está imerso em um campo magnético permanente, representado por um ímã de faces  $N$  e  $S$ , como ilustra a figura 1.2.

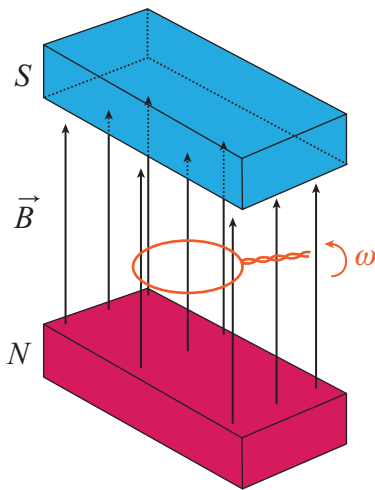


Figura 1.2 – Uma espira que gira com velocidade angular  $\omega$  entre os pólos de um ímã. O campo magnético  $\vec{B}$  é constante.

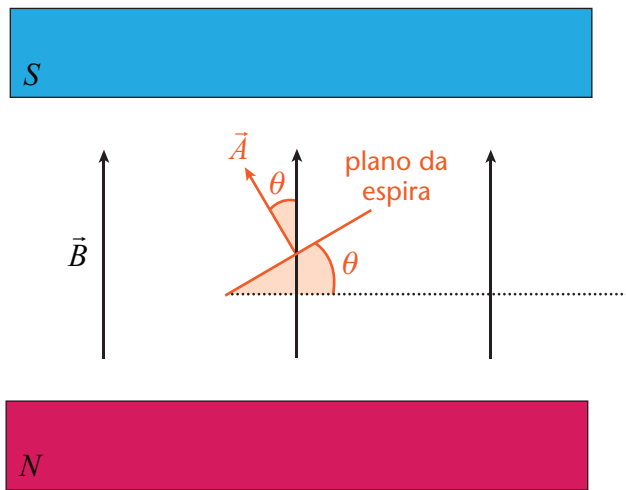


Figura 1.3 – Uma representação do perfil da figura 1.2. O ângulo entre a normal ao plano da espira e o campo magnético é  $\theta(t) = \omega t$ .

Se o campo magnético do ímã for  $\vec{B}$  (constante), então o fluxo magnético  $\Phi$  pela área do circuito é dado, por definição, pela expressão

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (1.1)$$

Ou seja

$$\Phi = |B| |A| \cos \theta \quad (1.2)$$

Onde  $\theta$  é o ângulo entre o plano do circuito e a horizontal ou, o que é a mesma coisa, o campo magnético  $\vec{B}$  e o **vetor área**  $\vec{A}$ .

Porém, se o circuito gira com uma velocidade angular  $\omega$  então o ângulo  $\theta$  estará sujeito à equação de movimento

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

O vetor área é um vetor definido de tal modo que seu módulo é igual à área da superfície a qual se refere e sua direção é perpendicular a mesma, ou seja, ele tem a direção da normal à superfície. Seu sentido é arbitrário, mas uma vez definido, ele diz qual o sentido positivo para a circulação ao longo do perímetro da área – para tanto adota-se, por convenção, a regra da mão direita.

E portanto o fluxo será dado por

$$\Phi = BA \cos(\theta_0 + \omega t) \quad (1.3)$$

A variação temporal de  $\Phi$  é dada por

$$\frac{d\Phi}{dt} = -BA\omega \text{sen}(\theta_0 + \omega t)$$

Mas, segundo a Lei da Indução de Faraday,  $\frac{d\Phi}{dt} = -RI$  onde  $R$  e  $I$  são a resistência elétrica do circuito e a corrente induzida. Portanto obtemos que a corrente induzida no circuito que gira com frequência angular  $\omega = 2\pi f$  é dada por

$$I = \frac{1}{R} BA\omega \text{sen}(\theta_0 + \omega t)$$

Esta expressão pode ser escrita como

$$I = I_m \text{sen}(\theta_0 + \omega t) \quad (1.4)$$

onde  $I_m$  representa a amplitude máxima da corrente. A corrente será tanto maior quanto maior o campo magnético e a área da espira, e tanto menor quanto maior a resistência do fio. Ela também **depende da frequência** de rotação  $\omega$  da espira e cresce quanto mais rapidamente a girarmos.

A representação da corrente senoidal pode ser melhor apreciada se para tanto nos recordarmos da construção de uma senóide ou cosenóide e sua relação com o movimento circular – esta representação também é extremamente útil na hora em que tivermos que estudar algumas das propriedades de correntes em circuitos.

A explicação física desta dependência com a frequência é simples. Pela Lei da Indução de Faraday, a corrente induzida não é proporcional ao fluxo do campo magnético, mas à variação temporal do mesmo e portanto quanto mais rapidamente a espira gira dentro do campo, maior será a variação temporal.

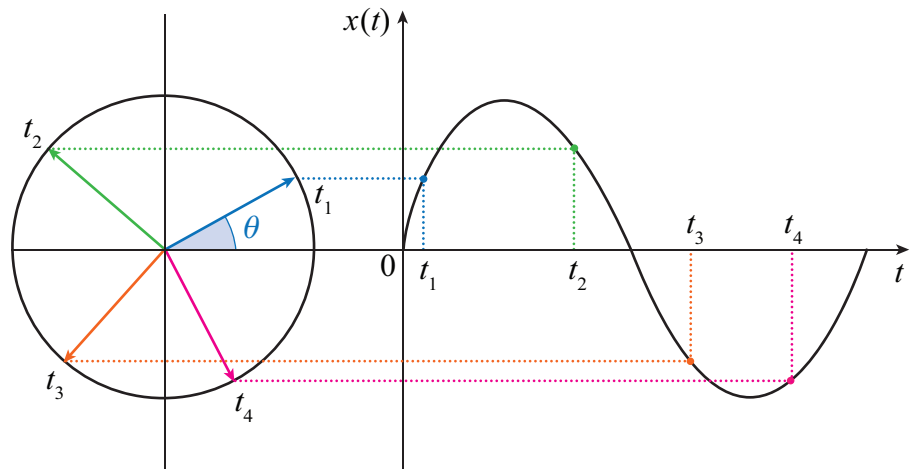


Figura 1.4 – A relação entre o movimento de um vetor num círculo e a projeção da componente sobre o eixo y e do círculo, que é calculada tomando-se o seno de  $\theta$  para diferentes instantes.



Imaginemos  $I_m$  como o módulo de um vetor que gira em torno da origem do eixo ortogonal de coordenadas. Em  $t = 0$  este vetor está na posição perpendicular, ou seja, no sentido do eixo  $y$  positivo. A partir deste instante inicial, este vetor começa a girar com velocidade angular  $\omega$  no sentido contrário aos ponteiros do relógio e depois de um tempo  $T$  (o período), ele percorreu  $2\pi$  radianos, retornando ao ponto inicial. A velocidade angular  $\omega$  vale, portanto,  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$  (a velocidade angular pode ser também chamada de frequência angular).

Depois de transcorrido um tempo  $t_1$  o vetor  $\vec{I}$  terá girado de um ângulo igual a  $\omega t_1$  e a projeção deste vetor (sua sombra) sobre o eixo  $y$  será igual a

$$I(t_1) = I_m \text{sen}(\omega t_1)$$

Após um tempo  $t_2$ , seguindo o mesmo raciocínio, esta projeção será  $I(t_2) = I_m \text{sen}(\omega t_2)$ . Vejamos o que acontece em  $t = \frac{1}{2}T$ , ou seja, transcorridos um quarto do período total necessário para que o vetor complete uma volta. Neste momento ele se encontrará exatamente na direção e sentido do eixo  $x$  negativo e sua projeção sobre o eixo  $y$  será nula. Em outras palavras

$$I\left(t = \frac{T}{2}\right) = I_m \text{sen}\left(\omega \frac{T}{2}\right) = I_m \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}\right) = I_m \text{sen}(\pi) = 0$$

Se agora desenharmos ao lado do diagrama polar um diagrama de coordenadas cartesianas ( $t \times I(t)$ ), obteremos a função cosseno como ilustrada na figura 1.4. A relação entre o movimento circular e o movimento senoidal fica assim clara.

Podemos fazer aqui uma *analogia* com a mecânica: se tivermos um corpo que gira com velocidade angular constante e ao mesmo tempo translada com uma velocidade linear de centro de massa igual a  $v$  em relação a um referencial inercial fixo no laboratório, então um ponto na extremidade da roda poderá ser descrito de duas maneiras. No referencial que se move junto com o centro de massa da roda (e portanto em relação ao qual  $v = 0$ ), o ponto na extremidade descreve uma trajetória circular. No referencial do laboratório, teremos um movimento senoidal. Com este tipo de ilustração podemos também melhor compreender o conceito de fase inicial de uma corrente (figura 1.5) e a diferença de fase entre duas diferentes correntes (figura 1.6):

*Aqui toda a atenção é necessária: não estamos tratando, nesta analogia, do movimento de uma roda de um carro, quando este se desloca com velocidade constante, uma vez que nesta situação o ponto de contato da roda com o chão está, a cada instante de tempo  $t$ , parado (caso contrário o pneu deslizaria).*

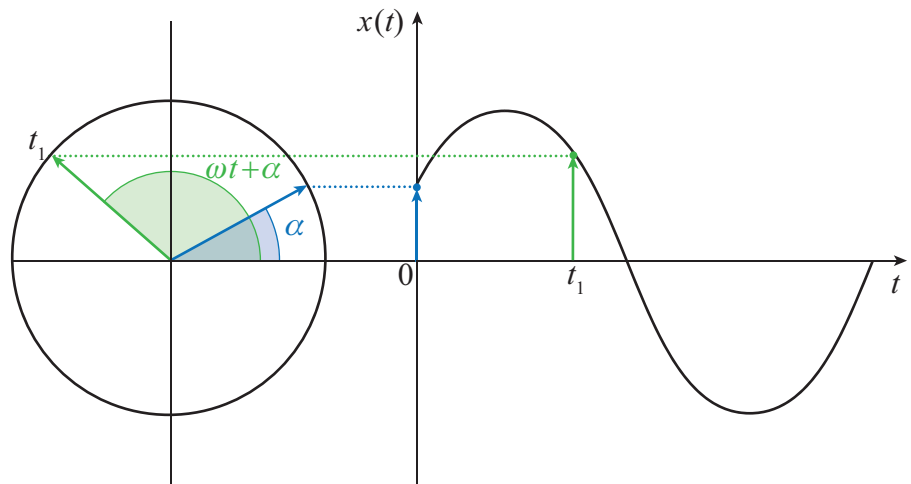


Figura 1.5 – Uma função do tipo senóide com a fase inicial  $\alpha$  que representa o valor do argumento da função no instante  $t = 0$ . Ela significa que no instante em que ligamos nosso cronômetro, a projeção do vetor em questão já era diferente de zero.

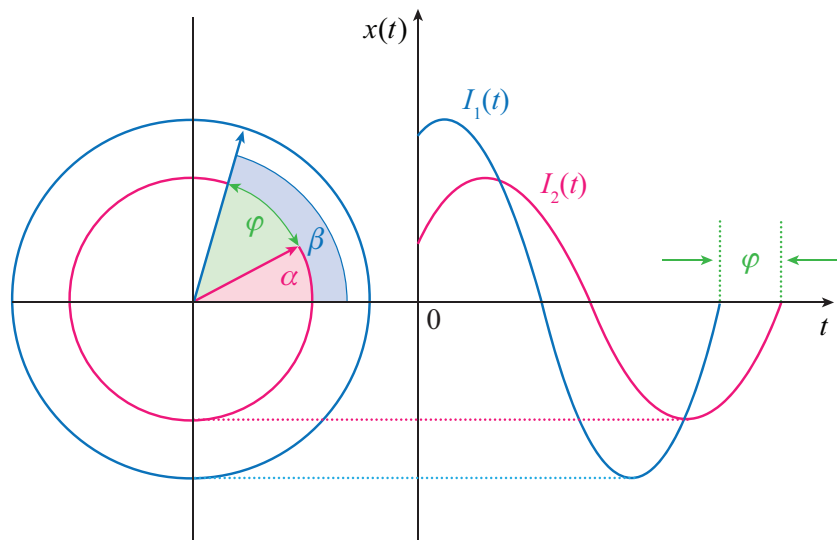


Figura 1.6 – A representação de duas funções  $I_1(t) = I_{1M} \text{sen}(\omega t + \beta)$  e  $I_2(t) = I_{2M} \text{sen}(\omega t + \alpha)$ , de diferentes amplitudes máximas  $I_{1M}$  e  $I_{2M}$  e cuja diferença de fase é  $\varphi = \beta - \alpha$ .

## 1.5 Valores eficazes de corrente e tensão

As correntes e tensões (voltagens) usadas na rede elétrica domiciliar têm uma frequência de 60 Hz. Como os valores de correntes alternadas variam entre um máximo e um mínimo de amplitude, a pergunta que se coloca é: quando dizemos que a voltagem nas tomadas domiciliares é 110 V (ou 220V), a que valor este número se refere? Ao valor máximo da tensão? Pois, sendo ela alternada, sabemos que o valor varia entre um máximo e um mínimo, passando portanto pelo valor de zero. Ou seriam esses possíveis valores os valores médios das grandezas elétricas?

Quanto a valor médio, uma rápida reflexão nos dirá que os valores por nós medidos não podem ser valores médios, pois funções periódicas alternadas (como o seno e o cosseno) têm média nula. Precisamos assim de uma maneira de calcular um valor médio, pois isso nos parece ser uma boa medida do valor da voltagem nas tomadas, mas de uma maneira que ele não seja nulo: a solução é então pegar o valor da função  $f$ , cuja média queremos calcular, e elevá-lo a segunda potência, pois assim os valores da média de  $f^2$  (representados matematicamente por  $\langle f^2 \rangle$  ou  $\bar{f}^2$ ) serão diferentes de zero. Porém nos interessa o valor da função  $f$  e não de seu quadrado. Assim, uma vez calculado a média, tomamos a raiz quadrada e definimos a grandeza “valor quadrático médio”:

$$f_{rms} = \sqrt{\langle f^2 \rangle} \quad (1.5)$$

A sigla rms vem do inglês *root mean square* (raiz quadrática média) e é amplamente usada no mundo todo.

O valor médio quadrático da corrente, por exemplo, pode ser calculado facilmente, pois ele depende apenas das propriedades da função senoidal. Tomemos assim uma corrente do tipo

$$I(t) = I_M \text{sen}(\omega t) \rightarrow I^2(t) = I_M^2 \text{sen}^2(\omega t)$$

Porém, das propriedades da função seno sabemos que  $\text{sen}^2(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}$  e portanto podemos escrever

$$\begin{aligned} I^2(t) &= \frac{I_M^2}{2} - \frac{I_M^2}{2} \cos(2\omega t) \\ \langle I^2(t) \rangle &= \left\langle \frac{I_M^2}{2} - \frac{I_M^2}{2} \cos(2\omega t) \right\rangle \\ \langle I^2(t) \rangle &= \left\langle \frac{I_M^2}{2} \right\rangle - \frac{I_M^2}{2} \langle \cos(2\omega t) \rangle \end{aligned}$$

onde, na passagem da segunda para a terceira equação, utilizamos o fato que a média da soma de duas funções é a soma das médias de cada função. O primeiro termo porém é uma função constante, e a média de uma constante é a própria constante. Já a função  $\cos(2\omega t)$ , como qualquer senóide, tem a média zero, e portanto chegamos a

$$\sqrt{\langle I^2(t) \rangle} = I_{rms} = \frac{I_M}{\sqrt{2}} \quad (1.6)$$

Os aparelhos de medida elétrica que normalmente utilizamos no dia-a-dia (como voltímetros ou amperímetros) são ajustados para nos da-

rem sempre os valores quadráticos médios. Assim, quando dizemos que a tensão de uma tomada é 110 V (220 V), na verdade o valor de pico da tensão é de aproximadamente 155.6 V (311.2 V). Ou seja, o choque que tomamos é significativamente maior do que imaginamos.

## 1.6 Representação vetorial de correntes e tensões alternadas

Discutimos na seção 1.4 a maneira de representarmos uma corrente ou tensão senoidal por meio de vetores que giram em torno de um ponto fixo. Essa representação faz uso, como já foi discutido, da equivalência entre um movimento circular e um movimento harmônico quando visto de dois diferentes sistemas de referência. Uma das principais vantagens deste método se faz sentir quando queremos somar correntes (ou tensões) com diferentes amplitudes ou fases iniciais. Obviamente podemos fazer isto utilizando diretamente as propriedades de soma das funções trigonométricas.

**Problema:** determine a soma das funções  $I_1(t) = I_{1M} \text{sen}(\omega t + \beta)$  e  $I_2(t) = I_{2M} \text{sen}(\omega t + \alpha)$ .

**Solução:** usando as propriedades conhecidas de soma de funções trigonométricas podemos, depois de algum trabalho braçal, chegar a uma resposta do tipo  $I(t) = I_1(t) + I_2(t) = I_M \text{sen}(\omega t + \varphi)$ . Esse cálculo porém fica muito mais simples se usarmos a representação vetorial para a soma de dois vetores (veja a figura abaixo).

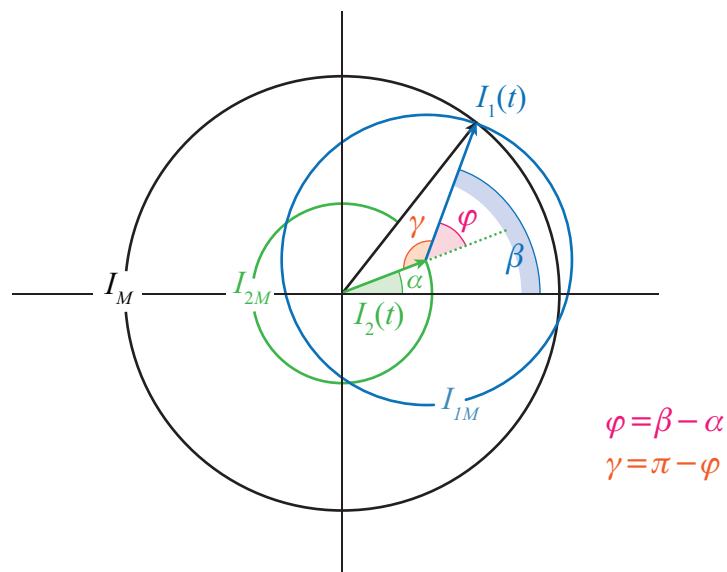


Figura 1.7 – Quaisquer duas correntes  $I_1(t)$  e  $I_2(t)$  cuja diferença de fase  $\varphi = \beta - \alpha$  não depende do tempo, podem ser somadas de acordo com a regra de vetores acima representada.

De acordo com a Figura 1.7, o vetor mais comprido é a resultante da soma dos dois vetores  $\vec{I}_1(t)$  e  $\vec{I}_2(t)$ . O que nos interessa, ao final do cálculo, é a projeção do vetor resultante sobre o eixo  $y$ , da mesma maneira que a funções  $I_1(t) = I_{1M} \text{sen}(\omega t + \beta)$  e  $I_2(t) = I_{2M} \text{sen}(\omega t + \alpha)$  são as projeções dos vetores  $\vec{I}_1(t)$  e  $\vec{I}_2(t)$ .

Olhando para a figura vemos que, pela regra dos cossenos, temos, para os módulos dos vetores

$$I_M^2 = I_{1M}^2 + I_{2M}^2 - 2I_{1M}I_{2M} \cos(\gamma)$$

$$I_M^2 = I_{1M}^2 + I_{2M}^2 - 2I_{1M}I_{2M} \cos(\pi - \varphi)$$

$$I_M^2 = I_{1M}^2 + I_{2M}^2 + 2I_{1M}I_{2M} \cos(\beta - \alpha)$$

onde, na passagem da segunda para a terceira equação usamos a conhecida relação  $\cos(\pi - \varphi) = \cos \pi \cos \varphi + \text{sen} \pi \text{sen} \varphi = \cos \varphi$ . Sendo  $\varphi = \beta - \alpha$  obtemos a terceira equação. Uma vez calculado o módulo do vetor, falta-nos agora calcular a projeção desejada sobre o eixo  $y$ . Pela figura podemos ver, no entanto, que o ângulo  $\theta$  que o vetor resultante forma com o eixo  $x$  é tal que

$$\text{sen} \theta = \frac{I_{1M} \text{sen} \beta + I_{2M} \text{sen} \alpha}{\sqrt{I_{1M}^2 + I_{2M}^2 + 2I_{1M}I_{2M} \cos(\beta - \alpha)}}$$

e portanto a solução final é

$$I(t) = \frac{V(t) + fem}{R} \quad (1.7)$$

No caso em que ambos os vetores tem o mesmo módulo  $I_{1M} = I_{2M} = I$ , a expressão se simplifica bastante. Podemos sempre tomar uma das fases (por exemplo  $\alpha$ ) como sendo igual a zero, pois a fase inicial de um vetor está relacionada à escolha do tempo inicial  $t = 0$ . Neste caso obtemos

$$I(t) = 2I \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \text{sen} \left( \omega t + \frac{\beta}{2} \right).$$

Mas sendo  $\sqrt{\frac{1 + \cos(2\beta)}{2}} = \cos \beta$  temos que

$$I(t) = 2I \cos \left( \frac{\beta}{2} \right) \text{sen} \left( \omega t + \frac{\beta}{2} \right). \quad (1.8)$$

que é normalmente usada em muitas aplicações.

## 1.7 Circuitos simples de corrente alternada

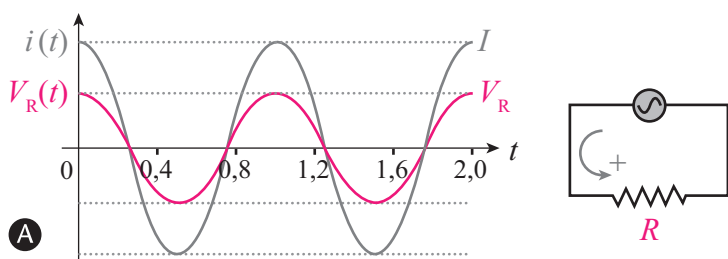
Passaremos agora a estudar alguns circuitos simples sob a ação de uma corrente alternada.

A primeira situação que podemos imaginar é aquela de um circuito submetido a uma diferença de potencial alternada e que é constituído apenas por uma resistência. Neste caso, se a diferença de potencial a qual o resistor está submetido é

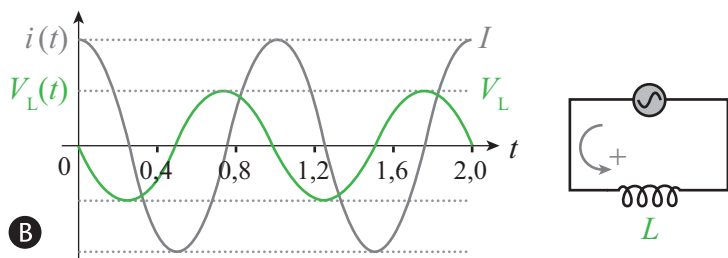
$$V(t) = V_M \text{sen}(\omega t).$$

então a corrente pelo circuito será dada por

$$I(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_M}{R} \text{sen}(\omega t) = I_M \text{sen}(\omega t).$$



Sendo a resistência uma constante no tempo, esta expressão nos diz que tanto a corrente quanto a diferença de potencial a que está submetido o sistema estarão em fase (passam por máximos e mínimos no mesmo instante de tempo), como na figura 1.8A.



Passemos agora para o caso de um circuito com um indutor (bobina). Embora não apareça no desenho, todo circuito sempre tem uma resistência: se não for um resistor, há sempre a resistência dos fios e a resistência interna da fonte de tensão, que podemos imaginar como sendo equivalente a de um resistor  $R$  no sistema. A presença de um indutor no circuito faz com que surja uma força contra-eletromotriz devido à variação do fluxo magnético dentro do mesmo. A corrente no circuito será a soma de duas contribuições: uma devido a voltagem alternada aplicada  $V$  e outra a força eletromotriz fem.

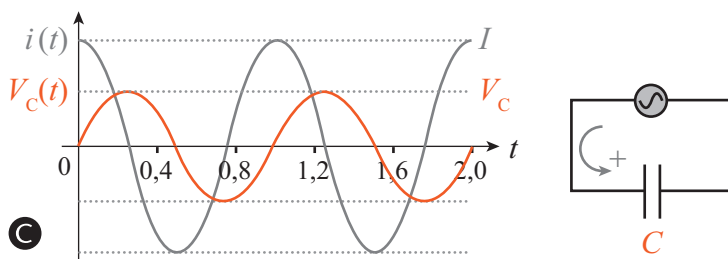


Figura 1.8 – Três circuitos sobre os quais atua uma voltagem alternada. Em (A) temos apenas um resistor, em (B) temos um indutor além da resistência (que pode vir dos fios e da resistência interna da fonte) e em (C) a resistência e um capacitor

Em outras palavras

$$I(t) = \frac{V(t) + fem}{R}$$

A fem induzida é dada por

$$fem = V_{ind} = -L \frac{dI(t)}{dt} \quad (1.9)$$

onde  $L$  é a indutância da bobina. Fazendo explicitamente as contas temos

$$V_{ind} = -I_M L \omega \cos(\omega t)$$

Porém, da relação

$$\cos(\omega t) = -\text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

segue que

$$V_{ind} = I_M L \omega \text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

A curva senoidal da força eletromotriz induzida está assim atrasada de um quarto de período com relação à corrente e a diferença de potencial aplicada (Figura 1.8B). É importante também notar a dependência da voltagem induzida com a frequência – quanto mais alta a frequência da fonte, maior a voltagem induzida na bobina. Quanto maior a frequência, mais rápida a variação e portanto maior a força eletromotriz induzida. Outro resultado interessante de observamos é que se calcularmos os valores efetivos de corrente induzida, então podemos escrever a relação entre voltagem induzida e corrente induzida como

$$V_{ind}^{rms} = I_M^{rms} L \omega \rightarrow I_M^{rms} = \frac{V_{ind}^{rms}}{L \omega}$$

ou seja, a expressão  $\chi_L = L \omega$  desempenha um papel de resistência no circuito e é chamada de reatância indutiva. Isso é também fácil de compreender: quanto maior a frequência, maior a corrente induzida, que é sempre contrária à variação da diferença de potencial no sistema. Se variarmos a voltagem da fonte muito rapidamente, a corrente contrária induzida na bobina pode ser tão alta a ponto de se anular com a corrente “normal” devido à presença da fonte. Em outras palavras, um indutor impede variações muito bruscas de voltagem no sistema, motivo pelo qual um indutor também é chamado de filtro passa-baixa (ou seja, só deixa “passar” pelo sistema variações pequenas de frequência).

Passemos agora para o caso do capacitor (ou condensador) de capacitância  $C$ . Neste caso o que surge é uma carga  $q$  entre as placas do capacitor e, pela definição, se a tensão alternada varia senoidalmente, então o valor da carga será

$$q(t) = V(t)C = V_M C \text{sen}(\omega t)$$

A corrente que surgirá nos fios condutores que ligam o capacitor à fonte será então

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = V_M C \omega \cos(\omega t) = V_M C \omega \text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

ou seja, no circuito com o capacitor passa uma corrente senoidal que está adiantada de um quarto de período com relação à diferença de potencial da fonte (figura 1.8C). O papel da resistência no capacitor é desempenhado pela grandeza  $\chi_C = 1/\omega C$ , chamada de reatância capacitiva. Quanto maior a frequência da oscilação, menor a resistência que o capacitor apresenta para o aparecimento da corrente no circuito.

Lembremo-nos que não há uma passagem de corrente por entre as placas do capacitor, mas a alternância da fonte de tensão faz com que sempre haja uma corrente ora indo em direção uma placa, ora indo à outra. Se a frequência é muito baixa (alta reatância capacitiva), o capacitor carrega-se antes que a fonte tenha mudado de polaridade, e a corrente no sistema vai a zero.

## 1.8 Ligações em série

Vamos estudar nesta seção uma resistência associada a uma indutância em série. Qualquer elemento de um circuito tem associado a si uma resistência uma vez que os fios que compõem uma bobina, por exemplo, apresentam uma resistência à passagem de corrente. Devido a lei das quedas de tensão no circuito, a tensão total  $U$  gerada pela fonte é igual a soma das quedas de tensão nos elementos do circuito, neste caso  $U_r = Ir$  e  $U_L = I\omega L = I\chi_L$ . A primeira coincide com  $U$  em fase, ao passo que a segunda está adiantada de  $\pi/2$ . Logo, se voltamos ao diagrama vetorial para tensões, a tensão  $U$  representa a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são  $U_r$  e  $U_L$ . De acordo com o teorema de Pitágoras:

$$U = \sqrt{U_r^2 + U_L^2} = I\sqrt{r^2 + \omega L^2}$$



de onde segue, da lei de Ohm, que

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + x_L^2}} \quad (1.10)$$

A grandeza que desempenha o papel da resistência do circuito à passagem de corrente é chamada de impedância do circuito e representada pela letra  $Z$ . De um modo geral, a impedância entre quaisquer dois pontos de um circuito que não incluam a fonte de tensão é dada pela razão entre a tensão e a corrente eficazes  $Z = U / I$ .

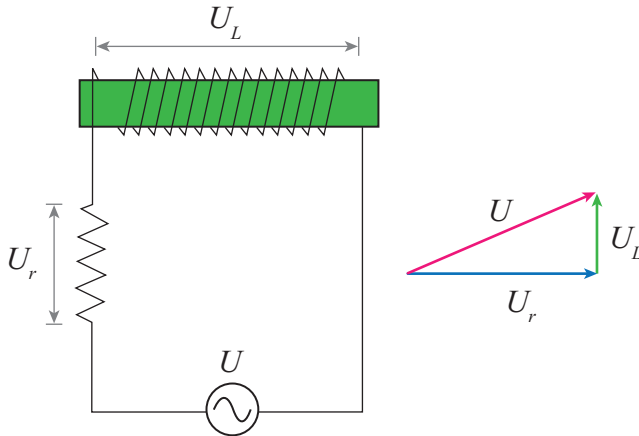


Figura 1.9 – Um circuito formado por um resistor e um indutor colocados em série. Ao lado o diagrama vetorial das tensões.

Consideremos agora o circuito formado pela combinação, em série, de um resistor, um capacitor e um indutor. Temos agora mais um vetor para considerar, além dos dois já considerados no exemplo anterior: a tensão no capacitor, que é proporcional à reatância capacitiva:

$$U_c = I X_c = \frac{I}{\omega C} \quad (1.11)$$

Devemos porém tomar o cuidado pois esta tensão está atrasada em um quarto de período em relação à corrente. Ao construirmos o diagrama de vetores, imaginemos um vetor na direção do eixo  $x$  (direção da corrente). A tensão indutiva faz um ângulo de  $\pi / 2$  com relação à corrente (adiantado, ou seja, a  $90^\circ$  no sentido horário). Acrescentamos a este a tensão no reator (que tem o mesmo sentido que a corrente, pois está em fase com esta). Finalmente, acrescentamos a tensão capacitiva atrasada (sentido anti-horário) de um quarto de período ou  $\pi / 2$ . A soma destes três vetores, como mostra a figura 1.10, deve ser a tensão total  $U$  na fonte.

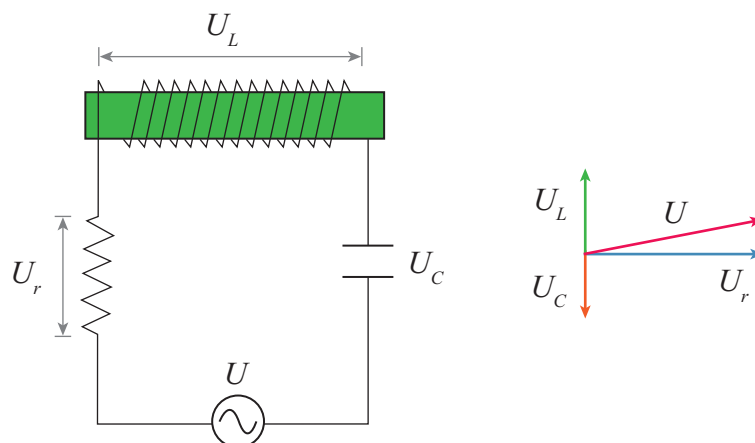


Figura 1.10 – Um circuito formado pela associação em série de um resistor, um indutor e um capacitor (chamado circuito RLC) e o gráfico de vetores correspondente.

A aplicação do teorema de Pitágoras para estes vetores nos dá

$$U = \sqrt{U_r^2 + (U_L - U_C)^2} = I\sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

## 1.9 Potência instantânea e potência eficaz

Da mesma maneira que nas aplicações práticas muitas vezes o que nos interessa não são os valores instantâneos de corrente e voltagem, mas sim seus valores médios, para a potência o mesmo se aplica. A potência em um circuito é dada, a cada instante, pelo produto da voltagem pela corrente, ou seja  $P(t) = U(t) \times I(t)$ . A unidade de potência é o Watt.

Para calcularmos a potência, basta multiplicarmos, para um certo circuito arbitrário, a tensão aplicada a ele  $U(t) = U_M \text{sen } \omega t$  e pela corrente  $I(t) = I_M \text{sen } (\omega t - \varphi)$ , defasada em relação à tensão. Logo, temos

$$P(t) = U(t) \times I(t) = U_M I_M (\cos\varphi \text{sen}^2 \omega t - \text{sen}\varphi \text{sen}\omega t \cos\omega t)$$

Mas temos também que, das relações bem conhecidas da trigonometria

$$\text{sen}^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2};$$

$$\text{sen}\omega t \cos\omega t = \frac{\text{sen} 2\omega t}{2}.$$

Portanto, podemos reescrever a potência como

$$P(t) = \frac{U_M I_M}{2} \cos\varphi - \frac{U_M I_M}{2} \cos\varphi \cos 2\omega t - \frac{U_M I_M}{2} \text{sen}\varphi \text{sen} 2\omega t$$

Este é o valor da potência instantânea. Para a potência média, ou seja, o valor médio durante o período, basta calcularmos o valor médio das funções trigonométricas que aparecem na expressão acima. Notamos porém que o primeiro termo do lado direito da equação é uma constante (independente de  $t$ ) e o valor médio de uma constante é a própria. Já os outros dois termos tem valor médio igual a zero. Portanto, a potência média ou eficaz de um circuito arbitrário é dada por

$$\langle P(t) \rangle = \frac{U_M I_M}{2} \cos \varphi$$

Uma vez que os valores eficazes da corrente e voltagem são dados por  $I = I_M / \sqrt{2}$  e  $U = U_M / \sqrt{2}$  respectivamente, podemos reescrever a fórmula acima como

$$\langle P(t) \rangle = UI \cos \varphi \quad (1.12)$$

Outra grandeza importante num circuito é o chamado fator de qualidade ou simplesmente fator- $Q$ . Para sistemas com amortecimento fraco, ou seja, quando  $\beta^2 \leq \omega_0^2$  o fator- $Q$  é aproximado pela expressão

$$Q \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Outra fórmula bastante útil para o cálculo do fator de qualidade é

$$Q \approx 2\pi \frac{W}{\delta W}$$

onde  $W$  é a energia armazenada no sistema e  $\delta W$  é o decréscimo da energia durante um período de oscilação  $T$  (não é difícil mostrar a equivalência das duas expressões). Ele é assim uma medida de quão dissipativo o circuito é, ou seja, quanta energia é perdida pelo sistema (geralmente na forma de calor).

## Resumo

Neste capítulo estudamos as propriedades fundamentais que definem uma corrente alternada. Estudamos em particular as correntes alternadas senoidais, de grande aplicação prática. Vimos as propriedades básicas de circuitos simples submetidos a tensões alternadas e como isto leva a uma defasagem entre correntes nos diversos elementos do circuito e tensões. Definimos as propriedades “eficazes” (valores médios temporais da corrente, voltagem e potência).

## Problemas resolvidos

**1) Oscilações livres (não amortecidas)** – Oscilações livres não amortecidas ocorrem num circuito que contenha um indutor  $L$  e um capacitor  $C$  e cuja resistência seja zero (os fios são ideais e os elementos do circuito possuem resistência interna nula). Imagine que tenhamos carregado o capacitor com uma voltagem  $U_M$ . Calcule a voltagem induzida no indutor quando a energia magnética nele acumulada é igual a energia acumulada no campo elétrico no capacitor.

**Solução:** De acordo com a lei de Ohm temos que  $R = U + E$ , onde  $U$  é a voltagem no capacitor e  $E$  a voltagem induzida na bobina. No nosso caso  $R = 0$  e portanto  $U = -E$ . Nos instantes de tempo onde a energia é igualmente dividida entre capacitor e indutor temos que

$$\frac{CU_M^2}{2} = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = 2 \frac{CU^2}{2}$$

onde  $U = U_M / \sqrt{2}$ . Disto sai que  $E = U_M / \sqrt{2}$ .

**2) Circuito oscilante** – Um circuito oscilante consiste de um indutor e um capacitor (a resistência é nula). A bobina (indutor) está sob ação de um campo magnético externo constante. No instante  $t = 0$  o campo é desligado e o fluxo magnético  $\Phi$  sofre uma diminuição abrupta, gerando uma corrente induzida no indutor. Calcule a corrente no circuito como função do tempo  $t$ .

**Solução:** Ao desligarmos o campo externo a variação abrupta do fluxo magnético induz uma corrente na bobina. De acordo com a lei de Ohm, temos

$$RI = -\frac{d\Phi}{dt} - L \frac{dI}{dt}$$

onde em nosso caso  $R = 0$ , e portanto  $\dot{\Phi} + L\dot{I} = 0$  o que nos dá  $\Phi = LI_0$ , com  $I_0$  a corrente inicial imediatamente após o desligamento do campo externo. Imediatamente após este desligamento temos a seguinte equação diferencial

$$\frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I = 0$$

Para chegarmos à segunda equação derivamos a primeira uma vez no tempo e usamos o resultado conhecido que  $dq/dt = I$ . A equação que assim obtivemos nada mais é que a equação do

oscilador harmônico (sistema massa-mola) onde  $I$  desempenha o papel da posição da massa,  $L$  é a inércia (massa) e  $C$  a força restauradora (a mola). A solução procurada portanto é da forma

$$I(t) = I_M \cos(\omega t + \alpha)$$

Como toda equação diferencial ordinária de segunda ordem, precisamos de duas condições iniciais para determinar a amplitude  $I_M$  e a fase  $\alpha$ . Porém, no problema em questão temos

$$I(0) = 0; \quad \dot{I}(0) = 0$$

onde a segunda condição surge do fato que no momento inicial (o desligamento do campo), o capacitor estava descarregado. Com estas condições achamos que  $\alpha = 0$  e  $I_M = I_0$ . Portanto a solução que procuramos é

$$I(t) = I_0 \cos(\omega_0 t) = \frac{\Phi}{L} \cos(\omega_0 t)$$

onde  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

**3) Fator de qualidade de um circuito** – Um circuito oscilatório de pouca resistência e capacitância  $C$ , indutância  $L$  mantém as oscilações através do fornecimento de uma potência média  $\langle P \rangle$ . Calcule o fator- $Q$  deste circuito para que mantenhamos as oscilações de voltagem com amplitude máxima  $U_M$  no capacitor.

**Solução:** Para resolvermos este problema é importante que olhemos inicialmente como se comporta um oscilador harmônico amortecido. O amortecimento (dissipação de energia) se dá pela inclusão de uma resistência (que é representado no caso do sistema massa-mola pelo atrito ou viscosidade do meio). Para manter as oscilações, somos obrigados a fornecer energia ao sistema através de uma força externa (ou fonte de voltagem externa). A equação que rege este sistema é

$$L \frac{dI}{dt} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = V_{\text{externo}} \quad \rightarrow \quad L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = V_{\text{externo}}$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{V_{\text{externo}}}{L}$$

Esta é exatamente a equação de um oscilador harmônico amortecido e forçado. No nosso caso estamos considerando que não há fontes externas e portanto podemos escrever nossa equação como

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

A solução desta equação diferencial é da forma

$$q(t) = q_M e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$$

onde  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$  com  $\alpha$  e  $q_M$  determinados pelas condições iniciais. Apesar da carga (ou corrente) oscilar como uma função harmônica, sua amplitude  $a \equiv q_M e^{-\beta t}$  decai com o tempo. Há assim algumas quantidades que caracterizam o amortecimento. O fator de amortecimento  $\beta$  ou tempo de relaxação  $\tau = 1/\beta$  é o tempo necessário para que a amplitude diminua de um fator  $e = 2.78\dots$  de seu valor inicial. O decremento logarítmico  $\lambda$  do amortecimento é o logaritmo neperiano de duas amplitudes sucessivas separadas por um período  $T$  de oscilação

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T$$

O fator de qualidade ou fator- $Q$  de um circuito é definido como sendo

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}$$

Voltando agora ao nosso problema temos que  $W = CU_M^2 / 2$  e  $\delta W = \langle P \rangle T$ . No nosso caso podemos aproximar o período  $T$  do período do oscilador não amortecido  $T_0$ , ou seja  $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$  e portanto

$$Q = \frac{U_M^2}{2\langle P \rangle} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

**4) Oscilações estacionárias** – Uma bobina de indutância  $L$  e resistência  $R$  é conectada no momento  $t=0$  a uma fonte de tensão externa  $U(t) = U_M \cos(\omega t)$ . Ache a corrente no circuito como função do tempo.

**Solução:** Ao ligarmos um circuito em uma fonte externa (de modo a suprir o sistema com energia e evitar assim que suas oscilações

amorteçam, indo a zero), há um período inicial onde o cálculo das correntes e voltagens é bastante difícil. Este período, chamado de período transiente, leva apenas uma fração de segundo, até que o sistema passe a oscilar com a mesma frequência da fonte externa. Quando isto ocorre dizemos que o sistema atingiu o regime estacionário ou seja, seu comportamento no tempo passa a ser bem comportado (não devemos confundir estacionário com estático!). Para o sistema em questão temos a equação diferencial

$$\dot{I} + (R/L)I = U_M \cos(\omega t)$$

Um resultado geral da teoria de equações diferenciais nos diz que a solução desta equação não homogênea é dada pela soma da solução geral da solução homogênea (ou seja, com o lado direito igual a zero) mais uma solução particular da equação não homogênea. Esperamos que a solução seja assim dada por

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

A interpretação física desta solução é a seguinte: a corrente é proporcional ao potencial aplicado dividido pela resistência total do sistema (devido a resistência dissipativa  $R$  e a resistência à passagem de corrente devido a força eletromotriz induzida na bobina). Esperamos que a corrente oscile com a mesma frequência angular  $\omega$  da fonte externa mas tenha uma defasagem em relação à mesma (essa defasagem depende de  $L$  e  $R$ ). Quanto ao primeiro termo, ele representa o amortecimento.

Para calcular a constante  $A$  utilizamos a condição inicial

$$I(t) \sim \cos(\omega t - \varphi), \text{ de onde segue que } A = -\frac{U_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \varphi$$

A fase  $\varphi$  vale  $\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}$ . A solução portanto é

$$I(t) = \frac{U_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left( \cos(\omega t - \varphi) - e^{-\frac{R}{L}t} \cos \varphi \right)$$

Para tempos suficientemente grandes o segundo termo entre parênteses torna-se desprezível e a solução estacionária  $I(t) \sim \cos(\omega t - \varphi)$ .

**5) Oscilações forçadas** – Um capacitor e um resistor estão conectados a uma fonte alternada de amplitude  $U_M$ . A amplitude da corrente estacionária é  $I_M$ . Ache a fase entre a corrente e a fonte de tensão externa.

**Solução:** no nosso caso temos

$$U(t) = U_M \cos(\omega t); \quad I(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi)$$

A fase  $\varphi$  é dada pela relação  $\tan \varphi = -\frac{1}{\omega CR}$ . O valor da capacitância pode ser calculado da relação

$$I(t) = \frac{U_M}{\sqrt{R^2 + (1/\omega^2 C^2)}}$$

e portanto

$$C = \frac{1}{\omega \sqrt{(U_M / I_M)^2 - R^2}}$$

Substituindo esta expressão na fórmula para a fase temos

$$\tan \varphi = -\sqrt{(U_M / RI_M)^2 - 1}$$

O valor negativo da fase indica que a corrente está adiantada em relação à voltagem.

## Problemas propostos com respostas

**1)** Qual a reatância de um capacitor de  $7,2 \mu\text{F}$  quando submetido às frequências de: (a)  $60,0 \text{ Hz}$  e (b)  $1,00 \text{ MHz}$ ?

Resposta: (a)  $2,31 \times 10^3 \Omega$ ; (b)  $1,3 \text{ m}\Omega$

**2)** Faça um gráfico da impedância de um capacitor de  $5,8 \mu\text{F}$  como função da frequência entre  $10 \text{ Hz}$  e  $1000 \text{ Hz}$ .

**3)** Qual a indutância  $L$  do primário de um transformador que, quando submetido a uma tensão de  $60 \text{ Hz}$  e um potencial de entrada de  $110 \text{ V}$  “puxa” uma corrente de  $2,2 \text{ A}$ ?

Resposta:  $0,13 \text{ H}$



4) Qual a impedância total, o ângulo de fase, e o valor quadrático médio (rms) da corrente em um circuito  $RLC$  conectado a uma fonte de 10,0 kHz, 800 V (rms) se  $L = 32,0$  mH,  $R = 8,70$  k $\Omega$  e  $C = 5000$  pF?

Resposta: 8,78 k $\Omega$ ; -0,134 rad; 91,1 mA.

5) a) Determine a fórmula para a potência média dissipada  $\langle P \rangle$  dissipada em um circuito  $RLC$  com função das grandezas  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $\omega$  (frequência da fonte) e  $V_0$  (amplitude da voltagem na fonte).

b) Em qual frequência a potência dissipada é máxima?

c) Ache a fórmula aproximada para a largura  $\Delta\omega$  do pico de ressonância na potência média (a largura é definida como a diferença entre as duas frequências angulares onde  $\langle P \rangle$  tem metade do valor de pico, ou seja, entre o valor de  $\omega$  a esquerda e a direita do pico).

Resposta:  $\frac{V_0^2 R}{2R^2 - (\omega L - 1/\omega C)^2}$ ;  $\omega_1^2 = 1/LC$ ;  $\Delta\omega = R/L$ .

6) Um amplificador de som tem conexões de saída de 4 $\Omega$ , 8 $\Omega$  e 16 $\Omega$ . Dispomos de 2 alto-falantes de 8 $\Omega$  que são conectados em paralelo. A qual terminal eles devem ser conectados?

Resposta: ao terminal de 4 $\Omega$ .

7) a) Qual a corrente quadrática média de um circuito  $RC$  em série se  $R = 6,0$  k $\Omega$ ,  $C = 0,80$   $\mu$ F e a voltagem média aplicada é de 120 V a 60 Hz?

b) Qual o ângulo de fase entre a voltagem e a corrente?

c) Qual a potência dissipada pelo circuito?

d) Qual o valor lido por um voltímetro sobre  $R$  e  $C$ ?

Resposta: (a) 18 mA; (b) 0,506 rad; (c) 1,8 W;  
(d)  $V_R = 105$  V;  $V_C = 58$  V

## Referências

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica**. Vol. 3. São Paulo: Edgar Blücher, 2005.

Os livros do Prof. Nussenzveig estão entre os melhores livros disponíveis em nível de Física Básica para universitários. Todos os conceitos físicos são tratados com profundidade e o aparato matemático necessário é introduzido.

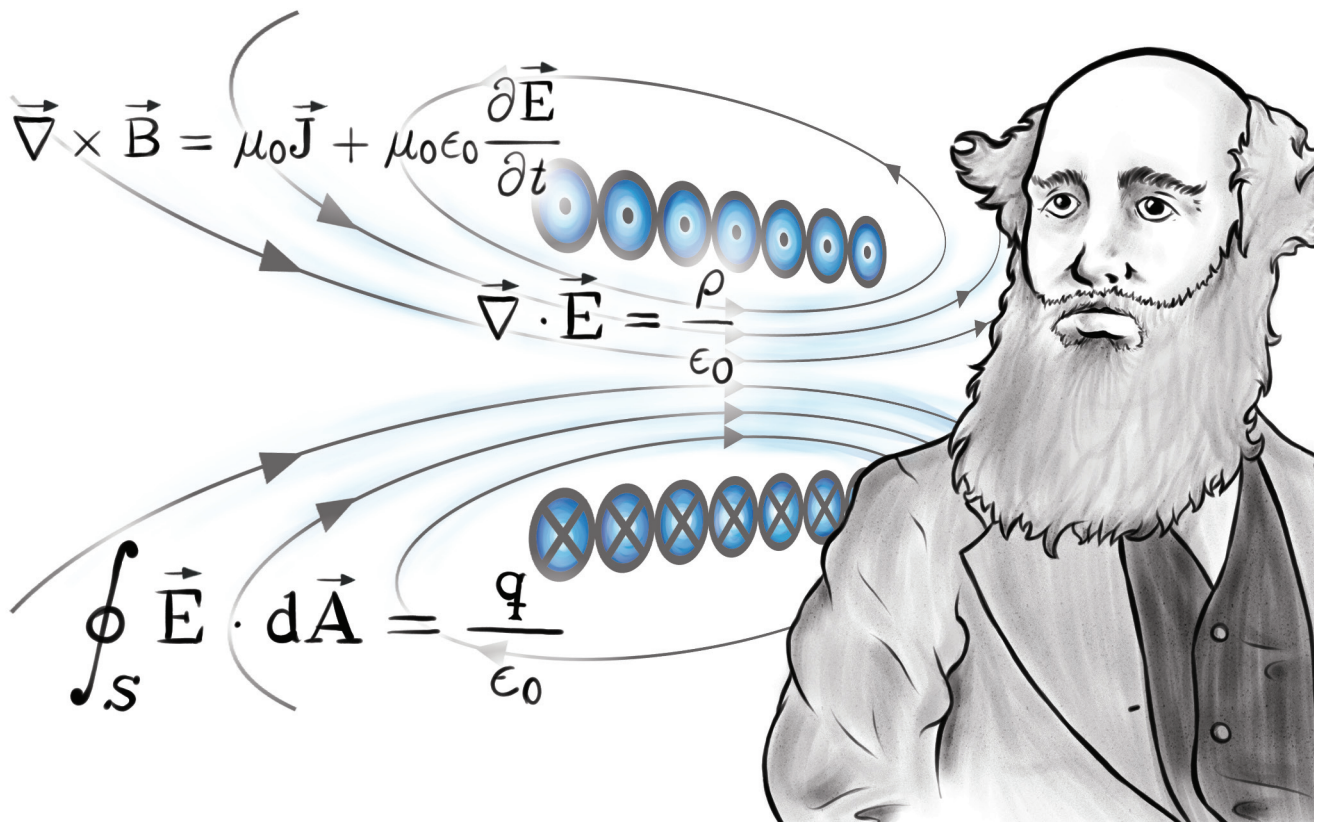
TIPLER, Paul A. **Física para Cientistas e Engenheiros**. 4. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan.

O livro de Tipler é bastante acessível no seu conteúdo e foi escrito para programas de física geral das universidades americanas. Sua ilustrações facilitam a assimilação do conteúdo.

**Wikipedia** ([www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org))

Esta “enciclopédia” online é uma excelente fonte de informações históricas sobre personalidades da Física e conceitos. Os artigos relacionados às ciências são normalmente escritos por profissionais e bastante confiáveis.

## 2 Equações de Maxwell





## 2 Equações de Maxwell

*Ao final deste capítulo estaremos em condições de: interpretar fisicamente os conceitos matemáticos de divergente e rotacional; utilizar estes operadores matemáticos para caracterizar propriedades de campos vetoriais.*

Neste capítulo estudaremos as equações básicas do eletromagnetismo na sua forma diferencial e veremos como, através da reformulação destas equações, J. C. Maxwell conseguiu mostrar a existência de um novo fenômeno físico: o surgimento de um campo magnético a partir da variação temporal de um campo elétrico.

### 2.1 As leis básicas do eletromagnetismo

Podemos dizer que todos os ingredientes básicos do Eletromagnetismo se encontram nas quatro equações por nós já estudadas:

- *Lei de Gauss (Fluxo do Campo Elétrico)*

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

- *Lei da Indução de Faraday (Lei da Circulação do Campo Elétrico)*

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.2)$$

- *Lei da inexistência de Monopolos Magnéticos (Fluxo do Campo Magnético)*

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.3)$$

- *Lei de Ampère (Lei da Circulação do Campo Magnético)*

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (2.4)$$

É importante que atentemos sempre para o fato que nestas expressões, por exemplo, na Lei da Indução de Faraday, que a integral de linha é feita sobre a curva  $C$  que delimita a área aberta  $S$  sobre a qual a integral de superfície é realizada. Os limites de integração em ambos os lados das equações estão geometricamente associados.

Em princípio, se quisermos estudar quaisquer fenômenos eletromagnéticos, como por exemplo a determinação dos campos sobre uma superfície de forma arbitrária, basta resolver estas equações. Caso estejamos interessados na determinação dos campos dentro da matéria (pois as equações acima se referem ao vácuo), é necessário que façamos algumas modificações, como veremos neste capítulo. Para aquelas situações em que estamos interessados no movimento de partículas carregadas na presença de campos eletromagnéticos, basta acrescentarmos a estas leis a chamada Força de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (2.5)$$

e poderemos assim descrever a dinâmica de qualquer corpo carregado num campo eletromagnético.

Todas as leis integrais apresentadas acima têm uma interpretação física bastante clara: a Lei de Gauss, que recebe este nome em função de um teorema mais geral da Matemática, demonstrando por C. F. Gauss e M.V. Ostrogradsky, acerca de integrais de superfície, simplesmente nos diz que se houver uma região fechada no espaço (um volume) por cuja superfície o fluxo de campo elétrico é diferente de zero, então há dentro deste volume uma fonte de campo: um corpo carregado com carga  $q$ .

A segunda lei nada mais é que a lei de Faraday escrita de forma a relacionar o campo elétrico induzido pela variação do fluxo do campo magnético. Como a integral de linha em um circuito fechado do campo elétrico é igual à diferença de potencial (ddp) entre os dois pontos, esta equação relaciona a ddp com a variação do campo magnético. É importante ressaltar que para um campo *eletrostático* (ou seja, independente do tempo), a integral de linha num circuito fechado vale zero (campo conservativo).

A terceira lei diz que não existem fontes monopolares de campos magnético. Diferente do campo elétrico, onde é possível termos monopolos (cargas só positivas ou só negativas), para o campo magnético não existem "cargas" que o geram, mas sim dipolos (chamados neste caso de Norte e Sul). Qualquer fonte de campo magnético sempre tem os dois dipolos em si, razão pela qual o tanto de linhas que saem de um pólo (norte) entra pelo outro pólo e fecham-se em si – linhas de campo magnético são sempre linhas fechadas, não tendo um começo nem um fim.

A quarta lei nos diz que uma corrente estacionária (independente do tempo) pode gerar um campo magnético, ou seja, a "fonte" de campos magnéticos são correntes elétricas.

Podemos notar que há certa falta de simetria nestas equações. O que queremos dizer com isso? Se olharmos atentamente para as equações, poderíamos escrevê-las como

- *Lei de Gauss*

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

- *Lei da Indução de Faraday*

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dq_B}{dt} - \frac{d}{dt} \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

- *Lei de Gauss para Campos Magnéticos*

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 q_B$$

- *Lei de Ampère*

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} + \alpha \frac{d}{dt} \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Nestas equações introduzimos a quantidade  $q_B$  (uma carga magnética) e uma “corrente magnética”  $dq_B / dt$  bem como, na última expressão, o termo proporcional à derivada temporal do fluxo de  $\vec{E}$ , com um termo de proporcionalidade  $\alpha$  (por questões dimensionais). Não há nada que nos impeça de modificarmos as leis como acabamos de fazer – e nossa motivação em fazê-lo foi por uma questão, como já dito, de simetria, uma propriedade da física de um modo geral que desempenha um importante papel na natureza. Porém, nossa vontade em tornar as equações mais simétricas deve, como toda ciência, condizer com os resultados obtidos da experiência – e esta nos mostra que até os dias de hoje foi impossível detectar, na natureza, uma carga magnética (monopolo)  $q_B$  e muito menos uma “corrente magnética”. Portanto, podemos sim escrever esta nova lei de Gauss para o campo magnético desde que acrescentemos a condição  $q_B = 0$ . Obviamente este termo pode ser apagado completamente das equações, mas não há em princípio nada contra escrevermos estes termos desde que chamemos a atenção para o fato que monopolos magnéticos ainda não foram observados na natureza. Porém, o que dizer do termo

$$\alpha \frac{d}{dt} \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

da última equação? Da mesma maneira que um campo magnético variando no tempo gera um campo elétrico, por que não haveria de ser verdadeira a recíproca, quer dizer, a variação temporal do fluxo de um campo elétrico levaria ao surgimento de um campo magnético?

Na realidade isto ocorre, e a descoberta deste termo adicional nas equações básicas do eletromagnetismo foi um dos grandes feitos do físico escocês J. C. Maxwell que, após um intenso estudo do trabalho de Faraday, aplicou seus profundos conhecimentos matemáticos para colocar as equações do eletromagnetismo na forma como hoje as conhecemos. Porém, antes de entendermos melhor o trabalho e os resultados de Maxwell, é necessário que façamos uma pequena digressão matemática sobre as equações acima.

## 2.2 O eletromagnetismo em forma integral

As equações básicas do eletromagnetismo, na forma como as estudamos até o momento, são expressas na forma de equações integrais para os campos, quer dizer, os campos elétrico e magnético aparecem nestas equações dentro de integrais (e em algumas delas também na forma de derivadas). Olhemos primeiramente para a equação de Gauss para o campo elétrico: se conhecemos a distribuição de cargas, a fim de determinarmos a partir dela qual o campo elétrico que será gerado no espaço, temos que de alguma maneira desenvolver métodos matemáticos que nos permitam isolar o campo elétrico num lado da equação para então expressá-lo como função das variáveis do problema.

No entanto, a dificuldade associada à resolução de uma equação integral está no fato que uma integral se estende por uma grande região do espaço (seus limites de integração) e a integral “vê”, por assim dizer, o integrando não apenas num ponto  $\vec{r}$  do espaço, mas numa infinidade de pontos contidos dentro do volume de integração.

Estamos assim lidando com um integrando (que é quem no fundo queremos determinar) numa região extensa do espaço. Apenas em situações muito especiais na qual o integrando é uma constante sobre toda uma superfície fechada do espaço, podemos então tirá-lo para fora da integral e isolá-lo de um lado da equação. Nestas situações especiais, com simetrias bem definidas, é possível utilizar a lei de Gauss para calcular  $\vec{E}$ . Na maior parte das situações de interesse isso porém não ocorre.



O que fazer então? Uma possibilidade é tentarmos diminuir a superfície  $S$  de integração de tal modo que o volume por ela encerrado se torne infinitesimal – em outras palavras, encolhemos a superfície de tal maneira que, em um sentido matemático de limite, ela envolva apenas um ponto  $\vec{r}$  do espaço. Nesta situação a integral sobre a superfície infinitesimal seria matematicamente equivalente ao valor da função  $\vec{E}(\vec{r})$  multiplicado pela área  $dS$ , pois o volume envolvido por  $S$  é tão pequeno que ele envolve apenas um ponto  $\vec{r}$ . Porém, como dito, isto só faz sentido no limite  $dS \rightarrow 0$  e neste caso teríamos  $\|\vec{E}(\vec{r})\|dS \rightarrow 0$ . Mas é possível resolver este problema do cálculo do fluxo infinitesimal de maneira apropriada e obter o resultado desejado sem que todas as grandezas de interesse tendam a zero.

Para melhor entendermos estes pontos, faremos aqui agora uma digressão sobre propriedades matemáticas de campos vetoriais.

## 2.3 As propriedades de campos vetoriais: como caracterizá-los

Uma vez que campos eletromagnéticos são campos vetoriais, é conveniente que nos familiarizemos com as propriedades matemáticas destes objetos, através de uma rápida introdução à *análise vetorial*, que é a área da matemática que se ocupa de estudar os vetores e suas propriedades.

Há basicamente três grandezas que nos interessam diretamente quando estudamos campos vetoriais: o divergente (o fluxo infinitesimal de um campo), o rotacional (a circulação infinitesimal de um campo) e o gradiente, embora este último seja uma propriedade de campos *escalares*, ou seja, o gradiente é um vetor obtido a partir de um campo escalar. Mas por questão de completeza, e para tornar as idéias mais compreensíveis, começaremos nosso estudo pelo gradiente, pois já estamos familiarizados com este conceito da análise vetorial.

## 2.4 O gradiente

Imagine que temos à nossa disposição uma função escalar  $\varphi$  que dependa das coordenadas no espaço, ou seja,  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ . Por exemplo,  $\varphi$  pode ser a temperatura  $T$  de uma sala, onde a cada ponto

do espaço temos pequenas diferenças locais de temperatura. Se quisermos saber o quanto a temperatura varia de um ponto a outro da sala, não basta calcularmos a derivada de  $T$ , pois a variação pode ser diferente se tomarmos um ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  e o compararmos com um ponto que está no mesmo plano horizontal  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0)$  ou que se encontra acima dele, em  $(x_0, y_0, z_0 + \Delta z)$ . Em outras palavras, é preciso calcular uma derivada que dependa da direção relativa entre os dois pontos que usamos para calcular a derivada. Esta derivada direcional é chamada de *gradiente* e é definida como

$$\text{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{d\varphi}{dx}\hat{i} + \frac{d\varphi}{dy}\hat{j} + \frac{d\varphi}{dz}\hat{k} \quad (2.6)$$

onde  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  são os versores (vetores unitários) nas direções dos eixos  $(x, y, z)$  respectivamente.

Como o incremento  $d\varphi$  de uma função  $\varphi$  devido a um deslocamento no espaço é  $d\vec{l} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$  é dado por

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz$$

podemos escrever este incremento na forma

$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\vec{l} \quad (2.7)$$

## 2.5 O fluxo de um vetor

Para facilitar as discussões das propriedades de um campo vetorial, podemos pensar em um líquido, cujas propriedades de escoamento são caracterizadas por um campo de vetores de velocidade. Todos os resultados que deduziremos são extensíveis a quaisquer campos vetoriais, sejam eles de velocidade ou não.

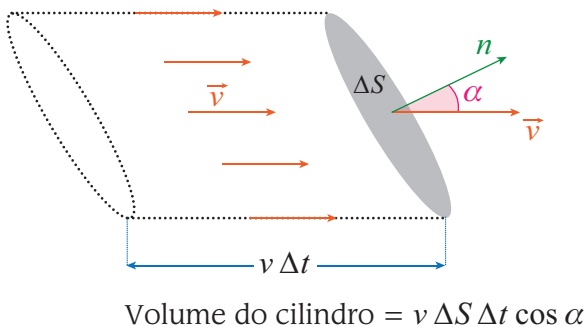


Figura 2.1 – Volume de um fluido que atravessa uma área  $\Delta S$  num tempo  $\Delta t$

O volume de um líquido que flui através de uma superfície imaginária  $S$  é denominado *fluxo do líquido através da superfície*. Sendo a superfície muitas vezes arbitrária, para calcularmos o fluxo tomemos um pequeno elemento de área de tamanho  $\Delta S$ . Pela figura 2.1, podemos ver que o volume de fluido que escoou pela superfície durante um tempo  $\Delta t$  é igual ao volume do cilindro cuja tampa tem uma área  $\Delta S$  e cuja altura tem tamanho  $v\Delta t$

O fato da tampa do cilindro não ser perpendicular à altura do mesmo, faz com que tenhamos que considerar, no cálculo do volume, um fator proporcional a  $\cos(\alpha)$  (isto pode ser melhor entendido utilizando o método matemático de **tessalização** para o cálculo de áreas ou volumes).

Ficamos assim com a expressão

$$\Delta V = v \Delta S \Delta t \cos \alpha$$

que nos diz quanto é o volume de líquido que passará pela área  $\Delta S$  num tempo  $\Delta t$ . Dividindo este volume pelo intervalo de tempo obtemos o fluxo  $\Delta \Phi$ :

$$\Delta \Phi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = v \Delta S \cos \alpha$$

Considerando agora o limite infinitesimal temos

$$d\Phi = \frac{dV}{dt} = v \cos(\alpha) dS = v_n dS$$

onde  $v_n$  é a projeção do vetor velocidade na direção do vetor normal à superfície  $dS$ . É possível escrever esta equação também de outra maneira, definindo para tanto o vetor área  $d\vec{S}$ , que é um vetor que tem como módulo o tamanho da área  $dS$  e como direção e sentido aqueles da normal  $\hat{n}$  à superfície

$$d\vec{S} = dS \hat{n}$$

de modo que podemos agora escrever

$$d\Phi = \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

e o fluxo de líquido por uma área  $S$  formada pela soma de todas as áreas infinitesimais  $dS$  é dado por

$$\Phi = \int d\Phi = \oiint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (2.8)$$

Esta fórmula define o *fluxo de um vetor arbitrário  $v$  por uma área  $S$  qualquer*. É muito importante que atentemos para o fato que o fluxo de um vetor é definido em termos de uma superfície *orientada* por meio de uma normal. Mas o que exatamente queremos dizer com isso? Para melhor ilustrar este ponto, olhemos para algumas situações particulares onde a questão da orientação ficará mais clara. Para tanto olhemos a figura 2.3:

O fluxo é dado pela soma dos produtos das projeções dos vetores normais à superfície (aqui representamos

Tessalização: palavra de origem grega que significa cortar: se cortarmos o cilindro oblíquo em partes, podemos remontá-lo de modo a obter um cilindro reto.

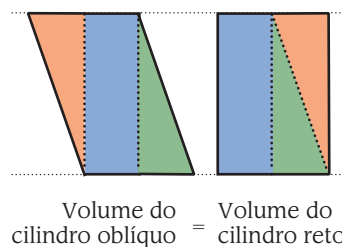


Figura 2.2 – Ilustração da área de um cilindro oblíquo comparada com a mesma área de um cilindro reto pelo método da tessalização (corte).

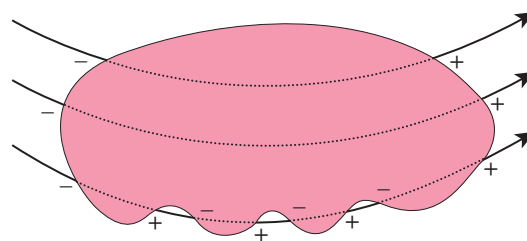


Figura 2.3 – O fluxo através de uma área fechada. Os vetores, representados aqui por suas linhas de campo, entram e saem o mesmo número de vezes da superfície, de modo que o fluxo total é zero.

apenas as linhas de campo) pelo vetor normal. Porém, nos pontos onde os vetores “entram” na superfície, o vetor e a normal formam entre si um ângulo obtuso, e portanto o produto escalar dos dois vetores é negativo (estes pontos estão representados na figura por meio de um sinal negativo). Nos pontos onde os vetores “saem” da superfície, os ângulos entre estes e as normais é agudo, e portanto o produto escalar é positivo (representado por sinais positivos na figura). Assim, a contribuição total do fluxo será uma combinação de termos positivos e negativos e, ao final, teremos que o fluxo total será zero, uma vez que podemos ver, graficamente, que os vetores que entram por um lado acabam saindo por outro. Outro exemplo claro seria aquele dado por um pedaço de uma tira de Möbius (figura abaixo):

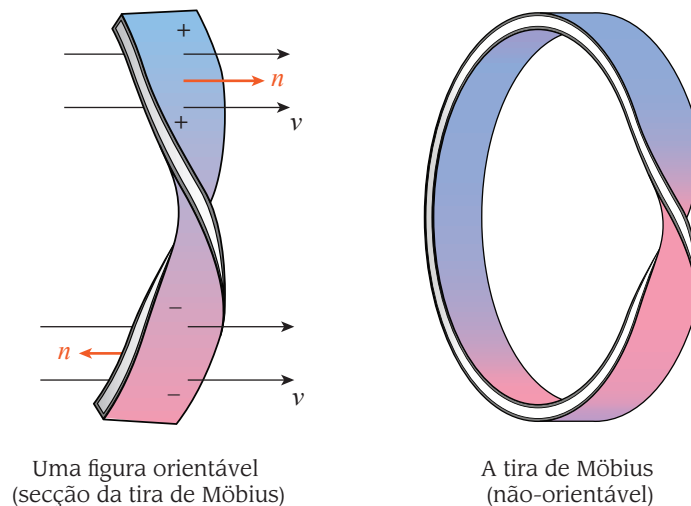


Figura 2.4 – Um pedaço da tira de Möbius através da qual o fluxo é zero e, à direita, a tira de Möbius inteira.

August Ferdinand Möbius (1790 - 1868), matemático alemão, é bem conhecido por seu trabalho em topologia e pela concepção da tira de Möbius, uma superfície bidimensional que possui apenas um lado.  
Fonte: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Mobius.html>

A tira de **Möbius** pode ser construída tomando-se uma tira comprida de papel, torcendo a parte de baixo em relação à parte de cima e unindo as duas pontas. Se pudéssemos caminhar por esta tira veríamos que ela não é orientável, ou seja, não tem um lado de dentro nem de fora. No caso de um pedaço desta tira, a orientação é possível, como podemos ver na figura acima: na parte superior da superfície o fluxo contribui positivamente, pois normal e vetor estão no mesmo sentido. Já pelo lado de baixo, a contribuição é negativa uma vez que os vetores são colineares mas tem sentidos opostos. Notemos aqui um fato muito importante: para uma superfície aberta, a orientação da normal é arbitrária, e cabe a nós decidir para que lado a normal aponta. Para superfícies fechadas, convencionou-se tomar a normal como sendo aquela pelo lado de fora da superfície.

## 2.6 O fluxo infinitesimal por unidade de volume: a divergência

Imaginemos um fluxo de um líquido incompressível (cuja densidade não varia) e imaginemos uma superfície  $S$  fechada. Se no volume confinado pela superfície não há o aparecimento nem o desaparecimento de líquido, ou seja, o fluxo que entra no volume é igual ao fluxo que sai, então podemos dizer que o *fluxo pela superfície* (a diferença do que entra pelo que sai) é zero e portanto não há *sumidouros* nem *fontes* do líquido dentro do volume em questão. Caso haja fontes e sumidouros, o fluxo será diferente de zero, pois dependendo da maior quantidade de fontes ou sumidouros, o fluxo será positivo ou negativo, respectivamente.

Porém, como discutimos na introdução deste capítulo, o fluxo por uma superfície é uma medida de certo modo grosseira acerca das verdadeiras propriedades *locais* do escoamento, uma vez que se tomamos uma superfície  $S$  grande o suficiente, a única informação sobre o escoamento é seu valor sobre uma grande região do espaço. E não poderia haver variações locais, de ponto a ponto, importante para caracterizarmos o campo vetorial em cada ponto  $\vec{r}$  do espaço?

Podemos obter um fluxo em torno de um ponto apenas fazendo o volume  $V$  circundado pela superfície  $S$  ter um tamanho infinitesimal (e portanto a superfície também o será). Podemos assim calcular o fluxo *através de um volume infinitesimal do espaço tão pequeno que dentro dele só haverá um ponto* (obviamente estamos pensando aqui no limite infinitesimal em sentido matemático. Há, porém, um problema. Se o volume  $V$  (ou a superfície  $S$ ) tende a zero, o fluxo tenderá também a zero, pois ele é proporcional a área do volume por onde passa. Isto independente de haver no ponto  $\vec{r}$  uma fonte ou um sumidouro. Trata-se simplesmente de uma questão matemática.

Para melhor compreender este resultado vamos calcular explicitamente o fluxo de um vetor qualquer  $\vec{E}(\vec{r})$  através da superfície de um volume infinitesimal.

Para tanto imaginemos uma caixa de dimensões laterais  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , como ilustra a figura 2.5, pela qual queremos calcular o fluxo de um vetor  $\vec{E}$ .

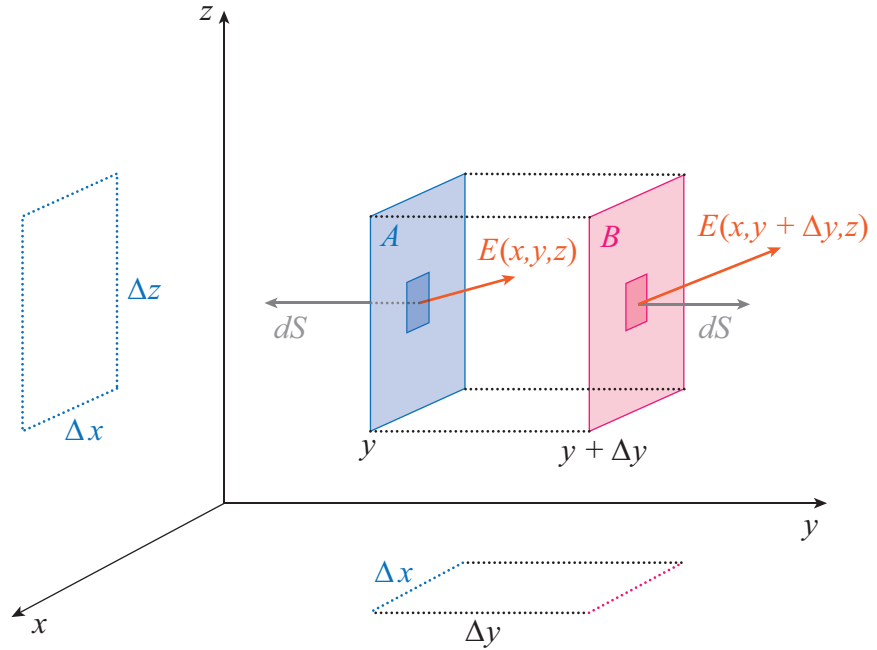


Figura 2.5 – Uma caixa de dimensões laterais.

Para calcular o fluxo vamos tomar inicialmente as duas faces paralelas  $A$  e  $B$  do paralelepípedo de volume  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ . O vetor entra no volume pela face  $A$  e sai pela face  $B$ . Considerando que o ângulo entre o vetor  $\vec{E}(x, y, z)$  e a normal à primeira face é obtuso, ao passo que o ângulo entre o vetor  $\vec{E}(x, y + \Delta y, z)$  é agudo, teremos

$$\Delta\Phi_{xz} = \vec{E}(x, y + \Delta y, z) \cdot d\vec{S}_B - \vec{E}(x, y, z) \cdot d\vec{S}_A$$

$$\Delta\Phi_{xz} = \|\vec{E}(x, y + \Delta y, z)\| dS \cos(\theta_A) - \|\vec{E}(x, y, z)\| dS \cos(\theta_B)$$

$$\Delta\Phi_{xz} = [E_y(x, y + \Delta y, z) - E_y(x, y, z)] dx dz$$

Na passagem da segunda para a terceira equação usamos o fato que o produto escalar entre dois vetores corresponde ao produto do módulo do segundo pelo módulo da projeção do primeiro na direção do segundo, que neste caso é a componente  $y$  do vetor  $\vec{E}(x, y, z)$ . Sabemos porém que, no limite em que  $\Delta y \rightarrow 0$  os valores de  $E_y(x, y + \Delta y, z)$  e  $E_y(x, y, z)$  diferem muito pouco entre si, pois são dados pelo vetor  $\vec{E}(x, y, z)$  em pontos muito próximos entre si. Aplicando assim uma expansão em série de Taylor para o primeiro termo da expressão temos

$$E_y(x, y + \Delta y, z) = E_y(x, y, z) + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial^2 E_y(x, y, z)}{\partial^2 y} \Delta^2 y + \dots$$

Se substituirmos na expressão para o fluxo  $\Delta\Phi$  este resultado para  $E_y(x, y + \Delta y, z)$ , obteremos, desprezando os termos em ordem 2 ou maior em  $\Delta y$ , a expressão

$$\Delta\Phi_{xz} = \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} \Delta y \Delta x \Delta z + O(\Delta^2 y)$$

onde a notação  $O(\Delta^2 y)$  representa termos de ordem igual ou mais elevada que a segunda potência de  $\Delta y$ . Desprezando este termo obtemos finalmente

$$\Delta\Phi_{xz} = \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} \Delta y \Delta x \Delta z$$

Por uma questão de simetria, se agora calcularmos os fluxos pelas outras faces perpendiculares as faces  $A$  e  $B$ , obteremos, respectivamente

$$\Delta\Phi_{yz} = \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Delta\Phi_{xy} = \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} \Delta z \Delta x \Delta y$$

Disto concluímos que o fluxo total infinitesimal

$\Delta\Phi = \Delta\Phi_{xz} + \Delta\Phi_{yz} + \Delta\Phi_{xy}$  será então

$$\Delta\Phi = \left[ \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

No limite em que o elemento de volume vai a zero, o lado direito da equação desaparece. Para que isto não aconteça, definimos assim o *fluxo infinitesimal por unidade de volume*

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta V} = \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} \quad (2.9)$$

que neste caso tem um limite definido. Esta grandeza recebe o nome de **divergente do vetor**  $\vec{E}$  e corresponde ao fluxo do vetor por unidade de volume através de um volume infinitesimal. O divergente pode ser representado pelos símbolos  $\text{div } \vec{E}$  ou  $\nabla$ , onde o símbolo  $\nabla$  (nabla) é o que chamamos de **operador**. Um operador é, como o próprio nome diz, uma expressão matemática que “opera” (atua) sobre uma dada função, transformando-a e acordo com regras bem estabelecidas. Um exemplo de operador é o operador diferencial  $\frac{dy}{dx}$  que ao operar sobre uma função  $f(x)$  reproduz a sua derivada. O operador

nabla é na verdade o que chamamos de um operador vetorial, pois em sua forma completa é dado por

$$\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

ou seja, um vetor cujas componentes, em coordenadas cartesianas, são os operadores diferenciais parciais  $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ . O divergente de um vetor  $\vec{E}$  pode então ser matematicamente interpretado como o produto escalar do operador nabla com o vetor  $\vec{E}$ .

## 2.7 A divergência e o teorema de Gauss-Ostrogradsky: a Lei de Gauss na forma diferencial

Uma das principais propriedades do fluxo infinitesimal por unidade de volume (a divergência) é sua aditividade, ou seja, se tivermos dois volumes adjacentes, o fluxo por eles será a soma dos fluxos por cada um. Notemos que os volumes tem que ser adjacentes, quer dizer, tem que ter uma superfície delimitante em comum. Por exemplo, podemos considerar duas caixas encostadas uma na outra. É fácil compreender esta propriedade de aditividade sem que para isto tenhamos que fazer cálculo: se as caixas estão encostadas uma na outra (digamos elas tem uma face comum que chamaremos  $A$ ), o vetor que sai da primeira tem o mesmo sentido da normal desta face e portanto o fluxo é positivo. Mas a normal da face  $A$  para primeira caixa é diferente da normal da face  $A$  para a segunda caixa, pois na segunda caixa o vetor está entrando nela (e portanto o vetor normal aponta no sentido contrário). Como a área é a mesma (são faces comuns) e os vetores que saem da primeira caixa pela face  $A$  são os mesmos que entram na segunda caixa pela face  $A$ , então ambos os fluxos se cancelam. Podemos, em outras palavras, desconsiderar a face comum e considerar uma caixa maior formada pelas faces das duas caixas que não são comuns. Em outras palavras, é possível dividir qualquer volume finito em pequenos volumes (caixas) infinitesimais e portanto esperamos que a soma de todos os fluxos infinitesimais por unidade de volume sobre o volume total é igual ao fluxo pelo volume finito. Matematicamente temos

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{v} dV = \oiint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (2.10)$$

*Teorema de Gauss- Ostrogradsky*

Este importante resultado matemático relaciona uma integral de volume, sobre um volume  $V$ , do divergente de um vetor arbitrário  $\vec{v}$



com o fluxo deste vetor pela área  $S$  que delimita o volume. Mas este teorema matemático tem uma importante consequência física. Para ver isso, vamos aplicá-lo à Lei de Gauss. Neste caso teremos, segundo a primeira das equações fundamentais do eletromagnetismo, que

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{E} = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (2.10)$$

Ou seja, podemos então dizer que

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (2.11)$$

onde, enfatizamos mais uma vez, o volume é aquele delimitado pela superfície  $S$  sobre a qual fizemos a integral de superfície. Porém, a Lei de Gauss afirma que este fluxo é igual ao valor de todas as cargas dentro do volume  $V$  delimitado por  $S$ . Como as cargas dentro do volume podem ser escritas como a integral sobre o volume da densidade de cargas  $\rho(\vec{r})$  então podemos escrever a expressão acima como

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}) dV$$

Nossa primeira reação ao ver estas equações é identificar os integrandos como sendo os mesmos, afinal temos duas integrais sobre o mesmo volume. Mas devemos aqui tomar certo cuidado: se duas integrais são idênticas, isso não implica que os integrandos também o sejam. Lembremos que uma integral (no caso unidimensional) é a área sob a curva que representa a função sendo integrada (o integrando) e há, certamente, várias funções diferentes entre dois intervalos  $a$  e  $b$  cujas áreas por elas definidas são iguais. Por exemplo

$$\int \left( 2 - \frac{x}{2} \right) dx = \int \left( 1 + \frac{x}{2} \right) dx = 3$$

Porém, se a igualdade de duas integrais vale para quaisquer limites de integração que tomarmos, então neste caso os dois integrandos tem que ser iguais. Mas lembremos que a superfície da Lei de Gauss é arbitrária e pode ter a forma que quisermos – portanto o volume por ela encerrado também o é. Isso faz com que a igualdade entre a integral do divergente do vetor  $\vec{E}$  e a integral da densidade de carga  $\rho(\vec{r})$  vale independente do volume  $V$  por nós escolhido. Conclusão: os integrandos são iguais, quer dizer

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (2.12)$$

Esta é a forma diferencial da Lei de Gauss, também chamada de 1ª equação de Maxwell. Podemos imediatamente estender este resultado para o fluxo do campo magnético, obtendo assim a 2ª equação de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

## 2.8 A circulação de um vetor

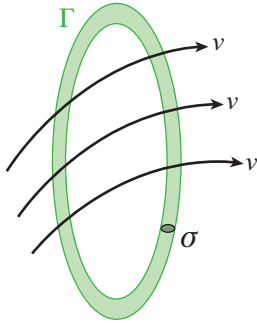


Figura 2.6 – A circulação de um vetor  $\vec{v}$  por um pequeno tubo  $\Gamma$  de seção reta  $\sigma$

Outra grandeza de interesse na caracterização de campos vetoriais é a circulação de um vetor. Imaginemos, como antes, um fluido incompressível e que, de alguma maneira, consigamos congelá-lo instantaneamente em todo seu volume com exceção de um fino tubo, de seção reta  $\sigma$ , fechado sobre si mesmo na forma de uma curva  $\Gamma$ , como ilustra a figura 2.6.

Dependendo das propriedades do campo de velocidades, o líquido ficará parado ou circulará ao longo do tubo em um dos dois possíveis sentidos. Obtemos assim, neste experimento mental, uma caracterização das propriedades de circulação do líquido. Caso ele tenha uma circulação zero, o líquido ficará parado. Se a circulação for diferente de zero, haverá um movimento de líquido pelo tubo. Mas como quantificar esta grandeza? Tomemos o produto da componente da velocidade do líquido ao longo da direção do tubo pelo comprimento  $l$  do tubo, ou seja, assumindo que esta componente de  $\vec{v}$ , que chamaremos de  $v_l$  seja uma constante, temos que a circulação de  $\vec{v}$  ao longo de  $\Gamma$  vale

$$v_l l$$

No caso mais geral, onde temos uma componente de  $\vec{v}$  ao longo da direção da curva  $\Gamma$  (a componente tangencial, a única que nos interessa) que depende da posição ao longo da curva, podemos generalizar nossa definição para

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint v_l dl$$

Devemos aqui tomar o cuidado: não são apenas linhas de campo fechadas ou curvas que possuem uma circulação diferente de zero. Mesmo no caso em que as linhas de campo são perfeitamente retas e paralelas entre si, a circulação pode ser diferente de zero. O exemplo mais típico é aquele do fluxo das águas de um rio, como ilustrado na figura 2.7. Devido à viscosidade, sabemos que a velocidade da água é zero no fundo do rio, aumentando gradativamente à medida que nos aproximamos da superfície. Se calcularmos a circulação do vetor velocidade ao longo de um quadrado, nos trechos  $A$  e  $C$ , onde o vetor  $\vec{v}$  é perpendicular ao

deslocamento vertical, a contribuição do produto escalar de  $\vec{v}$  por  $d\vec{l}$  é zero. Nos trechos  $B$  e  $D$ , onde ambos os vetores são coplanares, no trecho superior o vetor  $\vec{v}$  tem o mesmo sentido que  $d\vec{l}$  e portanto teremos uma contribuição positiva para a circulação. No trecho inferior, essa contribuição será negativa, devido aos sentidos contrários dos vetores e de magnitude menor, pois embora os trechos tenham o mesmo comprimento, o valor de  $\vec{v}$  neste segmento é menor.

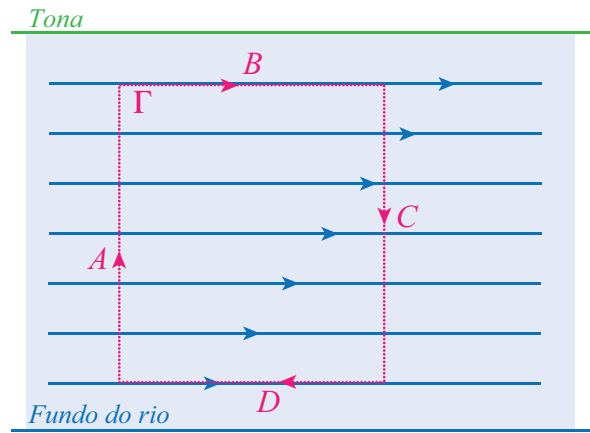


Figura 2.7 – A circulação do vetor velocidade da água em um rio é diferente de zero, embora as linhas de campo de  $\vec{v}$  sejam planas e paralelas entre si.

A circulação de um vetor é uma propriedade aditiva, da mesma maneira que o fluxo. Isso significa que a circulação em torno de dois contornos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  que circundam duas áreas  $S_1$  e  $S_2$  adjacentes é igual à circulação  $\Gamma$  que circunda a área total  $S = S_1 + S_2$ . Podemos ver isso na figura 2.8.

Para melhor entendermos esta afirmação, vamos calcular a soma de duas circulações ao longo de um caminho  $\Gamma$  que pode ser decomposto em duas partes  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  como ilustra a figura 2.9:

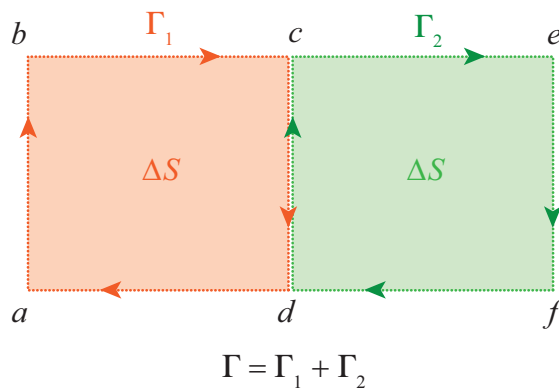


Figura 2.9 – Uma área  $A = 2\Delta S$  de contorno  $\Gamma$  pode ser decomposta em duas áreas adjacentes de tamanho  $A' = \Delta S$  e contornos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . Note que a condição de vizinhança é importante, pois neste caso os contornos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  compartilham um segmento comum  $c - d$  que é percorrido, em cada um dos contornos, em sentidos diferentes.

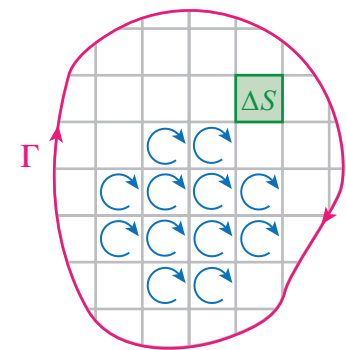


Figura 2.8 – Representação da circulação em torno de uma curva  $\Gamma$  como a soma das circulações pelas várias curvas que circundam as áreas  $\Delta S$ .

Podemos escrever porém estas integrais como uma soma de integrais ao longo dos diferentes trechos que forma os contornos:

$$C_{\Gamma_1} = \int_a^b \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

$$C_{\Gamma_2} = \int_d^c \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_c^e \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_e^f \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_f^d \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (2.13)$$

Podemos porém notar que o terceiro termo da integral sobre  $\Gamma_1$  e o primeiro termo da integral sobre  $\Gamma_2$  são idênticos a menos de um sinal, pois uma integral é feita num sentido (de cima para baixo) ao passo que a outra é feita no sentido contrário (de baixo para cima). Isto significa que o vetor deslocamento  $d\vec{l}$  em ambos os casos tem sentidos contrários e portanto o produto escalar na primeira integral tem o sinal contrário do produto escalar na segunda integral. Portanto os termos se anulam e o que sobra, das integrais, é apenas o contorno total  $\Gamma$ . Aqui vemos a importância da vizinhança entre áreas sobre as quais queremos integrar.

Como qualquer contorno pode ser decomposto numa soma de contornos menores, este resultado se aplica para qualquer curva fechada e quantos contornos menores quisermos considerar. Em outras palavras, a circulação  $C_\Gamma$  pode ser escrita como

$$C_\Gamma = \sum C_{\Gamma_k}$$

## 2.9 A circulação infinitesimal por unidade de área: o rotacional

Esta propriedade de aditividade das circulações nos faz pensar, como no caso do fluxo, em definir uma circulação no entorno de apenas um ponto, ou seja, uma circulação em um contorno tão pequeno de tal modo que ele envolva apenas um ponto  $\vec{r}$ . Fazemos isso não apenas por uma questão puramente matemática, mas sim pelo fato que da mesma maneira que o fluxo por uma superfície macroscópica não nos dá as propriedades *locais* do campo vetorial, uma circulação no entorno de um contorno macroscópico também nos dá apenas as propriedades *globais* do campo vetorial. Definimos assim uma circulação infinitesimal ao longo de uma curva imaginária  $\Gamma$  que envolve o ponto  $\vec{r}$  como sendo

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{C_\Gamma}{\Delta S}$$

onde tomamos o cuidado de definir a razão entre a circulação infinitesimal e a área circundada pelo contorno  $\Gamma$  pois caso contrário, se a área tende a zero, também a circulação. Mas a razão entre duas grandezas infinitesimais pode ter um limite diferente de zero.

Esta expressão depende da maneira como orientamos a curva  $\Gamma$ , pois a orientação de uma curva é sempre definida em função da orientação da superfície. Porém, a orientação de uma superfície aberta é arbitrá-

ria: podemos definir o lado de “cima” e de “baixo” como melhor nos aprouver, diferentemente de uma superfície fechada, cuja orientação, como já dito anteriormente, é sempre tomada como sendo a da normal *exterior* à superfície. Para uma superfície aberta, uma vez definida para que lado aponta a normal, a orientação positiva do contorno é então dado pela *regra da mão direita*: se colocarmos nosso polegar direito na direção e sentido da normal, a orientação positiva do contorno será dada pela linha que vai da palma da mão até a ponta dos dedos. Se decidíssemos usar uma *regra da mão esquerda*, o sentido da curva mudaria mas não o vetor cuja circulação queremos calcular e portanto a circulação infinitesimal teria o sinal trocado.

Em função desta regra de orientação espacial, a circulação infinitesimal comporta-se como a projeção de um vetor na direção da normal da superfície sobre cujo contorno a circulação está sendo calculada. Definimos então um vetor, chamado **rotacional**, cuja projeção na direção da normal à superfície delimitada pelo contorno é dada por

$$(\text{rot}\vec{v})_n = (\nabla \times \vec{v})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (2.14)$$

Vamos calcular o vetor rotacional para um vetor  $\vec{v}$  em coordenadas cartesianas. Para tanto olhemos atentamente a figura abaixo:

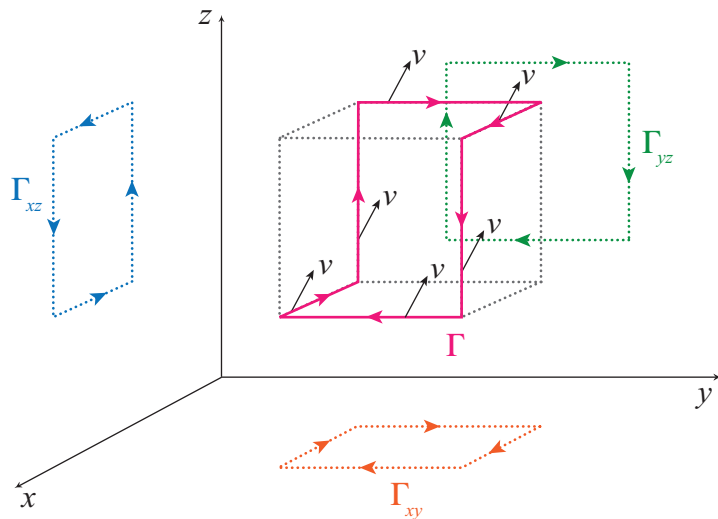


Figura 2.10 – Para calcular o rotacional do vetor  $\vec{v}$  ao longo da curva  $\Gamma$  (em azul), podemos calcular separadamente as circulações ao longo das projeções da curva  $\Gamma$  nos planos  $x$ - $z$ ,  $x$ - $y$  e  $y$ - $z$ , que são  $\Gamma_{xz}$ ,  $\Gamma_{xy}$  e  $\Gamma_{yz}$  respectivamente.

Iniciemos o cálculo do rotacional pela projeção da curva no plano  $yz$ , como ilustra a figura 2.11.

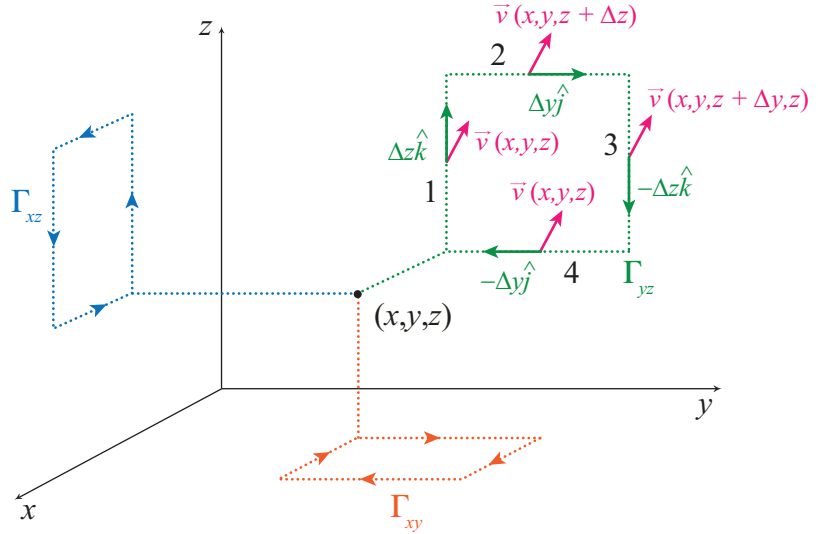


Figura 2.11 – Projeção da curva  $\Gamma$  sobre o plano  $yz$  resulta na curva  $\Gamma_{yz}$ .

Observamos inicialmente que nos trechos denotados 1 e 3 (bem como em 2 e 4) os sentidos do percurso são opostos. Sendo a circulação proporcional à projeção do vetor  $\vec{v}$  na direção  $z$  (ou  $y$  para trechos 2 e 4) bem como ao deslocamento  $\Delta z$  (ou  $\Delta y$ ) teremos então, neste caso

$$(v_z(x, y, z) - v_z(x, y + \Delta y, z))\Delta z + (v_y(x, y, z + \Delta z) - v_y(x, y, z))\Delta y$$

Porém, devido ao fato dos deslocamentos serem infinitesimais, podemos aproximar os vetores calculados em  $y + \Delta y$  e  $z + \Delta z$  por

$$v_z(x, y, z) - v_z(x, y + \Delta y, z) \approx -\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\Delta y$$

$$v_y(x, y, z + \Delta z) - v_y(x, y, z) \approx \left(\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\Delta z$$

Portanto a circulação infinitesimal se torna

$$\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\Delta y\Delta z$$

Dividindo esta expressão pela área  $\Delta y\Delta z$  englobada pela curva obtemos, pela regra da mão direita, a circulação do vetor  $\vec{v}$  na direção  $-x$  (ou seja, do versor  $-\hat{i}$ ). Disto concluímos que

$$(\vec{\nabla} \times \vec{v})_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

De maneira análoga obteremos, para as outras projeções, as componentes

$$(\vec{\nabla} \times \vec{v})_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Disto podemos finalmente concluir que

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (2.15)$$

Para melhor visualização desta expressão, podemos notar que ela tem um caráter cíclico nas variáveis  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , isto é, uma vez obtida a expressão para uma componente, podemos obter diretamente as expressões para as outras componentes substituindo ciclicamente  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow z$  e  $z \rightarrow x$ .

## 2.10 O Rotacional e o Teorema de Stokes: a Lei de Indução de Faraday na forma diferencial

Para o rotacional temos também um teorema análogo ao Teorema de Gauss-Ostrogradsky para o divergente. Este se chama Teorema de Stokes e diz que a circulação de um vetor por qualquer curva fechada  $\Gamma$  é a soma das circulações infinitesimais dos circuitos que somados reproduzem o circuito  $\Gamma$  (veja a discussão anterior a nossa dedução do rotacional). Em forma matemática o Teorema de Stokes diz

$$\oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (2.16)$$

onde, é importante notar, a superfície  $S$  é arbitrária a menos do fato de ter, por bordas, a curva  $\Gamma$ .

Esta expressão nos mostra que é possível relacionar a circulação de um vetor sobre uma curva (propriedade global) com seu rotacional (propriedade local). Isto significa que, sendo esta expressão válida para qualquer vetor, podemos usá-la para descrever a circulação do vetor campo elétrico, ou seja, a Lei de Faraday. Esta lei nos diz que

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Porém, pela mesma argumentação que utilizamos para relacionar o divergente do campo elétrico à integral de volume da densidade de carga

(Teorema de Gauss-Ostrogradsky), a igualdade destas integrais implica na igualdade de seus integrandos, de onde concluímos então que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.17)$$

Chegamos assim à Lei da Indução de Faraday na forma diferencial. É importante que enfatizemos que Maxwell, ao deduzir esta equação, tomou como hipótese que a variação temporal de um campo magnético geraria um campo elétrico independentemente do fato de haver uma espira neste mesmo espaço ou não, o que realmente ocorre. A presença de uma espira (fio) apenas nos auxilia a detectar o campo, via o surgimento de correntes devido à  $\vec{E}$ . No entanto é importante também que não nos esqueçamos do fato que os campos gerados dinamicamente (pela variação temporal de  $\vec{B}$ ) não são campos conservativos (potenciais), para os quais vale

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

As linhas de campo de campos **eletrostáticos** são abertas (tem fonte, nascem ou morrem em alguma carga), ao passo que linhas de campo **eletrodinâmico** são fechadas (não tem fonte).

No entanto, não devemos nos esquecer do Princípio da Relatividade da Mecânica Clássica: o que as equações acima nos dizem é que a relação entre campos eletrodinâmicos implica que tratá-los como entes separados dependendo do referencial em que estamos trabalhando. Imaginemos um sistema de cargas fixas na forma de um fio. Este sistema gera um campo eletrostático. Porém, se estivermos num referencial inercial que se move em relação ao fio, podemos pensar no fio como sendo uma corrente de elétrons, que gerará não apenas um campo elétrico, mas também um campo magnético. Assim, a distinção campo magnético – campo elétrico depende do referencial inercial ao qual estamos nos referindo.

## 2.11 A corrente de deslocamento

Retomemos agora a discussão da simetria da equação para a circulação do campo magnético, ou seja, a Lei de Ampère. Tomando os resultados acima e aplicando-os à circulação do campo magnético  $\vec{B}$ , o que teremos é

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (2.18)$$



onde escrevemos a corrente  $I$  como a integral da densidade de corrente  $\vec{j}$ . Disto concluímos que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (2.19)$$

que representa a forma diferencial da terceira equação fundamental do eletromagnetismo. Porém, um olhar mais atento nesta equação nos mostra que ela viola o princípio da conservação de carga! Mas como podemos ver isso? Primeiro temos que escrever uma lei de conservação de cargas elétricas na forma que nos é mais familiar, passando depois para uma versão diferencial. A conservação de carga nos diz simplesmente que se temos uma corrente elétrica saindo de uma região, esta corrente só pode ser o resultado de uma **perda** de carga desta mesma região, ou seja

$$I = -\frac{dq}{dt}$$

Devemos tomar cuidado ao interpretarmos esta equação: ela não é a definição de corrente, mas representa sim a conservação de carga, pois nos diz que aquilo que sai de carga de uma região – a corrente – é matematicamente igual ao quanto de carga esta região perde – daí o sinal negativo. Porém, podemos escrever mais convenientemente esta expressão substituindo, no lugar de  $I$  a expressão  $\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$  e  $\frac{dq}{dt}$  por  $\iiint_V (\partial\rho / \partial t) dV$  ou seja, ela é equivalente a

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\partial\rho / \partial t) dV$$

Do Teorema de Gauss-Ostrogradsky temos porém que

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV$$

e podemos assim concluir que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \quad (2.20)$$

Esta equação, chamada de **equação da continuidade**, é a representação diferencial da lei de conservação de carga. Mas como podemos ver que a equação por nós deduzida para o rotacional de  $\vec{B}$  está em desacordo com esta equação. Há um resultado matemático que diz que para qualquer vetor  $\vec{v}$  arbitrário, então o divergente de seu rotacional é sempre igual a zero, quer dizer

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$$

Mas isto implica então, da equação para  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$  que

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

e portanto somos forçados a concluir que  $\partial \rho / \partial t = 0$  sempre. Mas isto seria o mesmo que dizer que nunca poderia haver correntes no universo! Uma vez que é inegável que o divergente de um rotacional é sempre zero, Maxwell concluiu que deveria estar faltando um termo na expressão  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  na forma

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D)$$

de modo a “corrigir” a expressão acima fazendo-nos obter

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 = \mu_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_D) = 0$$

ou seja, o divergente da corrente “normal” com a nova “corrente” sempre se cancelam. Em outras palavras, temos uma corrente total

$$\vec{j}_{TOTAL} = \vec{j} + \vec{j}_D \quad (2.21)$$

A chave agora é darmos uma interpretação física para esta corrente, chamada por Maxwell de **corrente de deslocamento**. O que seria esta corrente? Para entendê-la vamos tomar um exemplo físico de uma corrente por um circuito contendo um capacitor plano.

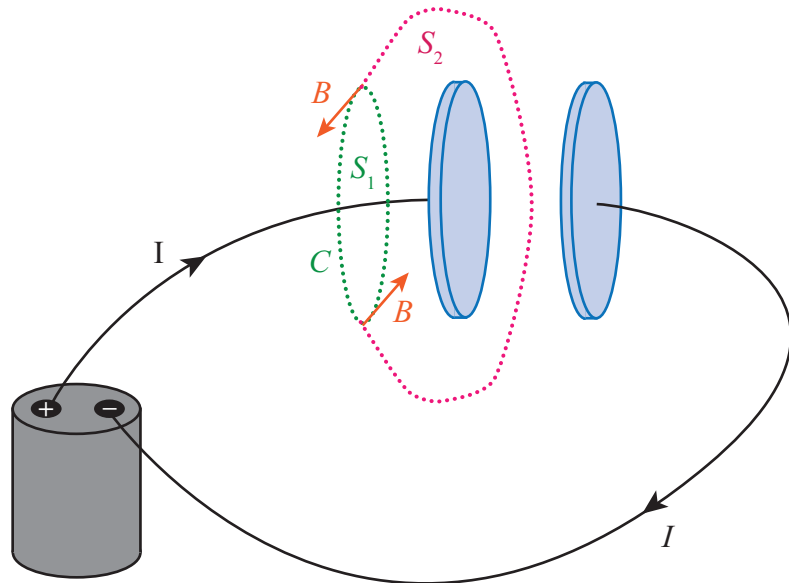


Figura 2.12 – Uma corrente não estacionária fluindo por um circuito que contém um capacitor.

De acordo com aquilo que aprendemos a respeito da circulação do vetor campo magnético  $\vec{B}$ , sabemos que a integral de linha deste vetor calculada sobre um circuito fechado  $C$  é proporcional à corrente que atravessa a área cujas bordas é este circuito, ou seja

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Porém, se a curva  $C$  é bem definida, como definirmos a área por ela circunscrita? Na figura acima temos dois exemplos: a área definida pela curva azul pode tanto ser a área  $S_1$  quanto a área  $S_2$ . A área, na realidade, é arbitrária. A única coisa fundamental é que seus limites sejam dados pela curva sobre a qual a circulação esteja sendo calculada. Porém, há fisicamente uma grande diferença entre estas duas situações físicas, pois pela curva  $S_1$  efetivamente passa uma corrente, ao passo que pela curva  $S_2$  não passa corrente nenhuma! Então, poderíamos concluir que dependendo da maneira que escolhemos a área, teremos uma física diferente em cada situação, o que obviamente é um absurdo. Maxwell resolveu este aparente paradoxo com o seguinte raciocínio: se houver entre as placas do capacitor um material dielétrico, ao variarmos a corrente (e portanto o campo elétrico entre as placas) haverá um deslocamento de cargas de polarização para um lado e outro da superfície  $S_2$ , polarizações estas que surgem devido ao campo elétrico entre as placas. Daí o nome corrente de deslocamento. Porém, o que aconteceria se entre as placas do capacitor não houvesse dielétrico mas sim vácuo? Como ficaria nossa argumentação?

No caso da ausência de dielétricos entre as placas do capacitor, a única coisa que nos resta é o campo elétrico  $\vec{E}$ . Maxwell então concluiu que neste caso haveria também uma contribuição da variação temporal de  $\vec{E}$  entre as placas, colocando assim os campos elétrico e magnético em pé de igualdade. Mas como calcular este termo?

Lembre-mos inicialmente que na ausência de dielétricos não há cargas físicas reais entre as placas. Vamos porém recorrer a um artifício para calcularmos a “corrente de deslocamento” no vácuo (o nome corrente de deslocamento se manteve por questões históricas). Da equação de Poisson (Lei de Gauss na forma diferencial) temos

$$\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

e portanto

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

onde invertemos a ordem das derivadas temporal e espacial. Portanto nossa equação da continuidade, anteriormente discutida, pode ser descrita como

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

Portanto temos na equação da circulação de  $\vec{B}$  em sua forma infinitesimal

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.22)$$

Obtemos assim a última das equações de Maxwell. No caso da presença de um dielétrico basta acrescentarmos a esta expressão a polarização do dielétrico  $\vec{P}$ , ou seja

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})$$

Concluimos deste estudo que, da mesma maneira que um campo magnético variando no tempo produz um campo elétrico (Lei da Indução de Faraday), a variação temporal de um campo elétrico produz um campo magnético.

**Lei de Gauss para eletrostática:** Se o divergente de um campo é não nulo, então, deve existir na região campos elétricos não nulos resultantes de uma carga total não nula.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

**Lei de Gauss para magnetismo:** Os campos magnéticos não são divergentes e não existem monopólos magnéticos.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

**Lei de Faraday:** Campos magnéticos variáveis no tempo geram campos elétricos do tipo rotacionais.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

**Lei de Ampère:** Campos elétricos variáveis no tempo, assim como correntes elétricas, produzem campos magnéticos do tipo rotacionais.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

## Resumo

Neste capítulo estudamos as leis básicas do eletromagnetismo em sua forma diferencial. As equações básicas por nós estudadas em curso anterior eram todas expressas na sua forma integral. Embora estas nos pareçam intuitivamente mais claras, a formulação diferencial é bastante vantajosa quando se pretende calcular campos elétricos e magnéticos em situações físicas de interesse. Para melhor compreender as equações em forma diferencial (Equações de Maxwell) introduzimos o conceito de operador diferencial nabla  $\vec{\nabla}$  e dos operadores dele derivados: o divergente e o rotacional. Vimos também que, ao passar para a formulação diferencial, Maxwell descobriu um termo que faltava na expressão da circulação (rotacional) do campo magnético, termo este que ele chamou de corrente de deslocamento. A corrente de deslocamento é na verdade a variação temporal do campo elétrico e representa o equivalente, na Lei da Indução de Faraday, à variação temporal do campo magnético.

## Problemas resolvidos

**1) Equações de Maxwell** – Um capacitor de placas planas e paralelas que estão separadas por uma distância  $d$  muito menor que o tamanho das placas, cuja área é  $A$  (isto significa que o campo  $\vec{E}$  pode ser considerado uniforme entre as placas, ou seja, desprezamos efeitos de borda). As placas do capacitor estão ligadas a uma fonte de corrente alternada de tal modo a produzirem uma carga  $Q(t) = Q_0 \text{sen}(\omega t)$ . Calcule o campo magnético  $\vec{B}$  que surge entre as placas, devido a variação temporal do campo elétrico, num ponto localizado a uma distância  $r$  do eixo das placas.

**Solução:** O campo elétrico é dado, para um capacitor de placas planas, pela expressão

$$\vec{E}(t) = \frac{\sigma(t)}{2\epsilon_0} = \frac{Q(t)}{2A\epsilon_0} = \frac{Q_0 \text{sen}(\omega t)}{2A\epsilon_0}.$$

Por questões de simetria (lembremo-nos do caso de um fio pelo qual passa corrente), esperamos que o campo magnético gerado esteja sobre linhas de campo que formam círculos paralelos às placas do capacitor. Ou seja, o campo  $\vec{B}$  só tem componente tangente aos círculos (na direção  $\varphi$ ). Assim, vamos calcular o rotacional em coordenadas cilíndricas (ver a figura 2.13).

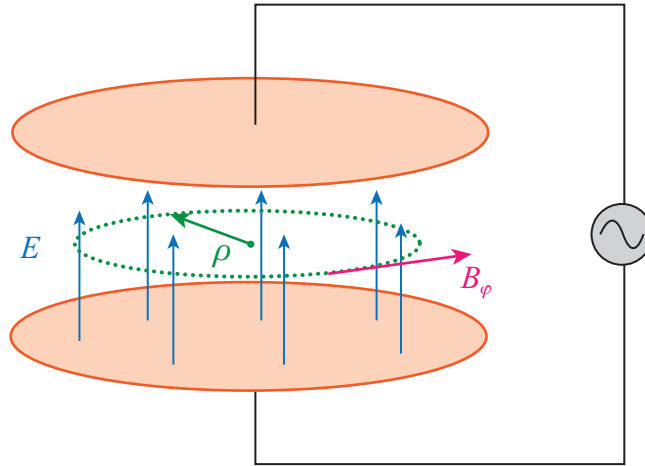


Figura 2.13 – Campo elétrico entre as placas de um capacitor plano e o campo magnético por ele gerado.

Temos neste caso, das equações de Maxwell, que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\varphi) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{Q_0}{2A \epsilon_0} \frac{\partial \text{sen}(\omega t)}{\partial t}$$

Porém, abrindo explicitamente a derivada do lado esquerdo da equação temos

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial \rho} + \frac{B_\varphi}{\rho} = -\mu_0 \frac{Q_0}{2A} \omega \cos(\omega t)$$

Podemos observar que o lado direito da equação independe de  $\rho$ . Para que o lado direito e o lado esquerdo sejam então uma igualdade, é preciso que o campo  $B_\varphi$  tenha a seguinte dependência em  $\rho$ :

$$B_\varphi = \text{const.} \times \rho$$

Onde *const.* é uma constante a ser determinada. Mas substituindo esta expressão na equação diferencial obtemos

$$\text{const} + \frac{\text{const} \times \rho}{\rho} = 2 \times \text{const} = \mu_0 \frac{Q_0}{2A} \omega \cos(\omega t)$$

Disto concluímos que

$$B_\varphi = \mu_0 \frac{Q_0}{4A} \rho \omega \cos(\omega t)$$

**2) Equações de Maxwell** – Um campo eletromagnético no vácuo tem a seguinte forma:

$$E_x = 0; E_y = E_0 \text{sen}(kx + \omega t); E_z = 0.$$

$$B_x = 0; B_y = 0; B_z = -(E_0 / c) \text{sen}(kx + \omega t).$$

Qual deve ser a relação entre  $k$  (o número de onda) e  $\omega$  (a frequência angular) para que estes campos satisfaçam as equações de Maxwell?

**Solução:** Aplicando a condição que  $\vec{\nabla} \times \vec{B}(t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}$ , te-

mos, para um campo magnético que só tem componente  $z$  e um campo elétrico que só tem componente  $y$ , a expressão

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Isso porém nos leva à

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{E_0}{c} k \cos(kx + \omega t) = \mu_0 \epsilon_0 \omega E_0 \cos(kx + \omega t)$$

Disto concluímos que

$$k = \mu_0 \epsilon_0 \omega c = \frac{\omega}{c}$$

**3) Corrente de deslocamento** – Uma carga  $q$  se move uniformemente ao longo de uma linha reta com velocidade  $\vec{v}$ . Calcule o vetor corrente de deslocamento sobre um ponto  $P$  a uma distância  $r$  da carga, sobre a linha de sua trajetória.

**Solução:** A corrente de deslocamento é dada por  $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

onde  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$ . Temos então que calcular a derivada tem-

poral de  $\vec{E}$ . Temos então

$$\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial(1/r^2)}{\partial t} \hat{r} = \frac{-q}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right) \hat{r} = \frac{-qv}{4\pi r^3} \hat{r}$$

**4) Corrente de deslocamento** – Uma corrente por um longo solenóide de raio  $R$  é variado de tal maneira que o campo magnético no seu interior varia temporalmente de acordo com a equação  $B = \alpha t^2$ , onde  $\alpha$  é uma constante. Calcule a corrente de deslocamento como função da distância  $r$  do eixo central do solenóide.

**Solução:** Para achar a corrente de deslocamento precisamos inicialmente calcular o campo elétrico associado à variação do campo magnético. Para isso usamos a equação de Maxwell para a circulação de  $\vec{E}$ . Há duas situações à tratar: o caso em que  $r < R$  e o caso  $r > R$ . Na primeira situação temos

$$2\pi rE = \pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} \rightarrow E = r\alpha t$$

Já na segunda situação (campo fora do solenóide) obtemos

$$2\pi rE = \pi R^2 \frac{\partial B}{\partial t} \rightarrow E = \frac{R^2 \alpha t}{r}.$$

Usando agora a fórmula do exercício anterior  $j_D = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$  temos

$$j_D = \epsilon_0 \alpha r \text{ quando } r < R$$

$$j_D = \epsilon_0 \alpha R^2 / r \text{ quando } r > R$$

**5) Equações de Maxwell** – Uma carga pontual move-se no espaço com velocidade constante  $\vec{v}$  em linha reta. Usando as equações de Maxwell para a circulação do campo magnético, obtenha uma expressão para  $\vec{B}$  para um ponto arbitrário  $P$  cuja posição em relação à carga é dada pelo raio vetor  $\vec{r}$ .

**Solução:** Por questões de simetria devemos tomar o contorno de integração para o vetor campo magnético como sendo um círculo com o centro em  $O$  (representado pela linha pontilhada na figura 2.14). Assim

$$2\pi RB = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

onde  $R$  é o raio do círculo sobre o qual estamos calculando a circulação. Precisamos calcular o fluxo do vetor  $\vec{E}$  através da superfície delimitada por este círculo. Por simplicidade (uma vez que estamos tratando de uma carga pontual), tomamos esta superfície como sendo uma calota esférica de raio  $r$ . O fluxo do campo elétrico por um anel elementar de área desta calota vale

$$EdS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 2\pi r \text{sen}\alpha r d\alpha = \frac{q}{2\epsilon_0} \text{sen}\alpha d\alpha$$

O fluxo total pela calota selecionada vale

$$\oiint EdS = \frac{q}{2\epsilon_0} (1 - \cos\alpha)$$



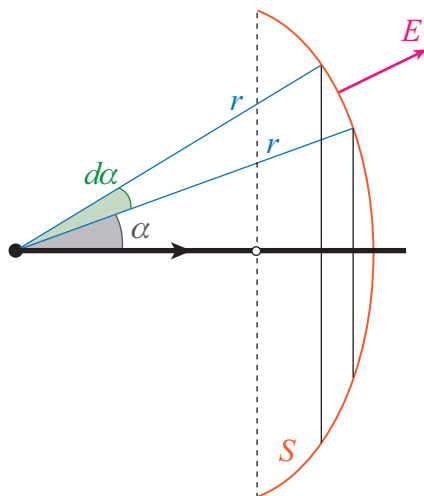


Figura 2.14 – Geometria da calota do problema 5.

Derivando agora esta expressão em relação ao tempo temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{q}{2\epsilon_0} (1 - \cos\alpha) \right) = \frac{q}{2\epsilon_0} \text{sen}\alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

Para o segmento de arco compreendido entre os dois raios desenhados na figura 5, por uma distância  $vd t$ , temos que  $vd t \text{sen}\alpha = r d\alpha$  e portanto

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{v \text{sen}\alpha}{r}$$

Substituindo este resultado na equação de Maxwell para a circulação de  $B$  temos assim

$$B = \mu_0 \frac{qvr \text{sen}\alpha}{4\pi r^3} \rightarrow \vec{B} = \mu_0 \frac{q}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

Este resultado, que havíamos visto anteriormente da Lei de Biot-Savart, é consequência direta das Equações de Maxwell.

**6) Rotacional de  $\vec{E}$**  – Num sistema inercial temos um campo magnético de magnitude  $B$  constante mas que gira com velocidade angular  $\omega$  em torno de um eixo fixo. Calcule o  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$  nesta região como função dos vetores  $\vec{B}$  e  $\omega$ .

**Solução:** Olhando para a figura 2.15, vemos que o fato de  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$  nos indica que o rotacional tem a mesma direção mas o sentido oposto da variação  $d\vec{B}$ . Porém podemos calcular  $d\vec{B}$  através de

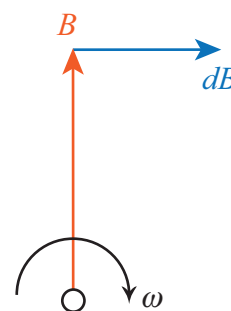


Figura 2.15

$$\|d\vec{B}\| = B\omega dt \rightarrow \left\| \frac{d\vec{B}}{dt} \right\| = B\omega$$

Disto concluímos que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -[\vec{\omega} \times \vec{B}]$$

## Problemas propostos com respostas

**1)** Determine a taxa de variação com que o campo elétrico varia entre as placas de um capacitor plano (de placas circulares e 6,0 cm de diâmetro), se as placas estão a 1,3 mm de separação uma da outra e a voltagem na fonte muda com uma taxa de 120 V/s.

Resposta:  $9,2 \times 10^4$  V/m

**2)** Mostre que a corrente de deslocamento através das placas de um capacitor paralelo pode ser escrita como  $I_D = CdV/dt$ , onde  $V$  é a voltagem instantânea entre as placas do capacitor.

**3)** Num dado instante de tempo, uma corrente de 1,8 A flui por um circuito conectado a um capacitor de placas paralelas. Qual a taxa de variação do campo elétrico entre as placas se elas estão a 16,0 cm de distância uma da outra?

Resposta:  $7,9 \times 10^{14}$  V/m.s

**4)** Se o valor de pico do campo elétrico numa onda eletromagnética é de  $0,43 \times 10^{-4}$  V/m, qual o valor de pico do campo magnético?

Resposta:  $1,4 \times 10^{-13}$  T

**5)** Se monopolos magnéticos existissem, qual equação(ções) de Maxwell deveria(am) ser alterada(s), e qual seria sua(s) nova(s) forma(s)? Chame a carga magnética de  $Q_m$ .

Resposta:  $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 Q_m$ ;  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mu_0 dQ_m / dt - d\Phi_B / dt$

## Referências

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica**. Vol. 3. São Paulo: Edgar Blücher, 2005.

TIPLER, Paul A. **Física para Cientistas e Engenheiros**. 4. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan.



### 3 Ondas eletromagnéticas





## 3 Ondas eletromagnéticas

*Neste capítulo iremos introduzir conceitos e idéias que nos permitam ao final: compreender as propriedades gerais das ondas eletromagnéticas; saber avaliar a energia transportada por uma onda eletromagnética e distinguir situações nas quais podemos desprezar o caráter ondulatório da luz (aproximação da ótica geométrica). E finalmente, prepararmo-nos com o instrumental necessário para entendermos a ótica.*

### 3.1 Introdução

Uma das mais importantes conseqüências das equações de Maxwell é o fato de o campo elétrico e magnético se propagarem na forma de ondas. Este resultado, obtido matematicamente por Maxwell ainda em seu célebre tratado de 1865, foi experimentalmente comprovado em 1888 pelo físico alemão [Heinrich Hertz](#). Usando um sistema de armações de madeira de formato parabólico revestidas de lâminas metálicas (para refletir as ondas como um espelho), Hertz posicionou, próximo a sua estrutura especular, uma bobina de indução de Ruhmkorff, capaz de produzir uma centelha entre dois eletrodos. Ele verificou que, ao colocar um segundo par de eletrodos no foco de seu espelho, era possível observar uma faísca secundária nestes eletrodos devido à propagação do sinal dos eletrodos primários. Foi apenas a partir destes resultados, obtidos por um físico experimental de grande renome, que a teoria de Maxwell passou a ser aceita nas universidades européias, onde até então seus trabalhos eram vistos com uma certa ressalva – este fato não tem nada a ver com a reputação de Maxwell, um físico já reconhecidamente aclamado mas cujo trabalho em eletromagnetismo era considerado demasiado matemático. Neste capítulo estudaremos as principais propriedades das ondas eletromagnéticas, mostrando inicialmente como obtê-las a partir das equações originais de Maxwell.

O capítulo está assim dividido:

- na seção 3.2 obtemos a equação de onda para os campos eletromagnéticos;

*Heinrich Rudolph Hertz (1857 - 1894), físico alemão, foi o primeiro a demonstrar satisfatoriamente a existência das ondas eletromagnéticas, construindo um aparato que emitia e recebia ondas de rádio. Frase atribuída a Hertz, quando perguntado sobre a utilidade de sua descoberta: "Eu não penso que as ondas eletromagnéticas que descobri terão qualquer aplicação prática".  
Fonte: [http://en.wikipedia.org/wiki/Heinrich\\_Rudolf\\_Hertz](http://en.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Rudolf_Hertz)*

- na seção 3.3 discutimos as ondas eletromagnéticas planas;
- faremos na seção 3.4 uma breve pausa para discutirmos um pouco da história da comprovação experimental por H. Hertz;
- na seção 3.5 discutimos duas importantes características das ondas: sua energia e seu momentum;
- na seção 3.6 discutimos as propriedades de emissão de um dipólo oscilante. Este sistema é muito importante, pois ele é a base sobre a qual muitos sistemas mais complexos de cargas oscilantes podem ser entendidos;
- na seção 3.7 discutimos a luz como onda e algumas de suas propriedades como polarização.
- Encerramos o capítulo com um resumo, exercícios resolvidos e propostos.

## 3.2 Equação de onda para os campos eletromagnéticos

Mostramos, no capítulo anterior, que as equações básicas do eletromagnetismo não apenas podem ser escritas na forma diferencial e também mostramos que, ao fazê-lo, as propriedades destas equações somadas à Equação da Continuidade (conservação de cargas elétricas) nos leva ao descobrimento de um novo termo na equação para o rotacional do campo magnético: a corrente de deslocamento. Esta é uma importante mas não a única consequência da formulação de Maxwell para as leis do Eletromagnetismo: através das propriedades do operador diferencial  $\vec{\nabla}$ , é possível escrever equações em que os campos se “desacoplam”. O que queremos dizer com isso?

Devemos nos lembrar que as equações de Maxwell são equações diferenciais para as componentes dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  e que estes sempre aparecem juntos numa mesma equação. Em outras palavras, a equação para as componentes de um campo envolve as componentes de outro, e vice-versa. A primeira coisa que nos perguntamos, quando encontramos equações ditas acopladas, é se não há alguma maneira de separá-las de modo a obter equações que contenham, entre suas incógnitas, apenas as componentes deste ou daquele vetor. Foi justamente esta a questão que Maxwell se colocou e que logrou responder através da aplicação de algumas propriedades do divergente e rotacional, como veremos a seguir.



Consideremos o caso em que não há correntes ( $\vec{j} = 0$ ) nem cargas no espaço ( $\rho(\vec{r}) = 0$ ). Nesta situação as equações de Maxwell podem ser escritas como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (3.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.4)$$

Uma maneira de eliminarmos um vetor de uma equação, por exemplo, o vetor  $\vec{E}$  em (3.4), seria calcularmos, num primeiro instante, o divergente de ambos os lados e substituir, na equação assim obtida, o valor do divergente que aparece na Lei de Gauss (3.1). Mas isto apenas nos levaria a igualdade  $0=0$ , pois o divergente de qualquer rotacional é zero.

**Problema:** Mostre que para qualquer vetor  $\vec{v}$  vale a expressão  $\text{div}(\text{rot } \vec{v})=0$  e explique o significado físico desta relação.

**Solução:**

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

Mas calculando o divergente pela sua definição temos que, para um vetor qualquer,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial xz} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial xy} \right) + \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial yx} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial yz} \right) + \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial zy} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial zx} \right)$$

Uma vez que a ordem da derivada não é relevante, temos que os termos se cancelam aos pares e, portanto,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$$

como queríamos demonstrar. A interpretação física é que se um vetor tem uma circulação infinitesimal diferente de zero no entorno de um ponto  $P$ , então seria uma contradição o divergente ser também diferente de zero, pois isso significaria que haveria naquele ponto uma fonte (ou sumidouro) de campo e, portanto, uma “origem”, por assim dizer, do campo vetorial.

Uma vez que não é possível usar esta expressão para isolarmos  $\vec{B}$  na 4ª equação de Maxwell, só nos resta aplicar o operador nabla da outra maneira que sabemos aplicá-lo: tomando o rotacional de ambos os lados e aí utilizar a 3ª equação de Maxwell que envolve o rotacional de  $\vec{E}$ . Porém primeiro temos que calcular o que dá o rotacional de um rotacional.

**Problema:** Mostre que para qualquer vetor  $\vec{v}$  vale a expressão  $\text{rot}(\text{rot } \vec{v}) = \text{grad}(\text{div } \vec{v}) - \text{laplaciano } \vec{v}$ . O operador Laplaciano é definido por

$$\nabla^2 \vec{v} = (\nabla^2 v_x) \hat{i} + (\nabla^2 v_y) \hat{j} + (\nabla^2 v_z) \hat{k}$$

onde

$$\nabla^2 v_i = \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial^2 x} \right) + \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial^2 y} \right) + \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial^2 z} \right)$$

**Solução:** vamos usar a regra do determinante para calcular diretamente o valor do rotacional. Ou seja, o rotacional de um vetor  $\vec{v}$  qual-quer pode ser calculado através do determinante da matriz

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

No nosso caso, no lugar das componentes do vetor  $\vec{v}$ , aparecerão as componentes do rotacional do vetor. Em outras palavras,

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \end{vmatrix}$$

Calculando explicitamente esta relação, teremos para cada uma das três componentes

$$\text{componente } x = \frac{\partial^2 v_y}{\partial yx} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial zx}$$

$$\text{componente } y = \frac{-\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial xy} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial yz} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}$$

$$\text{componente } z = \frac{\partial^2 v_x}{\partial z x} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z y}$$

Se agora acrescentarmos e subtrairmos, nas componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$ , os termos  $\partial^2 v_x / \partial x^2$ ,  $\partial^2 v_y / \partial y^2$  e  $\partial^2 v_z / \partial z^2$ , podemos reescrever as expressões acima como

$$\text{componente } x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

$$\text{componente } y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}$$

$$\text{componente } z = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$$

Os termos entre parênteses correspondem ao divergente do vetor  $\vec{v}$  e os termos negativos, pela definição, ao laplaciano das componentes deste vetor. Assim, escrevendo tudo em uma só equação,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \left( \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{v}}{\partial x} - \nabla^2 v_x \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{v}}{\partial y} - \nabla^2 v_y \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{v}}{\partial z} - \nabla^2 v_z \right) \hat{k}$$

Reagrupando os termos, temos

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \nabla^2 (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k})$$

Identificando o termo entre parênteses como o operador diferencial  $\vec{\nabla}$  podemos reescrever esta expressão na forma

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v} \quad (3.5)$$

como nos propusemos a demonstrar.

Podemos agora usar este resultado calculando o rotacional da 4ª Equação de Maxwell. Temos assim

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

Porém, como podemos inverter a ordem da derivada temporal e a derivada espacial na expressão acima, temos

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \times \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Contudo, considerando que  $\text{div } \vec{B} = 0$  e que  $\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$  obtemos, na expressão acima, o resultado

$$\nabla^2 \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \rightarrow \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.6)$$

ou seja, o vetor campo magnético obedece a uma equação de onda com velocidade de propagação  $v = \sqrt{1/\varepsilon_0 \mu_0}$  no vácuo. Utilizando os valores conhecidos destas constantes, obtemos o valor  $v = 2.997925 \times 10^8$  m/s, que é o valor da velocidade da luz no vácuo. Um cálculo análogo para o vetor campo elétrico  $\vec{E}$  nos leva também à expressão

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.7)$$

ou seja, o vetor campo elétrico também se propaga no vácuo como uma onda de velocidade  $c$ .

### 3.3 Ondas planas

Antes de resolvermos as equações de onda e estudarmos o comportamento dos campos, é interessante que olhemos mais atentamente para a equação de onda, pois ela nos fornece valiosa informação sobre o tipo de dependência temporal e espacial que devemos esperar de nossas soluções.

Para simplificar, consideremos a equação de onda unidimensional para uma função  $g(x, t)$ , ou seja:

$$\frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.8)$$

A equação de onda coloca, por assim dizer, a dependência espacial e temporal de uma solução genérica  $g(x, t)$  em pé de igualdade: a solução da equação de onda tem a propriedade de sua derivada temporal ser, a menos de um fator  $1/v^2$ , idêntica à sua derivada espacial. Isto impõe fortes restrições na *dependência* de  $g(x, t)$  com relação às variáveis, mas não sobre o tipo de função que podemos ter como solução (que será determinada, em grande medida, pelas condições de contorno). O que queremos dizer com isto? Simplesmente que, qualquer que seja a solução, ela só pode ser função da combinação

$$g(x, t) = g_1(x - vt) + g_2(x + vt) \quad (3.9)$$

ou seja,  $g(x, t)$  só pode depender das variáveis  $x$  e  $t$  através da combinação  $(x - vt)$  ou  $(x + vt)$ .

Nossa experiência nos ensina que uma solução típica da equação de onda pode ser escrita na forma

$$g(x, t) = A_1 \cos(x - vt - \alpha) + B_2 \cos(x + vt + \beta) \quad (3.10)$$

onde o primeiro termo representa uma onda senoidal que se propaga na direção positiva do eixo  $x$ , ao passo que o segundo termo representa uma onda se propagando no sentido oposto.

Mas antes de estudarmos uma solução da equação de onda para os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , é importante que não nos esqueçamos que, embora tenhamos sido capazes de chegar a equações de onda para cada um deles separadamente, as equações de Maxwell nos mostram que um campo depende do outro. Tomemos assim, por questão de simplicidade, um problema no qual supomos que tanto  $\vec{E}$  quanto  $\vec{B}$  dependam apenas da coordenada  $x$  (e do tempo  $t$ , obviamente). Escrevendo as equações de Maxwell para as componentes  $E_x(x, t), E_y(x, t), E_z(x, t)$  e  $B_x(x, t), B_y(x, t), B_z(x, t)$ , teremos então

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B_x}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \mu_0 \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu_0 \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} &= -\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

Não escrevemos explicitamente nestas expressões a dependência dos vetores nas variáveis  $x$  e  $t$  para não sobrecarregar as fórmulas. A última equação e a primeira do terceiro bloco nos dizem que  $E_x$  não pode depender de  $x$  e  $t$ . A quarta equação e a primeira do primeiro bloco também nos mostram que  $B_x$  não depende destas duas variáveis. Ou seja, estas duas componentes dos campos só podem existir pela superposição de campos externos constantes sobre aqueles campos que satisfazem a equação de onda. Podemos assim tomá-los como sendo respectivamente iguais a zero (matematicamente campos constantes são as soluções triviais da equação de onda e sempre podemos somá-los às soluções não triviais). Uma vez que as soluções

que procuramos dependem de  $x$ , mas as componentes nesta direção das soluções não triviais não existem, isto implica que os vetores  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  que procuramos são perpendiculares à direção da propagação da onda, ou seja, ondas eletromagnéticas são ondas transversais.

Reagrupando agora as equações restantes em dois grupos, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\varepsilon_0 \frac{\partial B_y}{\partial t} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{array} \right\}$$

O primeiro grupo de equações relaciona as componentes  $E_y$  e  $B_z$ , enquanto o segundo grupo relaciona  $E_z$  com  $B_y$ . Imaginemos que inicialmente criamos um campo elétrico  $E_y$  na direção  $y$ . Segundo as equações acima, este campo produz um campo magnético  $B_z$  na direção  $z$ . E nada ocorre com  $E_z$  ou  $B_y$ . A recíproca é verdadeira. Se começarmos com  $E_z$ , chegaremos a um  $B_y$ , e não teremos as componentes  $y$  e  $z$  destes dois vetores, respectivamente. Deste modo, para descrevermos uma onda eletromagnética plana, basta tomarmos o primeiro (ou o segundo) sistema de equações e assumir que as componentes no outro sistema são identicamente nulas.

Tomemos assim  $E_z = B_y = 0$ , ficando apenas com o primeiro sistema de equações. Através deste desenvolvimento matemático e alguma argumentação física pudemos então chegar à conclusão de que, com as hipóteses originalmente feitas, só nos restam duas componentes  $E_y$  e  $B_z$ . É fácil, agora, a partir das duas equações restantes, escrevermos as equações de onda para estas duas componentes, a saber:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0$$

As soluções mais simples destas equações são do tipo

$$E_y(x, t) = E_M \cos(\omega t - kx + \alpha_1)$$

$$B_z(x, t) = B_M \cos(\omega t - kx + \alpha_2)$$

O nome mais correto para  $k$  seria número de onda angular, mas por tradição usa-se apenas o termo número de onda.

Nestas expressões  $\omega$  é a frequência angular da onda ( $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$ ) ao passo que  $k$  é o chamado *número de onda*. A interpretação física

do número de onda é a de quantos comprimentos de onda existem entre dois pontos situados a uma distância de  $2\pi$  no eixo dos  $x$ . ( $k = 2\pi / \lambda$ ). Os termos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  correspondem às fases iniciais das oscilações em  $x = 0$ . Se agora substituirmos estas duas soluções nas equações que acoplam  $E_y$  e  $B_z$ , nós obteremos

$$kE_M \sin(\omega t - kx + \alpha_1) = \mu_0 \omega B_M \sin(\omega t - kx + \alpha_2)$$

$$kB_M \sin(\omega t - kx + \alpha_2) = \epsilon_0 \omega E_M \sin(\omega t - kx + \alpha_1)$$

Estas duas equações só podem ser satisfeitas se as fases iniciais são iguais, além do que temos que também satisfazer as igualdades

$$kE_M = \mu_0 \omega B_M$$

$$\epsilon_0 \omega E_M = kB_M$$

Multiplicando as duas equações obtemos

$$\epsilon_0 E_M^2 = \mu_0 B_M^2$$

Assim, concluímos que os campos oscilam em fase e suas amplitudes estão relacionadas pela expressão deduzida acima. Podemos ilustrar graficamente esta solução como na figura 3.1, que representa uma onda eletromagnética para um instante  $t$  fixo.

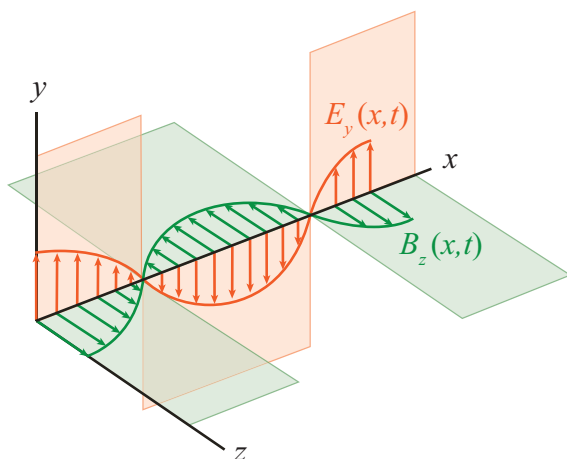


Figura 3.1 – Imagem instantânea dos vetores  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  que se propagam na direção positiva do eixo  $x$ .

Na figura podem-se ver os planos perpendiculares dos dois vetores e o fato de que eles formam um sistema **dextrógiro** em relação ao eixo de propagação da onda. Ambos são soluções harmônicas da equação de onda e, como visto no texto, possuem a mesma fase para qualquer instante do tempo.

*Um sistema dextrógiro é aquele no qual vale a regra da mão direita. Quando definimos o produto vetorial, há uma arbitrariedade na escolha do sentido do vetor resultante. Assim, no produto  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ , a única coisa que podemos afirmar é que o vetor resultante  $\vec{C}$  é perpendicular ao plano definido pelos vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ . Se imaginarmos que o primeiro vetor é o dedo indicador e o segundo o dedo médio da mão direita, o vetor resultante será nosso polegar. Se fizermos o mesmo usando agora a mão esquerda, nosso polegar apontará no sentido contrário. Um conjunto de eixos de coordenadas no qual vale a regra da mão esquerda nos produtos vetoriais é chamado de levógiro.*

### 3.4 Um pouco de história: os experimentos de H. Hertz

A comprovação da natureza ondulatória do campo eletromagnético foi feita no ano de 1888 pelo físico alemão Heinrich Hertz (1857-1894), quando ainda trabalhava na Universidade de Karlsruhe, no sul da Alemanha. Com sua mudança para a Universidade de Bonn, Hertz continuou seus trabalhos e escreveu uma importantíssima obra sobre os fundamentos da Mecânica, pouco antes de falecer, com apenas 37 anos de idade.

*Ruhmkorff era um mecânico alemão que vivia em Paris, muito conhecido pelos instrumentos de precisão que produzia. Sua bobina, que era um indutor com um enrolamento de aproximadamente 100 km de fios, era capaz de produzir altas tensões, gerando assim faíscas entre dois eletrodos.*

Para produzir uma centelha (faísca) entre dois eletrodos, Hertz utilizou uma bobina de *Ruhmkorff*. Ao acoplar esta bobina a um vibrador por ele inventado, que consistia em duas longas barras de latão, ele conseguia, durante o tempo de duração de uma faísca, colocar o vibrador em oscilação, produzindo assim uma vibração eletromagnética. As ondas produzidas tinham aproximadamente um comprimento de onda que era o dobro do tamanho do vibrador, tendo comprimentos entre 0.6 a 10 m.

Para obter sua reflexão, Hertz montou sobre uma estrutura de madeira de perfil parabólico uma lâmina metálica, criando assim um espelho (o espelho tinha o formato aproximado de uma calha, com 2 m de altura). Colocando o vibrador no foco do espelho e ao longo do seu eixo principal, ele pôde assim estudar suas propriedades por reflexão. Hertz também estudou a refração das ondas utilizando um prisma feito de asfalto e de massa aproximada de 1200 kg (e dimensões lineares de aproximadamente 1 m). Com estes experimentos de refração e reflexão, ele pôde comprovar que as ondas eletromagnéticas obedeciam às conhecidas leis da Óptica.

Mas Hertz não ficou apenas nisto. Conseguiu induzir faíscas em um outro eletrodo pela reflexão das ondas produzidas no eletrodo primário e, por meio de uma reflexão na direção da onda incidente, ele pôde criar uma onda estacionária e determinar os nós, e, portanto, o comprimento da onda. Conhecida a frequência, ele utilizou a relação  $v = \lambda f$  e pôde assim determinar que a velocidade  $v$  era muito próxima da velocidade da luz. Além disso, Hertz utilizou uma grade de fios metálicos cuja distância entre fios era da ordem do comprimento da onda e, posicionando esta grade no caminho entre as ondas e o indutor secundário, ele constatou que a intensidade da faísca gerada diminuía consideravelmente à medida que a grade era girada de  $\pi / 2$  radianos. Assim, ele pôde também comprovar que a onda era transversal e polarizada.



### 3.5 A energia e o momentum de uma onda eletromagnética

Distintamente de partículas, que em mecânica clássica têm uma posição bem definida no espaço, podemos dizer que uma onda não tem uma posição única, pois ocupa uma região extensa. Conhecemos na Física dois tipos de “objetos” fundamentais, partículas e ondas: em virtude de suas propriedades de localização e equações que regem seu movimento, estas duas entidades são excludentes, quer dizer, ou algo é uma onda ou é uma partícula (veremos futuramente que a Mecânica Quântica lançou por terra esta distinção). Porém, há duas coisas que são comuns a estes dois objetos: ambos possuem energia e momentum, que podem ser transportados pelo espaço – para partículas através do transporte de sua própria massa de um ponto a outro, ao passo que para ondas sem que massa seja transportada de um ponto a outro do espaço. Essa distinção é muito importante, pois a idéia de um transporte de momentum e energia sem o transporte de massa nos ajuda a melhor compreender que o momentum e energia de um corpo não necessariamente devem estar sempre atrelados ao conceito de massa.

Em outras palavras, a expressão  $\vec{p} = m\vec{v}$  só se aplica em circunstâncias especiais. Esta constatação também foi muito importante para a formulação da chamada Teoria de Campos, que estuda os diversos tipos de campos responsáveis pelas interações fundamentais da natureza como os objetos fundamentais da natureza (na teoria de campos as partículas seriam resultado, por assim dizer, dos campos). A idéia de que o campo transporta momentum e energia é algo que já poderíamos ter concluído se pensasse numa situação simples: imaginemos duas partículas carregadas próximas uma da outra e que, de alguma maneira que agora não nos importa especificar, permanecem em repouso. Se por algum modo movimentarmos uma delas, dando-lhe um pequeno empurrão (ou seja, fazendo trabalho sobre ela e, portanto, dando-lhe momentum e energia), a outra partícula sentirá o movimento da primeira devido à variação do campo elétrico nas suas imediações e também se moverá – ou seja, adquirirá uma pequena variação de momentum e energia. Mas nós fizemos trabalho sobre a primeira delas e a tarefa que nos cabe agora é explicar como parte desta energia e momentum chegou até a segunda partícula. Isso só é possível se houver algo entre as duas que faz o papel de intermediador, transportando de uma até outra estas duas grandezas físicas. Mas a única coisa que existe entre as duas é o campo, e esse transporte só pode se dar por ele.

Como já vimos no curso anterior, a densidade de energia  $\rho_{ENERGIA}$  de um campo eletromagnético é dada pela soma das densidades de energia de cada um dos campos e vale

$$\rho_{ENERGIA} = \rho_E + \rho_B = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 B^2}{2} \quad (3.11)$$

Como os vetores  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  têm a mesma fase em qualquer instante de tempo, a relação entre suas amplitudes máximas  $\epsilon_0 E_M^2 = \mu_0 B_M^2$  vale para os valores da amplitude em qualquer instante de tempo. Podemos assim escrever a expressão para a densidade de energia como

$$\rho_{ENERGIA} = 2\rho_E = \epsilon_0 E^2$$

Mas como  $\sqrt{\epsilon_0} E_M = \sqrt{\mu_0} B_M$  e a velocidade da onda é  $v = c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ , podemos escrever a expressão acima como

$$\rho_{ENERGIA} = \frac{1}{c} EB$$

Se multiplicarmos a densidade de energia pela velocidade da onda, obtemos a magnitude do vetor densidade de fluxo de energia

$$S = EB \quad (3.12)$$

do mesmo modo que, multiplicando a densidade de um líquido pelo vetor da velocidade de escoamento, obtemos a densidade de fluxo deste líquido. Como os vetores  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são perpendiculares entre si e seu produto vetorial  $\vec{E} \times \vec{B}$  é um vetor que tem o sentido da direção de propagação da onda, que coincide com o sentido do transporte de energia, podemos definir assim o vetor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B} \quad (3.13)$$

que recebe o nome de **vetor de Poynting**. De modo análogo ao fluxo de um líquido, o fluxo  $\varphi$  de energia eletromagnética através de uma superfície de área  $\vec{A}$  é dado pela expressão

$$\varphi = \oiint \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

Para calcularmos o momentum associado a um campo eletromagnético, podemos proceder da seguinte forma: calculamos o momentum transmitido a um corpo quando ele absorve radiação eletromagnética, momentum este que pela lei de conservação deve ser exatamente igual à quantidade de movimento perdida pelo campo. Imaginemos

*Em homenagem ao físico inglês John Henry Poynting (1852-1914), que foi aluno de Maxwell e chegou pela primeira vez a este resultado.*

assim que uma onda plana incide normalmente sobre uma superfície condutora com permeabilidades elétrica e magnética  $\epsilon = 1$  e  $\mu = 1$ . O campo elétrico incidente produz uma corrente na superfície igual à  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ , onde  $\sigma$  é a condutividade elétrica do material. O campo magnético exercerá, pela lei de Ampère, uma força por unidade de volume sobre esta corrente cujo valor é

$$\vec{F} = \mu_0 \vec{j} \times \vec{B}$$

Pela figura abaixo podemos ver que a direção desta força coincide com a direção de propagação da onda.

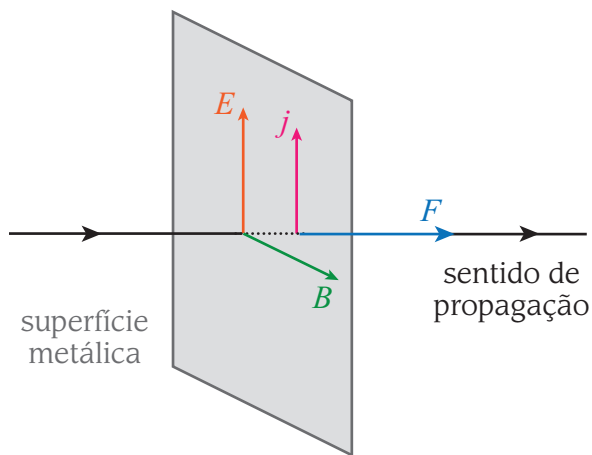


Figura 3.2 – Uma superfície fracamente condutora é atingida por uma onda eletromagnética. A figura mostra a direção dos vetores  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  bem como da densidade de corrente  $\vec{j}$  gerada pelo campo elétrico e a força por unidade de volume  $\vec{F}$  que esta densidade de corrente sofre devido ao campo magnético.

O momentum transferido por unidade de tempo para uma camada superficial de área de espessura  $dl$  é dada por

$$dK = \|\vec{F}\| dl = \mu_0 j B dl$$

A energia absorvida por esta superfície por unidade de tempo (que devido ao efeito Joule é transformada em calor) vale

$$dW = j E dl$$

Assim, a superfície recebe as quantidades de momentum e energia descritas acima que são a elas transmitidas pela radiação eletromagnética. Se tomarmos agora a razão entre as duas grandezas temos

$$\frac{dK}{dW} = \mu_0 \frac{B}{E} = \frac{1}{c}$$

onde usamos a relação  $\sqrt{\epsilon_0}E = \sqrt{\mu_0}B$  para escrever a expressão na sua forma final. Podemos assim dizer, a partir desta expressão, que uma onda carregando uma fração de energia  $dW$  carrega uma fração de momentum  $dK$  tal que

$$dK = \frac{1}{c}dW$$

Este resultado era esperado pela Teoria da Relatividade Restrita de Einstein, pois esta é precisamente a relação entre energia e momentum para partículas de massa de repouso zero. É agora um simples exercício matemático mostrarmos que é possível escrever a expressão acima por

$$\vec{K} = \frac{1}{c^2}\vec{S} = \frac{1}{c^2}(\vec{E} \times \vec{B})$$

que é a expressão que relaciona o vetor de Poynting com a densidade de momentum que uma onda transporta. A transferência de momentum do campo eletromagnético para uma superfície produz assim uma força. Essa força provocará o deslocamento da superfície e, no caso de uma superfície refletora ideal (que reflete toda a radiação incidente), a força será o dobro daquela sobre uma superfície absorvedora ideal. Esta força por unidade de área exercida pela radiação sobre uma superfície recebe o nome de *pressão de radiação* e pode, em princípio, ser usada para mover objetos com área suficientemente grande no espaço (a pressão da radiação independe de se o corpo que a recebe está no espaço ou não, mas sendo a pressão muito pequena, apenas na ausência de forças de viscosidade devido à presença de uma atmosfera este efeito pode ser perceptível).

### 3.6 Emissão de um dipolo

Um importante resultado da teoria de ondas eletromagnéticas é aquele da emissão de ondas por um dipolo elétrico oscilante. Este simples modelo de uma carga negativa oscilando no entorno de uma carga positiva (considerada fixa) é o paradigma para o estudo de antenas emisoras (e receptoras) de radiação eletromagnética. O dipolo, como já visto no curso anterior, consiste em duas cargas  $+q$  e  $-q$ , separadas por uma distância  $d$ . Considerando a carga positiva como estando localizada na origem do sistema de coordenadas e a carga negativa na posição  $\vec{d}$ , teremos

$$\vec{p} = -q\vec{d} = -qdcos(\omega t)\hat{e}$$

onde  $\hat{e}$  é um versor na direção do eixo do dipolo. A familiarização com o problema deste dipolo oscilante é extremamente útil tendo em conta que muitas propriedades de emissão de radiação eletromagnética de sistemas atômicos ou interações destes com campos eletromagnéticos externos podem ser estudados em considerando os elétrons como sendo capazes de oscilar em torno de sua posição de equilíbrio. Tomemos assim um dipolo cujas dimensões são muito menores que o comprimento da onda que ele emite, ou seja,  $d \ll \lambda$ . A forma das linhas de campo no entorno do dipolo são bastante complicadas, mas tornam-se mais fáceis de serem visualizadas a distâncias  $r$  do dipolo tais que  $r \gg \lambda$ . Nesta região, chamada de **região de onda**, as frentes de onda serão esféricas e os vetores  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são perpendiculares entre si e ao raio vetor  $\vec{r}$ , como mostra a figura abaixo.

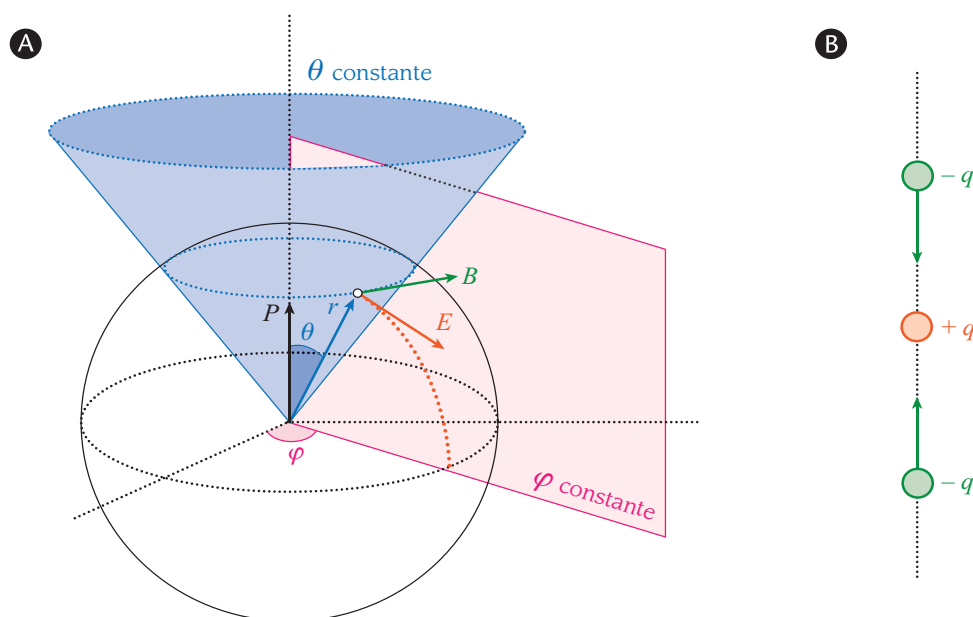


Figura 3.3 – Representação da onda esférica de um dipolo emissor quando  $r \gg \lambda \gg d$ . Do lado direito da figura, representação de uma carga negativa que oscila no entorno de uma carga positiva.

Chamando de meridianos as seções da frente de onda cortadas por planos longitudinais com relação ao eixo de dipolo e de paralelos as seções da esfera com os planos perpendiculares ao eixo do dipolo, podemos ver na ilustração acima que o vetor  $\vec{E}$  sempre aponta ao longo da tangente de um meridiano, ao passo que o vetor  $\vec{B}$  é tangente aos paralelos para quaisquer pontos sobre a superfície da esfera. Em qualquer ponto da superfície, estes vetores oscilam segundo a lei  $\cos(\omega t - kr)$  e sua amplitude depende não apenas da distância  $r$  do centro da esfera, mas também do ângulo  $\theta$  entre a direção de  $r$  e o eixo do dipolo (ver figura 3.3). De acordo com os resultados vistos no curso anterior, as amplitudes  $E_M$  e  $B_M$  têm os valores

$$E_M \propto B_M \propto \frac{1}{r} \sin\theta$$

E, portanto, o valor médio da densidade de fluxo de energia  $\langle S \rangle$  é proporcional ao produto  $E_M B_M$ , isto é:

$$\langle S \rangle \propto \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta.$$

É de se esperar a proporcionalidade com o inverso do quadrado da distância uma vez que, para uma dada fonte na origem do sistema de coordenadas, o fluxo da energia por ela emitida atravessa sucessivas esferas cuja superfície  $A$  aumenta como  $A \propto r^2$ . Imaginando assim uma frente de onda que se espalha radialmente, a energia por ela transportada atravessa sucessivamente esferas cada vez maiores e o fluxo por unidade de área deve então ser cada vez menor na proporção de  $1/r^2$  para compensar o efeito do crescimento da superfície da esfera. A dependência angular também é interessante, pois ela nos diz que o fluxo de energia é máximo na direção perpendicular ao eixo do dipolo (em  $\theta = \pi/2$ ), sendo mínima exatamente ao longo das direções do seu eixo ( $\theta = 0, \pi$ ). Podemos visualizar esta dependência desenhando o chamado *diagrama direcional* do dipolo (figura abaixo). Este diagrama é feito de tal maneira que o comprimento do segmento que sai do centro do dipolo e atinge a curva seja igual à intensidade emitida naquela direção angular  $\theta$ .

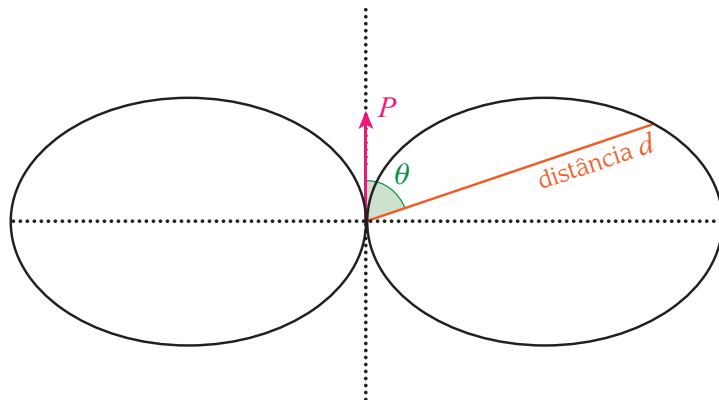


Figura 3.4 – Diagrama direcional de emissão de um dipolo. Para um dado ângulo  $\theta$  a distância entre a origem (onde se localiza o dipolo) e um ponto da superfície é numericamente igual à intensidade da radiação emitida naquela direção.

O chamado **poder radiante**  $P$  do dipolo, que é por definição a energia emitida em todas as direções por unidade de tempo, é proporcional à segunda potência da derivada segunda de  $\vec{p}$  no tempo:

$$P \propto \frac{d^2 \vec{p}^2}{dt^2}$$

que, pelos resultados vistos anteriormente, nos leva a

$$P \propto q^2 d^2 \omega^4 \cos^2(\omega t).$$

cuja média temporal nos dá aproximadamente

$$\langle P \rangle \propto q^2 d^2 \omega^4$$

ou seja, o poder radiante médio de um dipolo elétrico é proporcional ao quadrado da sua amplitude e à quarta potência da frequência. Assim, para sistemas elétricos que operam a baixas frequências (como linhas de transmissão de rede elétrica, ou grande parte dos aparelhos eletrodomésticos, que operam a 60 Hz), as perdas de energia por emissão de radiação são desprezíveis. A grande parte da perda de energia nestes casos se dá pelo efeito Joule, isto é, o aquecimento dos componentes do sistema em virtude da resistência elétrica. A expressão deduzida acima se aplica não apenas a dipolos, mas a quaisquer cargas aceleradas, em primeira aproximação, pois sendo o momento de dipolo dado por  $\vec{p} = q\vec{r}$ , onde  $\vec{r}$  é a posição da partícula carregada, a derivada segunda no tempo que surge no poder radiante é então proporcional à aceleração da carga, ou seja

$$P \propto \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \propto q \vec{a}^2$$

e, portanto, concluímos que uma carga acelerada sempre emite energia na forma de radiação eletromagnética. Aliás, esta era uma das principais críticas aos primeiros modelos atômicos para a matéria, porque acreditava-se que a órbita de um elétron em torno do núcleo atômico seria instável pois ele perderia sua energia por emissão de radiação (um elétron em órbita possui uma aceleração centrípeta  $a = v^2 / r$ ).

Uma das aplicações mais interessantes da emissão de radiação por cargas aceleradas se dá em aceleradores de partículas, como o bératron em que, devido à aceleração centrípeta, elétrons são utilizados para produção de radiação eletromagnética. Uma vez que esta perda é proporcional ao quadrado da aceleração (ou à quarta potência da velocidade dos elétrons), as possíveis energias que os elétrons podem atingir nestes dispositivos são da ordem de 500 MeV – para velocidades acima deste valor, qualquer energia que se tente dar aos elétrons acelerando-os com um campo elétrico é perdida na forma de radiação. Pode-se assim também obter *radiação monocromática* de frequência bem definida, pois esta depende da frequência da oscilação harmônica da partícula carregada.

*Estas radiações têm grande utilidade prática em pesquisa científica. Temos no Brasil um grande laboratório onde estas técnicas são utilizadas: o Laboratório Nacional de Luz Síncrotron, na região de Campinas (SP).*

### 3.7 Ondas de Luz

A luz, uma onda eletromagnética, é um fenômeno altamente complexo. Não obstante ela seja uma onda, há situações em que podemos considerá-la como sendo um feixe de partículas (fótons). Há, assim, no tratamento dos fenômenos ópticos, duas maneiras de atacarmos um problema: a chamada **óptica geométrica**, na qual podemos tratar a luz como formada de um raio reto, desprezando seu caráter ondulatório, e a **óptica física**, em que temos que usar as propriedades ondulatórias da luz para explicar certos fenômenos físicos. A opção pela aplicação de uma ou outra “óptica” depende essencialmente das dimensões do sistema com o qual estamos lidando. Sendo o comprimento de onda da luz visível é da ordem de décimos milionésimos de metro ( $10^{-7}$  m), se estivermos tratando das propriedades de *reflexão* ou *refração* de luz em superfícies ou espelhos, que tem dimensões macroscópicas, podemos desprezar o ínfimo tamanho do comprimento de onda e considerar a luz como um feixe de partículas. Porém, ao estudarmos o comportamento da luz quando esta interage com objetos de dimensões da mesma ordem de grandeza que seu comprimento de onda, então temos que utilizar a óptica física, como nos problemas de *interferência* e *difração*. Estas diferentes maneiras de tratar a luz serão exploradas detalhadamente nos próximos capítulos: nos caps. 4 e 5 estudaremos a óptica geométrica, ao passo que no capítulo 6, a óptica física. Nesta seção discutiremos alguns resultados gerais da luz, como preparação para os capítulos posteriores.

A onda eletromagnética consiste, como vimos, em dois campos: o elétrico e o magnético. Porém, experimentos com luz, sejam eles na Fisiologia, na Química ou mesmo na Física, mostram que nossas células, as substâncias químicas e sistemas físicos de interesse reagem por ação dos **campos elétricos**. Assim, quando se fala em óptica de luz, e dos efeitos dela sobre a matéria inerte ou viva, está se pensando apenas no campo  $\vec{E}$ . O campo  $\vec{B}$  é desprezível para as situações de interesse.

**Pergunta: por quais razões físicas podemos desprezar  $\vec{B}$  na óptica?**

**Resposta:** inicialmente devemos lembrar que estamos tratando de campos magnéticos gerados pela variação temporal de campos elétricos, de acordo com as Leis de Maxwell. Se tomarmos a relação entre as amplitudes destes vetores, veremos que o campo magnético é, em magnitude, muito menor que o campo elétrico, na realidade por um fator proporcional ao inverso da velocidade da luz. Assim, apenas campos



elétricos de altíssima frequência produzem campos magnéticos apreciáveis. Outro ponto importante é que o campo magnético interage com as partículas atuando em seus spins – porém as próprias interações entre spins são muito mais intensas que as interações com campos externos, e apenas são significativas para campos externos muito intensos, que não é o caso dos campos magnéticos com que estamos tratando.

Vamos descrever um campo elétrico oscilante por meio da expressão

$$E = E_M \cos(\omega t - kr + \alpha)$$

onde, como já dito,  $k$  é o número de onda (angular) e  $r$  a distância medida ao longo da direção de propagação da onda. Para uma onda plana, a amplitude é uma constante, e para uma onda esférica, ela decresce proporcionalmente a  $1/r$ .

Os meios densos pelos quais a luz se propaga são descritos por uma grandeza *macroscópica* chamada **índice de refração** do meio, representada pela letra  $n$ . O índice de refração de qualquer meio pelo qual a luz se propaga pode ser experimentalmente verificado tomando-se a razão

$$n = \frac{c}{v}$$

entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz no meio. A relação que existe entre o índice de refração de um meio e seus coeficientes de permeabilidade elétrica e permissividade magnética é  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$  e como para grande parte das substâncias transparentes à luz temos  $\mu \approx 1$ , podemos escrever

$$n = \sqrt{\epsilon}.$$

Esta equação é importante por relacionar as propriedades ópticas de um material com suas propriedades elétricas. Esta fórmula foi pela primeira vez verificada experimentalmente pelo físico austríaco Ludwig Eduard Boltzmann, dando forte suporte experimental à teoria de Maxwell (Boltzmann ficou famoso na Física por ter sido um dos criadores da Mecânica Estatística, junto a R. Clausius, J. M. Maxwell e J. W. Gibbs). Contudo, devemos ter uma certa precaução com esta equação: se tomarmos o valor de  $\epsilon$  para a água, que é de aproximadamente  $\epsilon = 81$ , temos  $n = 9$  de acordo com a equação acima - um valor muito longe do valor real medido de  $n = 1.33$ . Isto ocorre porque o valor para  $\epsilon$  foi obtido por meio de uma medida *eletrostática* ( $\vec{E}$  constante no tempo); a expressão matemática acima foi obtida para campos *eletrodinâmicos* e, se medirmos o valor de  $\epsilon$  com estes campos, veremos que seu valor depende da frequência do campo elétrico utilizado. Isso se deve à

propriedade de **dispersão** da luz, ou seja, a dependência do índice de refração (ou velocidade da luz) com a frequência (ou comprimento de onda). Lembramos que no vácuo **não há dispersão**, pois a velocidade da luz é uma constante (ela não depende da frequência da luz).

Costuma-se falar em meios opticamente mais densos ou menos densos, caso seu valor de  $n$  seja maior ou menor. O óleo, por exemplo, é opticamente mais denso que o ar ( $n_{\text{óleo}} \approx 1.18 > n_{\text{ar}} \approx 1.004$ ). Os comprimentos de onda da luz visível encontram-se entre os limites de

$$\lambda = 0,40\mu\text{m} \rightarrow 0,76\mu\text{m}$$

*Isto significa que enxergamos “melhor” esta cor do que as outras, isto é, se tivermos várias fontes de diferentes cores com a mesma intensidade e formos diminuindo-as igualmente, a última cor a “desaparecer” será a verde. Evolucionistas da área de Biologia argumentam que isso se deve ao processo de seleção natural, onde nossos olhos tiveram que se adaptar para enxergar bem em florestas, local de surgimento dos primeiros hominídeos.*

ou seja, entre  $4.0 \times 10^{-7}\text{m}$  até  $7.6 \times 10^{-7}\text{m}$ . É comum na literatura encontramos comprimentos de onda em unidades de nanômetro ( $10^{-9}\text{m}$ ) ou Å (Ångstrom =  $10^{-10}\text{m}$ , pronuncia-se óngstrom). Nestes casos a luz visível situa-se entre 400 e 760 nano ou 4000 e 7600 Å. O valor menor corresponde à luz violeta; o maior, à vermelha. Por isso, se fala comumente em *infravermelho* e *ultravioleta* – o único cuidado que devemos tomar é que o infra e ultra destas expressões não se referem ao comprimento das ondas, que são maiores e menores que o vermelho e violeta, respectivamente. O infra e o ultra se referem à frequência destas ondas, que são menores e maiores que estas respectivas cores. O olho humano tem uma **maior sensibilidade** para a luz verde de aproximadamente 5500 Å.

Todos estes valores dizem respeito ao comprimento da luz no vácuo. O comprimento das ondas nos meios opticamente densos mudam: se tivermos uma oscilação de frequência  $f$ , o comprimento de onda será dado por  $\lambda = c / f$ , que nada mais é do que a expressão espaço = (velocidade)  $\times$  (tempo) escrita em grandezas adequadas. Num meio no qual a velocidade da luz é  $v = c / n$ , segue imediatamente que

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$$

onde usamos o subscrito  $n$  para indicar que o comprimento  $\lambda_n$  refere-se a um meio opticamente denso. Este resultado requer uma certa discussão: ele nos diz que, ao entrar num meio denso, tanto a velocidade quando o comprimento da onda se alteram. **O que permanece inalterada é a frequência da onda.** Este resultado não tem explicação dentro da física clássica e foi apenas em 1905, com a hipótese dos **quanta de luz** de Einstein (fótons, partículas de luz), que usou as idéias da então nascente Mecânica Quântica para explicar o **fenômeno fotoelétrico**, que foi possível entender este resultado. Na realidade a energia de cada fóton é uma função apenas de sua frequência  $E_{\text{fóton}} = hf$ , onde  $h$  é uma constante universal chamada de constante

*A explicação do Efeito Fotoelétrico rendeu a Einstein o Prêmio Nobel de Física em 1921.*

de *Planck*. Sem entrarmos muito nos detalhes das interações entre fótons e a matéria, basicamente o que ocorre é que grande parte dos fótons atravessam o meio sem perder energia, sendo apenas espalhados pelos núcleos atômicos (alguns são absorvidos e reemitidos). Uma vez que sua energia não se altera (e portanto sua frequência), a alteração da velocidade da luz no meio obriga o comprimento de onda a se encurtar, para que a frequência não mude.

*Em homenagem ao físico alemão Max Planck, que a introduziu em 1905 em seu trabalho sobre a radiação do corpo negro.*

O que nossos olhos vêem é a intensidade da luz, ou seja, a média da magnitude do fluxo de energia no tempo, isto porque a frequência é tão alta que nossos olhos não conseguem registrar as variações temporais nesta intensidade. Para termos uma idéia, a frequência da luz visível encontra-se entre  $0.39 \times 10^{15}$  e  $0.75 \times 10^{15}$  Hz ou 0.39 e 0.75 Terahertz. A intensidade  $I$  de uma onda luminosa é definida como a média temporal do módulo do vetor de Poynting:

$$I = \langle \vec{S} \rangle = \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle$$

Esta média é feita sobre o tempo de operação do instrumento de medida. No caso de nossos olhos seria o tempo de resposta das células de nossa retina e ao disparo de sinais nos neurônios (da ordem de microsegundos). A intensidade luminosa é medida de potência por metro quadrado ( $W/m^2$ ) ou em uma unidade própria definida como *lúmen (lm) por metro quadrado*. O lúmen é definido em termos de uma unidade fundamental de intensidade luminosa, a *candela (cd)*. Esta é definida como a intensidade luminosa perpendicular a uma área de  $1/600.000 m^2$  da superfície de um corpo negro à temperatura de fusão da platina sob a pressão de 101.325 Pascals. O lúmen é assim a unidade de fluxo luminoso emitido por uma fonte isotrópica com uma intensidade de 1 *cd* por um ângulo sólido de 1 *esterradiano*.

$$1 \text{ lm} = 1 \text{ cd} \cdot 1 \text{ sr}$$

Traduzindo isto numa linguagem mais próxima da nossa realidade, o fluxo de 1 lm é aquele de uma lampadazinha verde ( $\lambda = 5550$  nanômetros) de potência de 0.0016 Watts.

Como a magnitude do valor médio do vetor de Poynting é proporcional ao produto  $E_M B_M$ , temos que a intensidade será proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico, ou seja,

$$I \propto E_M^2$$

Este resultado é bastante usado quando queremos calcular as intensidades de franjas de interferência, como veremos no capítulo 5.

As linhas ao longo das quais a energia luminosa se propaga são chamadas de **raios** e a média do vetor de Poynting  $\langle \vec{S} \rangle$  no tempo aponta na direção tangente ao raio. Num meio isotrópico esta direção coincide com a direção do vetor de onda  $\vec{k}$  e os raios são perpendiculares à frente de onda. Em meios anisotrópicos, a normal à frente de onda pode não coincidir com a direção do vetor de Poynting e neste caso os raios não são ortogonais às superfícies de onda.

O processo de emissão de luz por corpos luminosos ocorre em nível atômico. A luz é formada de ondas emitidas por átomos, que disparam por intervalos de tempo de aproximadamente  $10^{-8}s$  cada um. Durante este período um pacote de ondas (chamado também de trem de ondas) de aproximadamente 3 metros de comprimento é formado. O disparo aleatório dos muitos átomos que compõem o corpo emissor faz com que vários trens de onda se superponham e deste modo a onda resultante contém planos de oscilação de diferentes direções, todos com a mesma probabilidade de ocorrerem. Assim, na luz natural, as oscilações em diferentes planos sucedem-se de maneira aleatória e sem qualquer ordem temporal (ou seja, **não há uma diferença de fase constante entre trens de onda – a luz é dita incoerente**).

Porém, se a direção de oscilação da luz for de alguma maneira mantida constante, diz-se que a luz está **polarizada**. Se as oscilações da luz ocorrem em um único plano pelo qual passa o raio, a luz é chamada de *linearmente polarizada* (ou *plano-polarizada*). Caso o vetor  $\vec{E}$  gire sobre este plano e sua magnitude varie no processo, então a ponta do vetor descreve uma elipse neste mesmo plano (e uma hélice elipsoidal no espaço). Neste caso diz-se que a luz está *elipticamente polarizada*. No caso especial da amplitude de  $\vec{E}$  ser uma constante, temos então uma onda *circularmente polarizada*. Uma das maneiras de se conseguir luz polarizada a partir da luz natural não polarizada é utilizando os chamados *polaróides*, que consistem em materiais transparentes dopados com longas cadeias moleculares unidirecionais. O processo que ocorre é relativamente simples: estas cadeias poliméricas absorvem os raios de luz que oscilam na mesma direção de seus eixos, e não absorvem a luz que oscila perpendicularmente a ela (exatamente como fez Hertz com seus experimentos em 1888, mas usando então grades de fios). Assim, toda a luz que atravessa o polaróide tem o mesmo plano de oscilação: a luz fica polarizada.

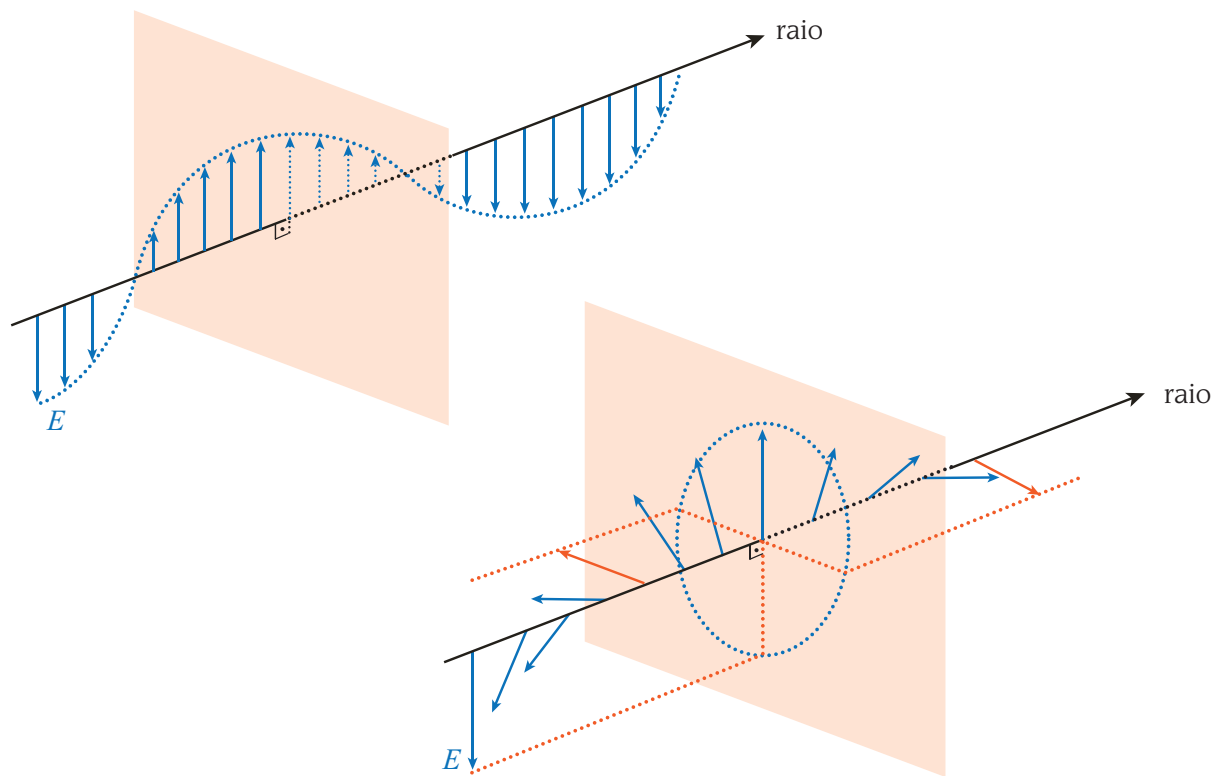


Figura 3.5 – Polarização do vetor  $\vec{E}$  no caso de um campo linearmente polarizado e um campo circularmente polarizado.

## Resumo

Neste capítulo mostramos como, a partir das equações de Maxwell para os campos elétrico e magnético e utilizando algumas propriedades dos operadores divergente e rotacional, é possível chegarmos até as equações que regem a dinâmica dos campos elétrico e magnético (campos eletrodinâmicos): ambos se propagam como uma onda no espaço, com velocidade (no vácuo) igual à  $c$  (a velocidade da luz). Estes resultados, seguidos da comprovação da natureza ondulatória do campo eletromagnético, mostraram que a luz visível nada mais é que um campo deste tipo, sendo o espectro visível apenas uma pequena porção do espectro de ondas eletromagnéticas (das quais também fazem parte a radiação infravermelho, ultravioleta, raios-X, raios-gama bem como microondas, ondas de rádio, TV, etc). Essa descoberta permitiu o desenvolvimento de grande parte da tecnologia de transmissão de dados que hoje conhecemos.

## Problemas resolvidos

**1) Vetor de Poynting** – Uma lâmpada de 100 Watts emite aproximadamente 10% de sua energia na forma de luz, de modo uniforme em todas as direções. Estime os valores quadráticos médios dos campos elétrico e magnético a uma distância de 1 m da lâmpada.

**Solução:** Para resolver este problema utilizamos o vetor de Poynting, que neste caso é um vetor radial  $\vec{S} = S\hat{r}$ , pois consideramos a lâmpada com uma esfera perfeita. Pela definição, a uma distância  $d$  do centro da lâmpada teremos a potência dissipada de

$$P = \oiint \vec{S} \cdot \hat{n} dA = 4\pi d^2 S$$

Como  $S$  é radial e uniforme sobre a superfície da esfera de raio  $d$ , a integral nos dá simplesmente o módulo de  $S$  multiplicado pela área da esfera. Como sabemos que

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB$$

e a relação entre as amplitudes de  $B$  e  $E$  são dadas por  $B = \frac{1}{c}E$ , temos que

$$S = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \rightarrow \frac{P}{4\pi d^2} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \rightarrow E = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\mu_0 c P}{4\pi}}$$

Para  $B$ , obtemos uma expressão análoga

$$B = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\mu_0 P}{4\pi c}}$$

Utilizando os valores numéricos dados no problema, obtemos, finalmente,  $E = 54,6 \text{ V/m}$  e  $B = 2,42 \times 10^{-6} \text{ T}$

**2) Vetor de Poynting** – Um feixe de prótons de velocidade  $\vec{v}$  de secção circular formam uma corrente  $I$ . Calcule o vetor de Poynting  $\vec{S}$  fora do feixe e a uma distância  $r$  do mesmo.

**Solução:** A figura 3.6 mostra que o vetor  $\vec{S}$  é paralelo ao vetor  $\vec{v}$ . A magnitude de  $S$  é dada por  $S = EB / \mu_0$ . Pelo teorema de Gauss temos

$$2\pi r E = \lambda / \epsilon_0$$

onde  $\lambda$  é a densidade linear de carga do feixe de prótons. O teorema da circulação do campo magnético nos diz que

$$2\pi rB = \mu_0 I$$

Levando em consideração que a relação entre corrente, carga e velocidade das cargas é  $I = \lambda v$ , temos então que

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB = \frac{I^2}{4\pi^2 \epsilon_0 v r^2}$$

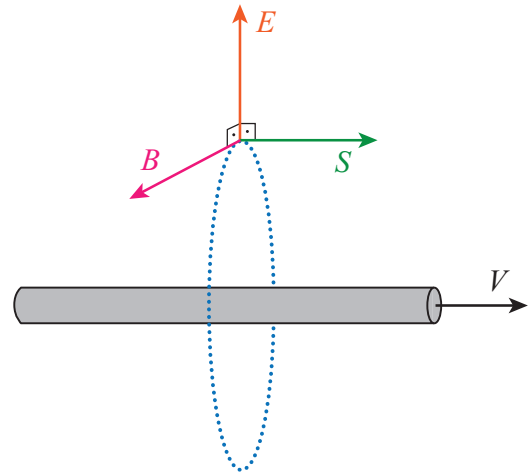


Figura 3.6

**3) Fluxo de energia e vetor de Poynting** – A corrente pela fiação de um solenóide longo de raio  $a$  é aumentada gradativamente. Mostre que a taxa de aumento da energia do campo magnético no solenóide é proporcional ao fluxo do vetor de Poynting através de sua superfície lateral.

**Solução:** À medida que a corrente aumenta, aumenta também a intensidade do campo magnético dentro do solenóide. Com a variação de  $\vec{B}$ , surge então um campo elétrico  $\vec{E}$  a ele associado. A intensidade deste campo elétrico nas proximidades da superfície lateral do solenóide pode ser determinada usando-se as equações de Maxwell

$$2\pi a E = \pi a^2 \frac{\partial B}{\partial t} \rightarrow E = \frac{a}{2} \frac{\partial B}{\partial t}$$

O fluxo de energia através das laterais do solenóide (para um solenóide de comprimento  $l$ ) pode ser descrito por

$$\Phi_{Energia} = \frac{1}{\mu_0} EB 2\pi a l = \pi a^2 l c \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$$

Notamos que o termo  $\pi a^2 l$  corresponde ao volume do solenóide. Assim, vemos que o fluxo de energia é proporcional à variação temporal da energia magnética.

## Problemas propostos com respostas

1) O campo elétrico em uma onda eletromagnética plana é dado por  $E_x = E_0 \cos(kz + \omega t)$ . Determine (a) a magnitude e direção de  $\vec{B}$  e (b) a direção de propagação da onda.

Resposta:  $B_0 = E_0 / c$  com direção  $-y$ . A propagação se dá na direção  $-z$ .

2) Qual o comprimento de onda de um sinal de radar de  $27,75 \times 10^9$  Hz? Qual a frequência de um raio-X de comprimento de onda de  $0,10$  nm?

Resposta:  $1,08$  cm e  $3,0 \times 10^{18}$  Hz.

3) Um campo elétrico  $\vec{E}$  em uma onda eletromagnética tem um valor de pico de  $36,5$  mV/m. Qual o valor médio de energia transportada por unidade de área e unidade de tempo?

Resposta:  $1,7 \times 10^{-6}$  W/m<sup>2</sup>.

4) Estime a potência média gerada pelo Sol, sendo que aproximadamente  $1350$  W/m<sup>2</sup> chega a superfície superior da atmosfera terrestre.

Resposta:  $3,8 \times 10^{26}$  W.

5) Quando o Sol se tornou quente e luminoso como o conhecemos agora, acredita-se que ele tenha ejetado partículas de poeira e átomos individuais para fora do sistema solar através da pressão exercida pela radiação. Estime quão pequenas deveriam ser estas partículas de poeira para que pudessem ser ejetadas através da comparação da força exercida pela radiação com a força gravitacional. Parta do pressuposto de que as partículas eram esféricas, com densidade de aproximadamente  $2,0 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, e que absorveram 100% da radiação sobre elas incidente. A potência média do Sol foi estimada no exercício anterior.

Resposta:  $r < 3 \times 10^{-7}$  m.

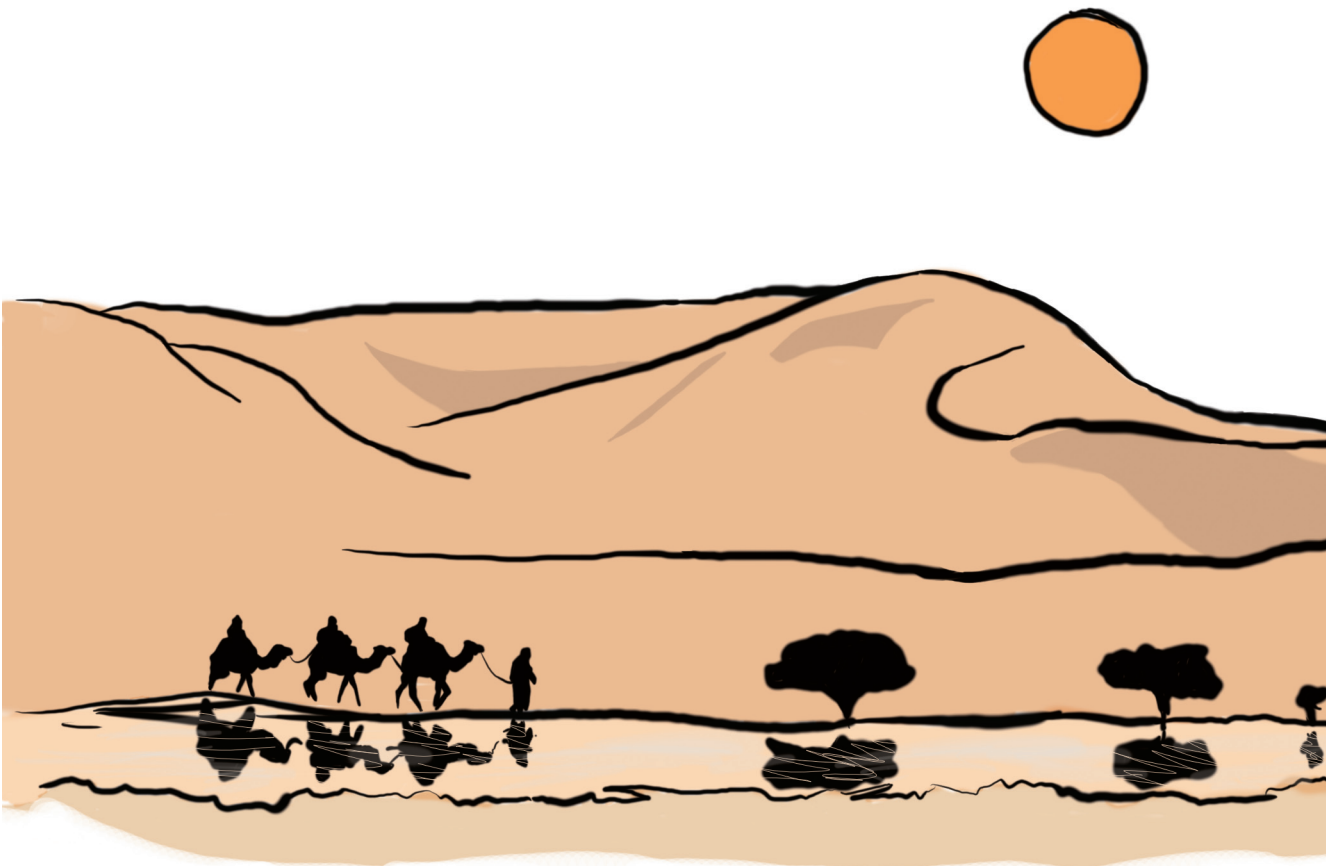
## Referências

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica**. Vol. 3. São Paulo: Edgar Blücher, 2005.

TIPLER, Paul A. **Física para Cientistas e Engenheiros**. 4. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan.



## 4 Óptica geométrica





## 4 Óptica geométrica

*Neste capítulo, utilizando os princípios da óptica geométrica, espera-se que você aprenda os conceitos de reflexão, refração e dispersão, e possa aplicá-los para entender, por exemplo, a formação do arco-íris e de miragens, a formação de imagens por espelhos e lentes, a propagação da luz numa fibra ótica... Enfim uma série de fenômenos do nosso dia a dia, relacionados com **luz visível!***



Figura 4.1 – Reflexão de prédios nas águas um riacho

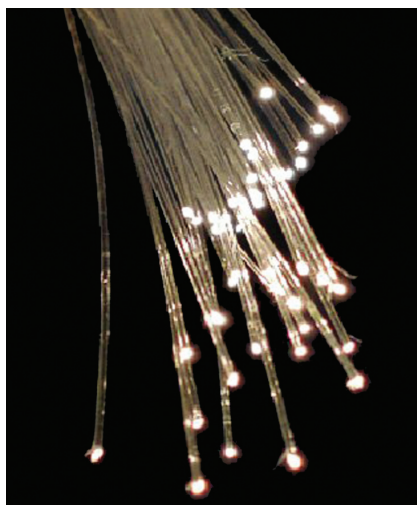


Figura 4.2 – Fibra ótica



Figura 4.3 – Miragem



Figura 4.4 – Arco íris

No capítulo anterior (Ondas Eletromagnéticas) foi estabelecida a correlação entre eletromagnetismo e óptica, e vimos que a luz visível é uma forma de radiação eletromagnética. Dentro deste contexto a luz é tratada como onda.

Ferramentas matemáticas necessárias: *construções geométricas, principalmente triângulos e princípios de trigonometria.*

Neste capítulo vamos estudar o comportamento da luz, quando:

- ela encontra uma interface entre dois meios,
- ela interage com objetos de dimensões ( $d$ ) bem maiores do que o seu comprimento de onda ( $\lambda$ ).

Neste caso, a luz pode ser tratada como um **fluxo de partículas**, num modelo idealizado na antiguidade pelos gregos, e utilizado por Sir Isaac Newton (1704), para explicar a reflexão e a refração da luz.

Este modelo fornece explicações simples sobre propriedades conhecidas da luz e permite estudar a formação de imagens usando espelhos, lentes, prismas e instrumentos ópticos. Estes fenômenos podem ser descritos de forma geométrica e por isto, chamamos esta parte da Física de *Óptica Geométrica*. Neste caso usa-se a **aproximação retilínea**, onde se traçam raios para indicar o caminho da luz através do espaço. A trajetória destes raios é reversível e eles se propagam independentemente uns dos outros. Entretanto, todos estes fenômenos também podem ser explicados utilizando-se a teoria ondulatória da luz desenvolvida por Christian Huygens (1690) e que desempenhou um papel fundamental no entendimento de fenômenos como difração e interferência da luz (Thomas Young e Augustin Fresnel, 1801), que não podem ser explicados pela Óptica Geométrica e que serão discutidos no capítulo 6.

## 4.1 Reflexão e Refração

As propriedades de reflexão e refração da luz surgem da interação da luz com a matéria. Considerando que um feixe luminoso se propaga em linha reta, o que acontece quando este feixe que está se propagando por exemplo, no ar, incide numa superfície plana de vidro? Vamos ver que parte da energia deste feixe luminoso irá retornar para o ar, ou seja, o feixe será **refletido** pela superfície de vidro e o resto desta energia irá penetrar no vidro. A passagem da luz através de uma interface que separa dois meios diferentes é chamada de **refração**. A menos que o feixe incidente seja perpendicular à interface, a refração muda a direção de propagação da luz dentro do vidro. Vamos tratar estes dois fenômenos separadamente, para fins didáticos, mas você deve ter em mente que eles acontecem sempre simultaneamente, e apenas em casos bem específicos teremos reflexão total (espelhos totalmente refletores e reflexão interna total, que depende da interface dos meios envolvidos).

## Reflexão

Na figura 4.5 vemos os raios de luz refletirem sobre dois tipos de superfície. A superfície polida (a) reflete raios paralelos, o que chamamos de **reflexão especular**. A superfície (b) é áspera e os raios refletem em diferentes direções, e neste caso temos **reflexão difusa**.

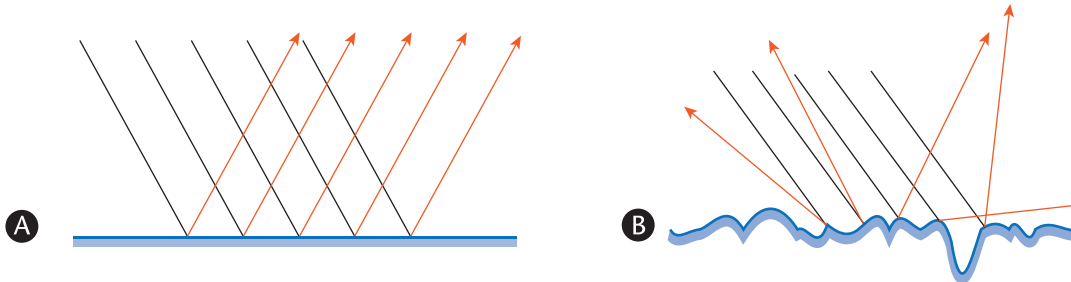


Figura 4.5 – (a) Reflexão especular; (b) Reflexão difusa.

Diz-se que uma **superfície é polida** quando suas imperfeições são pequenas frente ao comprimento de onda da luz incidente. Um espelho é uma superfície totalmente refletora para luz visível, ou seja, as imperfeições da superfície são da ordem de grandeza do comprimento de onda da luz visível. No caso de um forno de microondas, a luz atravessa os furos pequenos da porta do forno, permitindo que se veja o seu interior, mas as microondas, que possuem comprimentos de onda da ordem de centímetros são refletidas totalmente pela porta, como se aquela superfície fosse uma peça de metal contínuo. Vamos ver que a reflexão especular é necessária para a formação de imagens claras a partir de superfícies refletoras. No caso da reflexão difusa, como o feixe é refletido em diversas direções a formação de imagem não é bem definida.

Vamos considerar um raio de luz que se propaga no ar incidindo numa superfície plana e polida, como na figura 4.6. Os raios incidente e refletido fazem ângulos  $\theta_1$  e  $\theta'_1$ , respectivamente, com uma linha normal à superfície no ponto onde o raio incidente a atinge.

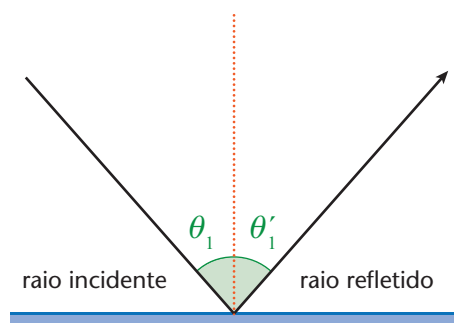


Figura 4.6 – Reflexão.

A representação matemática para a onda sob reflexão é dada pela **Lei da Reflexão**, onde o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência, e são coplanares, isto é, estão em um mesmo plano

$$\theta'_1 = \theta_1 \quad (4.1)$$

Preste atenção: os ângulos de incidência e de reflexão são medidos sempre a partir da normal à superfície, e lembre que na reflexão difusa, devido às asperezas da superfície, temos normais a esta superfície, que variam de uma posição para outra, mas a lei da reflexão continua valendo! Veja figura 4.5b.

**Exemplo 4.1:** Considere dois espelhos planos ( $E_1$  e  $E_2$ ) que fazem um ângulo de  $100^\circ$  entre si. Um raio incide sobre o espelho  $E_1$  com um ângulo de  $30^\circ$  (em relação à superfície do espelho). Encontre a direção do raio após ser refletido por  $E_2$ .

**Solução:** Considere a construção geométrica mostrada na figura 4.7. O raio incidente faz um ângulo de  $30^\circ$  com a superfície do espelho (horizontal) e, portanto, fará um ângulo de  $60^\circ$  com a normal a superfície do espelho ( $90^\circ - 30^\circ$ ). Construimos agora um triângulo feito pelo primeiro raio refletido e pelos dois espelhos (triângulo hachurado). Este raio refletido faz um ângulo de  $50^\circ$  com  $E_2$ , pois a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo deve ser de  $180^\circ$ . Isto significa que esse raio faz um ângulo de  $40^\circ$  com a normal ao espelho  $E_2$  ( $90^\circ - 50^\circ$ ), e portanto o segundo raio refletido fará um ângulo de  $50^\circ$  também com o espelho  $E_2$ .

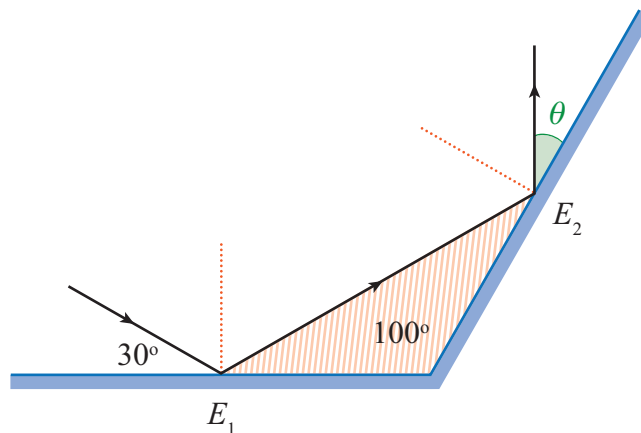


Figura 4.7 – Exemplo 4.1

## Refração

Agora vamos imaginar que a luz incidente é transmitida para um segundo meio. Neste caso o raio que penetra neste segundo meio sofre um desvio de direção exatamente na interface entre os dois meios, e diz-se então que o raio sofre **refração**. Na figura 4.8 ilustramos duas situações onde ocorre refração.

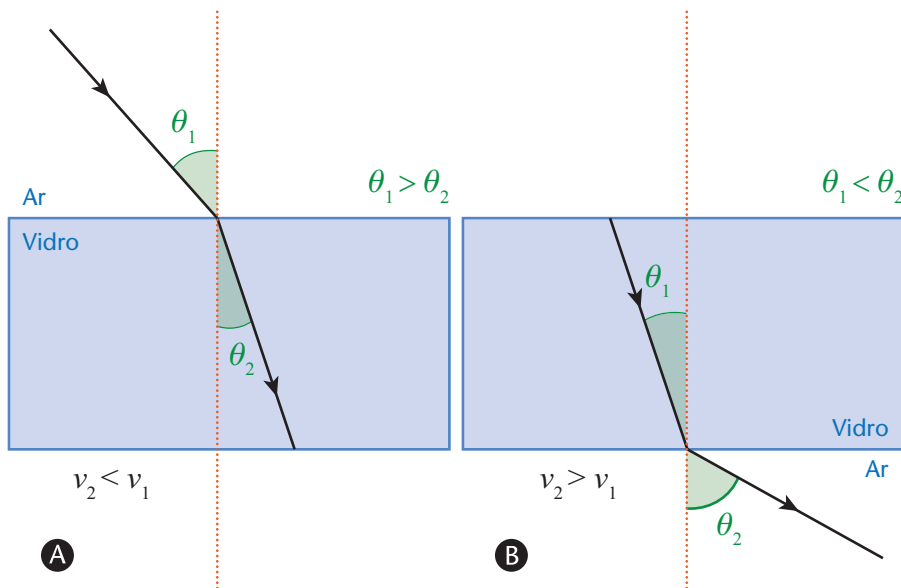


Figura 4.8 – Na figura (a) um raio de luz se propaga no ar com velocidade  $v_1$  e incide numa superfície de vidro que altera a sua velocidade para  $v_2$ . Devido a uma diferença de velocidade ( $v_2 < v_1$ ) o raio se aproxima da normal. Já na figura (b) o raio de luz está se propagando no vidro com velocidade  $v_1$  e passa a se propagar no ar com velocidade  $v_2$ , sendo  $v_1 < v_2$ , então o raio se afasta da normal.

Como vemos, o ângulo de refração  $\theta_2$  é também medido em relação a normal e depende das propriedades dos dois meios e do ângulo de incidência  $\theta_1$ , de acordo com a relação:

$$\frac{\text{sen}\theta_2}{\text{sen}\theta_1} = \frac{v_2}{v_1} = \text{constante} \quad (4.2)$$

onde  $v_1$  é a velocidade da luz no meio 1 e  $v_2$  é a velocidade da luz no meio 2. Esta lei é conhecida como Lei de Snell.

Quando a luz se propaga de um meio no qual a sua velocidade é elevada, para um meio no qual sua velocidade é mais baixa, a lei de Snell mostra que o ângulo de refração  $\theta_2$  é menor do que o ângulo de incidência  $\theta_1$ , e neste caso o raio refratado se desvia para a normal (Figura 4.8a). Quando o raio incide a partir de um meio onde sua velocidade de propagação é menor, para um meio cuja velocidade é maior  $\theta_2$  será maior que  $\theta_1$ , e assim o raio se afasta da normal, como é mostrado na Figura 4.8b.

Willebrord Snell (1580-1626), matemático holandês, obteve experimentalmente a lei da refração em 1621. Contudo, ele não a publicou, e somente em 1703 essa lei passou a ser conhecida, quando foi publicada na *Dioptrica* de Huygens. Essa lei é também conhecida com lei de Snell-Descartes, pois o matemático holandês foi o primeiro a deduzi-la experimentalmente, e logo depois o cientista e filósofo René Descartes a deduzi-la matematicamente. Fonte: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Snell.html>

Quando se fala de velocidade da luz, imediatamente pensamos na velocidade da luz no vácuo que é de  $3.00 \times 10^8$  m/s. Mas quando a luz atravessa meios como vidro, plástico, ou diamante, ela viaja com velocidades diferentes. A velocidade da luz num dado meio está relacionada a uma quantidade chamada **índice de refração**,  $n$ , já definida na secção 3.7, onde:

$$n = \frac{\text{velocidade da luz no vácuo}}{\text{velocidade média da luz no meio}} = \frac{c}{v} \quad (4.3)$$

Quando a luz viaja de um meio para outro, sua velocidade muda e de acordo com a expressão (4.3), pode-se concluir que como  $v < c$  para qualquer meio que não seja o vácuo (onde  $v = c$ ), o índice de refração será sempre maior que 1, e além disso é um número adimensional! Na Tabela 4.1 são listados os índices de refração para vários meios, medidos com a luz de comprimento de onda no vácuo de 589 nm (luz amarela do sódio).

Tabela 4.1 – Índice de refração de diversos meios

Meio	Índice de Refração
Vácuo	1 (exatamente)
Ar (CNTP) <sup>a</sup>	1,00029
Dióxido de carbono	1,0045
Água <sup>b</sup>	1,333
Benzeno <sup>b</sup>	1,501
Álcool etílico <sup>b</sup>	1,361
Acetona <sup>b</sup>	1,36
Gelo	1,309
Quartzo fundido	1,458
Vidro <i>crown</i> <sup>c</sup>	1,52
Vidro <i>flint</i> <sup>d</sup>	1,66
Safira	1,77
Zircônia cúbica	2,21
Diamante	2,419

<sup>a</sup> CNTP significa condições normais de temperatura (0°C) e pressão (1 atm).

<sup>b</sup> Líquidos a 20°C.

<sup>c</sup> *Crown glass*, vidro em cuja composição não entra chumbo.

<sup>d</sup> *Flint glass*, vidro conhecido como cristal de chumbo e cristal de rocha.

Como já foi visto anteriormente, no capítulo 3, a frequência, a velocidade e o comprimento de uma onda estão relacionados através da equação:



$$f = \frac{v}{\lambda} \quad (4.4)$$

Embora, a velocidade da onda e o seu comprimento mudem quando esta passa de um meio para outro, sua **frequência permanece constante**. Portanto, como a relação acima vale nos dois meios,  $f_1 = f_2 = f$ , vemos que:

$$f = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{c/n_2}{c/n_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

levando à seguinte relação:

$$\lambda_1 n_1 = \lambda_2 n_2$$

portanto, o índice de refração ( $n$ ) de qualquer meio pode ser expresso como a razão

$$n = \frac{\lambda_0}{\lambda_n} \quad (4.5)$$

onde  $\lambda_0$  é o comprimento de onda da luz no vácuo e  $\lambda_n$  é o comprimento da luz no meio em que o índice de refração é  $n$ .

Agora podemos escrever a **lei de Snell** na sua forma convencional, expressando-a em termos do índice de refração dos meios, em vez das velocidades:

$$\frac{\text{sen}\theta_2}{\text{sen}\theta_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow n_2 \text{sen}\theta_2 = n_1 \text{sen}\theta_1 \quad (4.6)$$

**Exemplo 4.2:** Um feixe de luz passa do meio 1 para o meio 2, como mostra a figura 4.9.

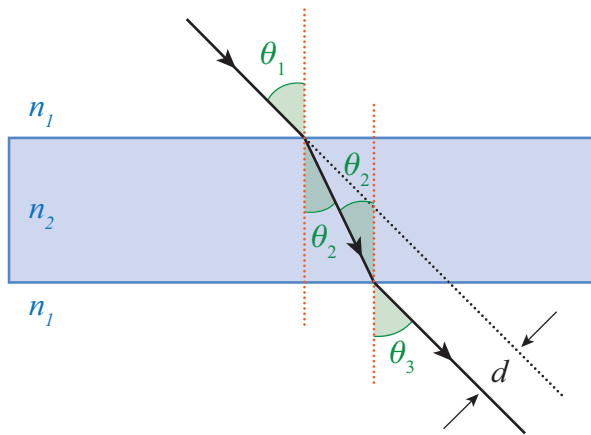


Figura 4.9 – Exemplo 4.2

- a) Mostre que o feixe emergente é paralelo ao feixe incidente.
- b) Considere que o meio 1 seja vácuo, que o meio 2 seja sílica ( $n_2 = 1,458$ ), e que o comprimento de onda da luz seja de 632,8 nm. Encontre a velocidade e o comprimento de onda da luz na sílica.

**Solução:** a) Aplicando a lei de Snell,

- à superfície superior:  $\text{sen}\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\text{sen}\theta_1$  (i)
- à superfície inferior:  $\text{sen}\theta_3 = \frac{n_2}{n_1}\text{sen}\theta_2$  (ii)

Substituindo agora a equação (i) na (ii), temos

$$\text{sen}\theta_3 = \frac{n_2}{n_1} \left( \frac{n_1}{n_2} \text{sen}\theta_1 \right) = \text{sen}\theta_1$$

Portanto  $\theta_3 = \theta_1$  o que indica que a camada não altera a direção do feixe que incide na parte superior, apenas desloca este feixe de uma distância  $x$ .

- b) A velocidade da onda na sílica é dada por:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3,00 \times 10^8 \text{ m/s}}{1,458} = 2,06 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 0,687c$$

E o comprimento de onda:

$$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{632,8 \text{ nm}}{1,458} = 434 \text{ nm}$$

## Miragem

Podemos explicar um fenômeno da natureza muito interessante que é a **miragem**, através da refração da luz! De fato, miragens são imagens virtuais causadas por uma grande refração da luz quando esta se propaga no ar. Você já deve ter visto uma miragem quando observa o asfalto de uma estrada ao longe, num dia quente. Parece que o chão brilha, como se tivesse água na sua superfície. Isto só acontece em situações muito específicas:

- a superfície da terra é aquecida pelo sol e a camada de ar logo acima desta superfície estará mais quente;

- alguns metros acima da superfície a camada de ar já estará mais fria;
- diferentes temperaturas para estas camadas de ar resultam em diferentes densidades e portanto, teremos diferentes índices de refração nestas camadas.

Na figura 4.10 temos uma idéia de como uma miragem se forma. Os raios de luz refratados a partir do objeto darão uma impressão de que o objeto está de fato abaixo do solo, é como se estivéssemos vendo um efeito de reflexão, isto é, como se o solo fosse um espelho e estivéssemos vendo a reflexão do objeto neste espelho. Os raios de luz se curvam na trajetória real devido a diferença de velocidade destes raios no ar quente e no ar frio. No ar quente, a luz viaja mais rapidamente, pois o índice de refração é menor. Pode-se dizer que temos uma menor concentração de partículas por metro cúbico, facilitando a propagação da luz. A diferença de velocidades da luz, no ar quente e no ar frio, portanto, vai resultar numa curvatura na trajetória dos raios. Nossos olhos e cérebro assumem que a luz viaja sempre em linha reta, como é mostrado na figura 4.10, por isto “enxergamos” a trajetória aparente dos raios de luz, ou seja, como se viessem de dentro do solo, numa linha reta.

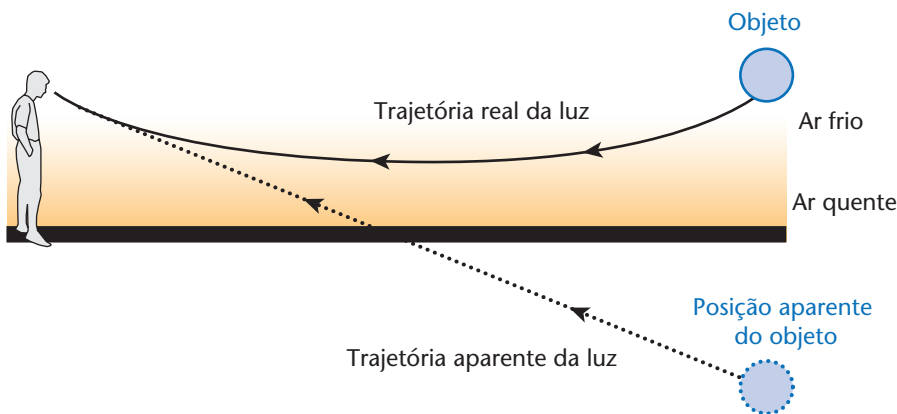


Figura 4.10 – Miragem.

## 4.2 Dispersão e prismas

O que acontece quando um raio de luz passa através de um prisma de vidro triangular?

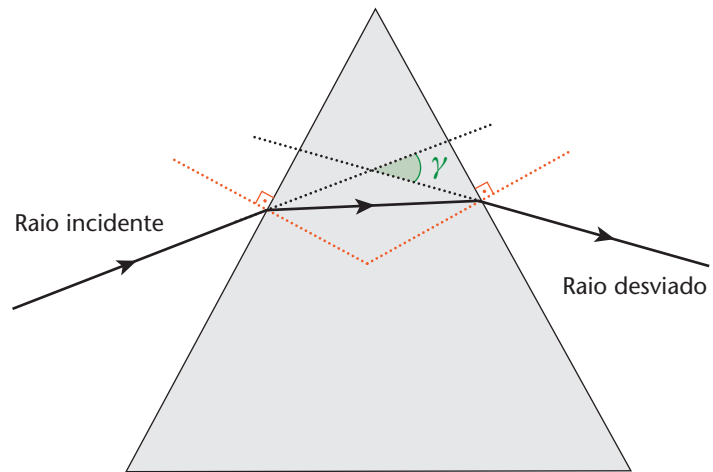


Figura 4.11 – Luz refratada por um prisma.

A luz é refratada em ambas as superfícies do prisma e se desvia do seu caminho original, como é mostrado na figura 4.11. O ângulo de desvio  $\gamma$  depende do índice de refração do material.

**Dispersão** é definida como a dependência do índice de refração com o comprimento de onda, que resulta da dependência da velocidade da onda com o comprimento de onda.

Isto significa que para um feixe de luz branca, que é formado por todas as cores, cada comprimento de onda será desviado diferentemente, ou seja, o ângulo de refração será diferente para cada cor, de acordo com a lei de Snell. A refração irá espalhar o feixe e portanto, separar os comprimentos de onda. No gráfico da figura 4.12 podemos ver a variação do índice de refração como função do comprimento de onda, ou seja, a **dispersão** para um vidro *crown*.

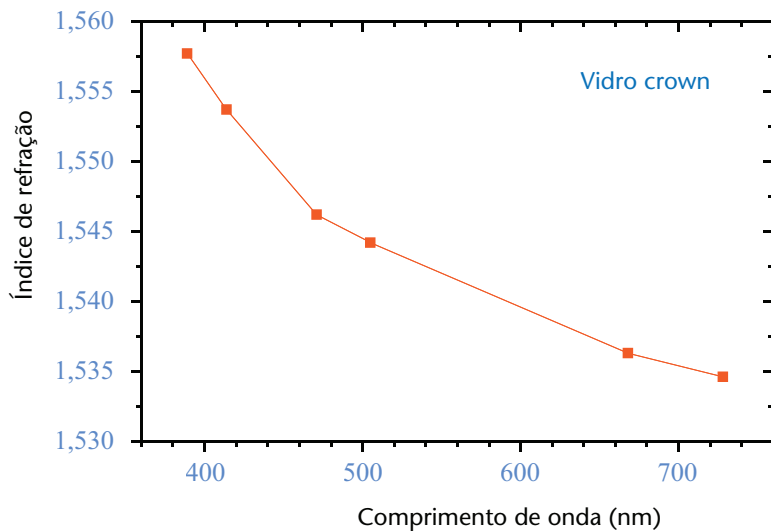


Figura 4.12 – Dispersão para um vidro *crown*

De acordo com o gráfico da figura 4.12 quanto maior o comprimento de onda, menor o índice de refração. Isto significa que a luz violeta (~ 400 nm) refrata mais do que a luz vermelha (~ 750 nm), ao passar do ar para algum material, ou seja, a luz violeta tem um ângulo de desvio maior do que a luz vermelha e as cores restantes do espectro estão entre esses dois extremos, como está ilustrado na figura 4.13.

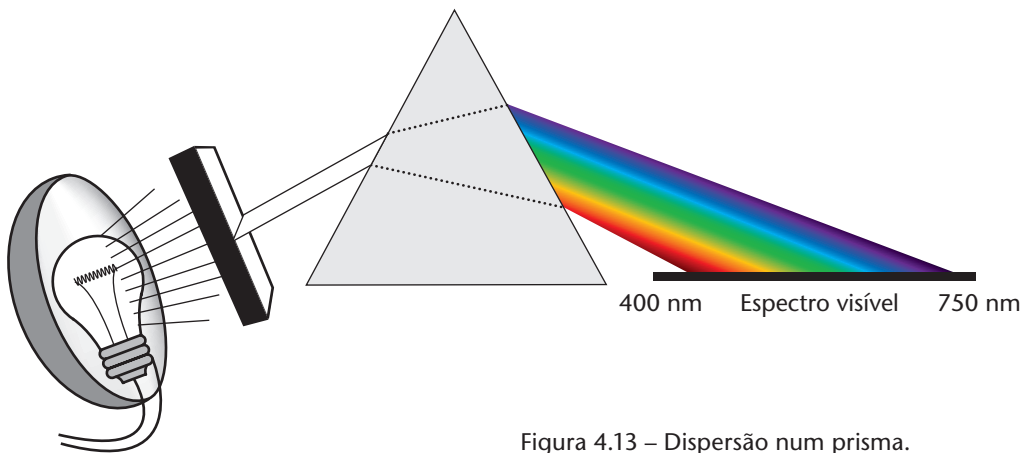


Figura 4.13 – Dispersão num prisma.

É interessante determinarmos, como exercício, o **ângulo de desvio mínimo** para as diferentes cores e como ele varia com o índice de refração. Esta relação pode ser deduzida para um prisma, usando geometria e considerando os triângulos desenhados na figura 4.14. Vamos determinar qual o ângulo de incidência  $\theta_1$  que nos dará o menor ângulo de desvio  $\theta$ , ou seja, o ângulo de desvio mínimo  $\gamma_{\min}$ .

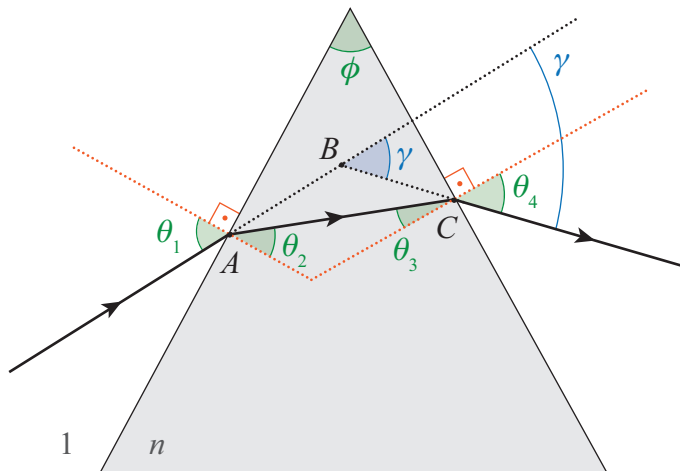


Figura 4.14 – Geometria para determinar o ângulo de desvio mínimo para a luz refratada num prisma.

Olhando o triângulo ABC, podemos ver que o ângulo de desvio  $\gamma$  é o ângulo externo a este triângulo, sendo dado como a soma dos ângulos internos não adjacentes a ele:

$$\gamma = (\theta_1 - \theta_2) + (\theta_4 - \theta_3) = [\theta_1 - (\phi - \theta_3)] + (\theta_4 - \theta_3) = \theta_1 + \theta_4 + \phi \quad (4.7)$$

É fácil ver a partir da geometria da figura 4.14 que o ângulo  $\phi$  está relacionado aos dois ângulos internos de refração por:

$$(90^\circ - \theta_2) + \phi + (90^\circ - \theta_3) = 180^\circ \Rightarrow \phi = \theta_2 + \theta_3 \quad (4.8)$$

Agora aplicando a lei de Snell no ponto A e no ponto B, temos, respectivamente:

$$\text{sen}\theta_1 = n\text{sen}\theta_2 \quad (4.9)$$

$$n\text{sen}\theta_3 = \text{sen}\theta_4 \quad (4.10)$$

O ângulo de desvio mínimo será obtido derivando a equação (4.7) em relação ao ângulo incidente ( $\theta_1$ ) e igualando a zero:

$$\frac{d\gamma}{d\theta_1} = \frac{d\theta_1}{d\theta_1} + \frac{d\theta_4}{d\theta_1} + \frac{d\phi}{d\theta_1} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{d\theta_4}{d\theta_1} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta_4}{d\theta_1} = -1 \quad (4.11)$$

Derivando agora a equação (4.10) em relação a  $\theta_1$  e substituindo a equação (4.11) nela, temos:

$$\cos\theta_4 \frac{d\theta_4}{d\theta_1} = n \cos\theta_3 \frac{d\theta_3}{d\theta_1} \Rightarrow -\cos\theta_4 = n \cos\theta_3 \frac{d\theta_3}{d\theta_1} \quad (4.12)$$

Derivando a equação (4.8) em relação a  $\theta_1$  temos:

$$\frac{d\theta_3}{d\theta_1} = -\frac{d\theta_2}{d\theta_1} \quad (4.13)$$

Multiplicando a equação (4.12) por  $\cos\theta_2$  e substituindo a (4.13) temos

$$-\cos\theta_4 \cos\theta_2 = -n \cos\theta_3 \cos\theta_2 \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \quad (4.14)$$

Fazendo o mesmo para a equação (4.9), e multiplicando o resultado por  $\cos\theta_3$

$$\cos\theta_1 \cos\theta_3 = n \cos\theta_3 \cos\theta_2 \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \quad (4.15)$$

Subtraindo a equação (4.14) da (4.15) temos:

$$\cos \theta_1 \cos \theta_3 = \cos \theta_2 \cos \theta_4 \quad (4.16)$$

Elevando ao quadrado a equação (4.16), usando a relação trigonométrica  $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$ , e substituindo as equações (4.9) e (4.10) temos:

$$(1 - n^2 \text{sen}^2 \theta_2)(1 - n^2 \text{sen}^2 \theta_3) = (1 - \text{sen}^2 \theta_2)(1 - n^2 \text{sen}^2 \theta_3),$$

simplificando agora, obtemos:

$$(n^2 - 1)\text{sen}^2 \theta_2 = (n^2 - 1)\text{sen}^2 \theta_3$$

e assumindo que  $n \neq 1$  chegamos a igualdade:  $|\text{sen} \theta_2| = |\text{sen} \theta_3|$

Portanto, a única solução possível e consistente com a equação (4.8) é

$$\theta_2 = \theta_3 = \frac{\phi}{2} \Rightarrow \theta_1 = \theta_4 \quad (4.17)$$

Estas são então as condições para se obter o **ângulo de desvio mínimo** ( $\gamma_{\min}$ ).

Podemos determinar o índice de refração a partir da medida do ângulo de desvio mínimo e da medida do ângulo do vértice do prisma ( $\phi$ ). Partindo da equação (4.7) e das condições para  $\gamma_{\min}$  podemos escrever:

$$\gamma_{\min} = 2\theta_1 + \phi \Rightarrow \theta_1 = \frac{\gamma_{\min} + \phi}{2} \quad (4.18)$$

Da equação (4.9) segue que

$$\text{sen} \theta_1 = n \text{sen} \frac{\phi}{2} \quad (4.19)$$

Agora substituindo a equação (4.18) na (4.19), obtemos:

$$n = \frac{\text{sen} \left( \frac{\gamma_{\min} + \phi}{2} \right)}{\text{sen} \frac{\phi}{2}} \quad (4.20)$$

### Arco-íris

Um fenômeno da natureza que é um exemplo típico de dispersão é o **arco-íris**, onde a luz do sol é refratada pelas gotas de água na atmosfera, após uma chuva. A figura 4.15 mostra como isto ocorre. A luz vinda do sol, que deve estar atrás de você, incide na gota de chuva

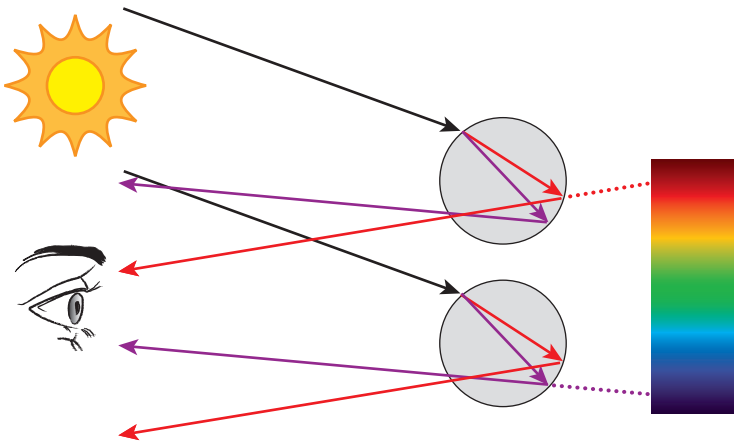


Figura 4.15 – Visualização do arco íris.

e é refratada, ocorrendo uma dispersão, pois o índice de refração da água varia com o comprimento de onda, onde o vermelho é menos refratado, e o violeta é mais refratado. Esta luz incide na interface no outro extremo da gota e ocorre reflexão interna total, sendo logo em seguida refratada de novo, chegando aos seus olhos, onde apenas algumas cores irão chegar no ângulo correto. Este ângulo é definido entre o raio refratado que chega aos olhos e a direção incidente da luz do sol, como está indicado na figura 4.14.

Este ângulo foi calculado por Descartes, que mostrou ser de  $42^\circ$ . Portanto, este é o ângulo no qual devemos observar o arco-íris. Às vezes observamos arco-íris duplo e isto irá acontecer quando os raios são refletidos duas vezes dentro da gota.

### 4.3 Reflexão Interna Total

Quando a luz atravessa uma interface vinda de um meio com maior índice de refração e passando para um meio com menor índice de refração, o raio refratado se afasta da normal, como mostra a figura 4.16.

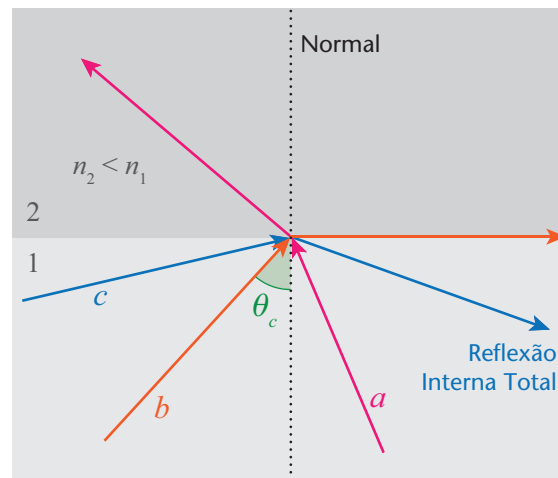


Figura 4.16 – Refração da luz vinda de um meio com índice de refração maior ( $n_1$ ), que o meio onde acontece a refração ( $n_2$ ). São representados três raios (a,b,c) incidindo com ângulos diferentes, onde o raio c incide num ângulo maior que o ângulo crítico ( $\theta_c$ ), realizando uma reflexão interna total.



Note que isto tem uma implicação interessante! Existe um ângulo, chamado de ângulo crítico  $\theta_c$ , onde a luz quando passa de um meio com maior  $n$ , para um meio de menor  $n$ , será refratada a  $90^\circ$  com a normal, ou seja, estará paralela a superfície (veja figura 4.16). Se a luz incide na interface num ângulo maior que  $\theta_c$ , ela não passará para o outro meio, sendo totalmente refletida de volta para o mesmo meio. Este processo é conhecido como **reflexão interna total**.

O ângulo crítico pode ser encontrado através da lei de Snell, onde o raio refratado fará um ângulo de  $90^\circ$  com a normal. Podemos deduzir então uma relação para  $\theta_c$ . Usando a Lei de Snell  $n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2$  onde  $\theta_1 = \theta_c$  e  $\theta_2 = 90^\circ$ , temos para  $n_2 < n_1$

$$\text{sen}\theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (4.21)$$

**Exemplo 4.3:** Fibras ópticas são baseadas inteiramente no princípio de reflexão interna total. Uma fibra é um fio flexível de vidro e um cabo de fibras ópticas é geralmente feito de muitos destes fios, onde cada um carrega um sinal gerado por pulsos de laser. A luz viaja ao longo da fibra e se incidir com um ângulo maior que o ângulo crítico, sempre haverá reflexão interna total nas paredes da fibra. Neste caso a luz viajará por distâncias grandes, sem perda, pois não deve haver refração. Vamos determinar para a fibra da figura 4.17 qual o ângulo máximo que a luz deve incidir na fibra, para que se tenha reflexão interna total.

**Solução:** Considere que a fibra tenha índice de refração 1,36 e que o meio externo é o ar ( $n_{\text{ar}} = 1,00$ ).

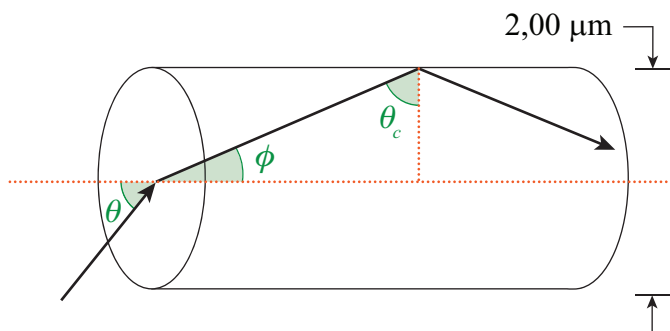


Figura 4.17 – Exemplo 4.3.

$$\text{sen}\theta_c = n_{\text{ar}}/n_{\text{fibra}} = 1,00/1,36 = 0,735$$

$$\theta_c = 47,3^\circ$$

usando geometria vemos que o ângulo de refração  $\phi$  pode ser escrito como:

Pierre de Fermat (1601-1655) foi um jurista e magistrado francês, mais conhecido por seus trabalhos em teoria dos números, principalmente pelo chamado “Último Teorema de Fermat”, cuja demonstração desafiou matemáticos do mundo todo durante 358 anos. Também deu importantes contribuições no cálculo geométrico e infinitesimal, e na teoria das probabilidades. Fontes: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Fermat.html> e [http://pt.wikipedia.org/wiki/Pierre\\_de\\_Fermat](http://pt.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat)

$$\phi = 90^\circ - \theta_c = 90^\circ - 47,3^\circ = 42,7^\circ$$

usando a lei de Snell temos que

$$n_{\text{ar}} \sin \theta = n_{\text{fibra}} \sin \phi$$

$$\sin \theta = (n_{\text{fibra}} / n_{\text{ar}}) \sin \phi$$

portanto  $\theta = 67,2^\circ$ .

Este é o ângulo máximo com que a luz pode incidir na fibra e manter reflexão interna total!

## 4.4 Princípio de Fermat

**Fermat** mostrou que a natureza é econômica! Mostrou que a luz vai percorrer um caminho ao longo do qual levará o menor tempo! Melhor dizendo:

O caminho que um raio de luz percorre para ir de um ponto a outro é tal que o tempo para fazer este percurso é um valor estacionário, isto é: um mínimo, um máximo ou constante!

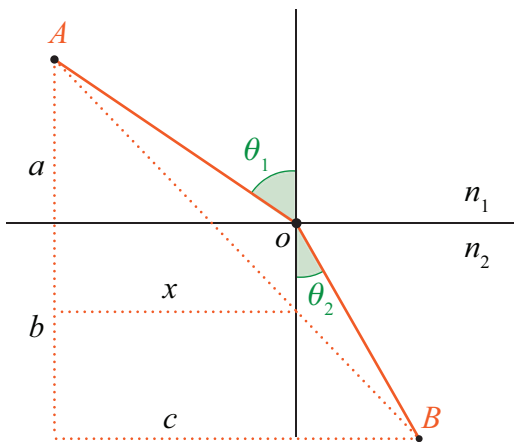


Figura 4.18 – Refração da luz.

Usando este princípio podemos derivar geometricamente as leis de reflexão e refração. Como um exemplo, vamos derivar a lei de Snell, para a refração. Considere a figura 4.18, onde vamos calcular o tempo  $t$  para que a luz saia do ponto  $A$  para o ponto  $B$ , passando por um ponto  $O$  na interface entre os dois meios. A velocidade da luz no meio com índice de refração  $n_1$  é  $v_1$ , e no meio  $n_2$  é  $v_2$ .

O tempo total para ir de  $A$  até  $B$  será dado por:

$$t = \frac{AO}{v_1} + \frac{OB}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2} \quad (4.22)$$

Considerando que outras escolhas de caminho que desloquem o ponto  $O$  para outra posição irá mudar completamente a distância  $AO$  e

$BO$ , e portanto a distância  $x$ , podemos minimizar o tempo simplesmente fazendo

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

Derivando a expressão (4.22) temos, então:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0 \quad (4.23)$$

Observando a figura 4.18 vemos que:

$$\text{sen}\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad e \quad \text{sen}\theta_2 = \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} \quad (4.24)$$

Substituindo (4.24) em (4.23) e considerando que  $n = \frac{c}{v}$ , temos:

$$\frac{\text{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen}\theta_2}{v_2} \Rightarrow \frac{\text{sen}\theta_1}{c/n_1} = \frac{\text{sen}\theta_2}{c/n_2} \Rightarrow n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2 \quad (4.25)$$

## 4.5 Espelhos Planos

Quais são as regras pelas quais os espelhos operam quando a luz os atinge? Utilizam simplesmente as regras já estabelecidas na Lei da Reflexão vista anteriormente!

Um espelho plano nada mais é do que um espelho com uma superfície plana. Quando você olha a imagem de um objeto em um espelho plano, você tem a impressão que esta imagem se forma atrás do espelho. É uma imagem formada pelo prolongamento dos raios refletidos e dizemos que esta imagem é virtual.

**Imagens reais** são formadas quando os raios de luz vindos diretamente de um objeto, se cruzam. Se colocarmos uma tela neste ponto, uma imagem será formada sobre ela. Já no caso de **imagens virtuais** os raios de luz parecem vir de um ponto, mas é apenas a extensão dos raios refletidos, ou seja, não existe uma convergência de raios reais e se colocarmos uma tela neste ponto não haverá a formação de imagem na tela.

Considere um objeto colocado a certa distância em frente a um espelho plano, como mostra a figura 4.19. Para determinar a posição da imagem deste objeto fazemos um **diagrama de raios**, uma representação pic-

tórica, muito comum no estudo de lentes e espelhos. Este diagrama consiste em desenhar alguns raios partindo do objeto, incidindo no espelho e através da aplicação da lei da reflexão, desenhamos os raios refletidos. A posição da imagem será aquela, onde os raios refletidos (ou sua prolongação) se encontram. Note que no espelho plano, os raios refletidos parecem divergir do espelho, e portanto devem ser prolongados, para dentro do espelho, para que possamos encontrar exatamente o ponto de onde eles parecem divergir, e aí encontraremos a imagem.

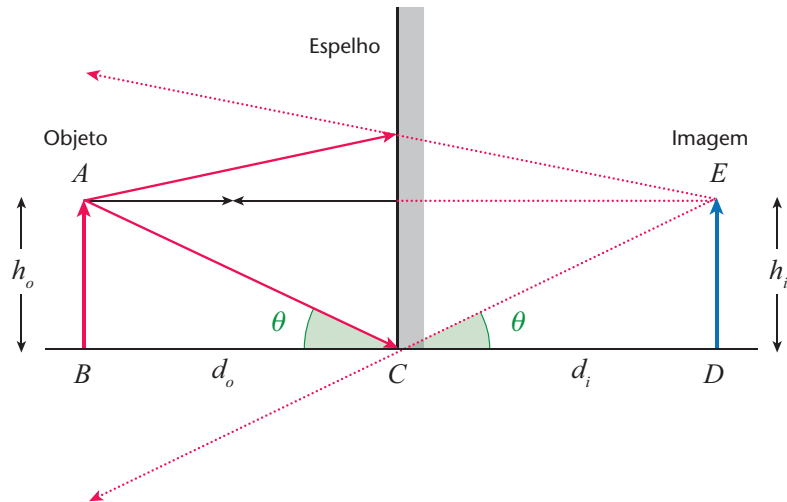


Figura 4.19 – Formação de imagem num espelho plano.

Um diagrama de raios cuidadosamente traçado nos permite utilizar a geometria e a trigonometria para resolver matematicamente o problema. Analisando então a figura 4.19 é fácil verificar que:

- A imagem produzida é direita (seta imagem está apontada na mesma direção da seta objeto);
- A imagem é de mesmo tamanho do objeto (veja por semelhança de triângulos  $ABC$  e  $EDC$ );
- A imagem está a mesma distância do espelho que o objeto está, ou seja  $d_o = d_i$ , que também pode ser verificada pela semelhança entre os triângulos  $ABC$  e  $EDC$ ;
- A imagem é virtual, pois é resultado do prolongamento dos raios refletidos, até o ponto onde eles parecem divergir.

Finalmente, observe que para um espelho plano ocorre uma aparente inversão esquerda– direita. Essa aparente inversão pode ser observada quando você coloca, por exemplo, sua mão direita no espelho, a

imagem será da sua mão esquerda! Mas esta aparente inversão esquerda– direita é na verdade uma inversão frente – para – trás causada pelos raios indo para o espelho e voltando do espelho na reflexão. Basta você ficar de frente para o espelho e apontar na direção do espelho, terá a imagem apontando na sua direção, ou seja, você aponta para frente e a imagem para trás, isto é, para você.

## 4.6 Espelhos esféricos

Espelhos esféricos têm a forma de um segmento de esfera, como o próprio nome diz. O que acontece com a luz quando é refletida por uma superfície curva? Vamos aplicar de novo a lei da reflexão e fazer uma aproximação conveniente chamada de **aproximação paraxial**. Vamos considerar raios que se propagam perto do eixo óptico, ou eixo principal do espelho, definido na figura 4.20. Esta aproximação simplifica grandemente as equações que vamos derivar para estes espelhos.

A imagem formada estará localizada onde os raios refletidos convergem, ou onde os raios refletidos parecem divergir. Os espelhos esféricos possuem um centro de curvatura  $C$ , o qual corresponde ao centro da esfera do qual o espelho foi feito, um raio de curvatura  $R$ , que corresponde ao raio da esfera e um ponto focal  $F$ , definido como o ponto para o qual os raios paralelos são focados, ou seja, convergem. Na figura 4.20 podemos observar dois tipos de espelhos esféricos, o côncavo (ou convergente) e convexo (ou divergente), dependendo de qual lado da superfície esférica é espelhada. Se o espelhamento for feito dentro da superfície esférica, temos um espelho côncavo, se for feito na parte de fora da superfície esférica, temos um espelho convexo. Note que sempre estamos aplicando a lei da reflexão!

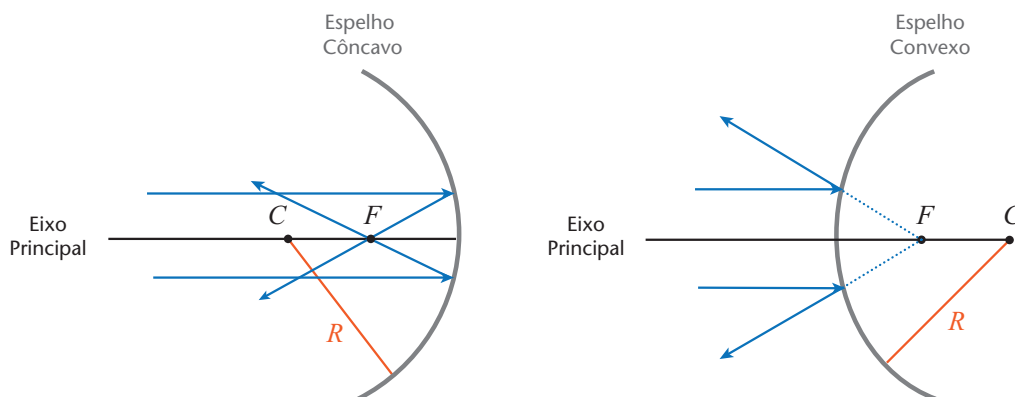


Figura 4.20 – Espelhos côncavos e convexas.

Espelhos côncavos podem formar imagens reais ou virtuais, dependendo da posição do objeto em relação ao ponto focal. Espelhos convexos podem formar apenas imagens virtuais.

Preste atenção: Na figura 4.20 onde você acha que está o objeto? Os raios vindos de um objeto chegam paralelos ao espelho quando este objeto está a uma distância muito grande do espelho, ou seja, a distância do objeto ao espelho é muito maior que o raio do espelho e, portanto pode-se dizer que o objeto se encontra no infinito. Note ainda que os raios paralelos quando refletidos, convergem para um ponto (no espelho côncavo), que chamamos de ponto focal. Para o espelho convexo, o prolongamento dos raios refletidos nos dá também o ponto focal para aquele espelho.

### Diagrama de raios

Agora vamos usar o diagrama de raios para determinar a posição da imagem para um objeto a uma distância finita do espelho. Podemos desenhar diversos raios vindos do objeto e ver qual a posição que estes raios, após a reflexão, se interceptam achamos assim a posição da imagem. Para ficar mais fácil vamos desenhar apenas três raios bem particulares. Como você já imaginou, dois raios apenas são suficientes para determinar a posição da imagem, mas vamos utilizar um terceiro apenas para confirmar o resultado.

- 1) Raio paralelo:** é desenhado a partir do topo do objeto paralelo ao eixo principal – reflete no espelho passando pelo ponto focal ( $F$ ) ou pode ser estendido para trás do espelho e passar pelo ponto focal (lembre do que foi dito sobre raios paralelos acima).
- 2) Raio central:** é desenhado a partir do topo do objeto e passa pelo centro de curvatura ( $C$ ) do espelho – reflete no espelho e volta pelo mesmo caminho, pois bate no espelho na direção do raio, portanto pela própria normal à superfície.
- 3) Raio focal:** é desenhado a partir do topo do objeto e passa pelo ponto focal, sendo refletido paralelamente ao eixo principal.

O ponto onde estes três raios se encontram determina o topo da imagem! Um diagrama de raios para um espelho côncavo é mostrado na figura 4.21

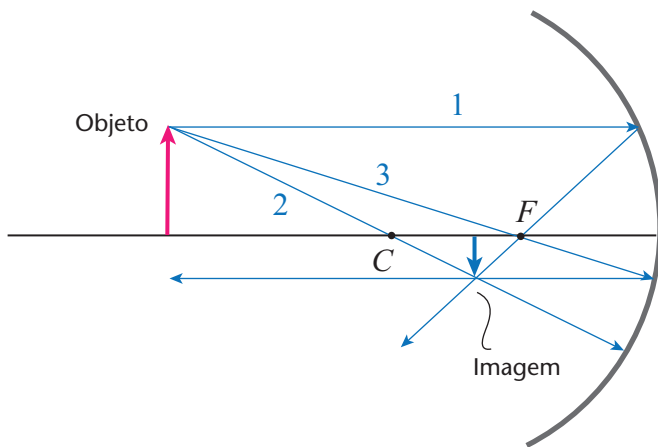


Figura 4.21 – Diagrama de raios para um espelho côncavo.

Como podemos ver, para um objeto situado além do centro de curvatura do espelho, a imagem se situa entre o ponto focal ( $F$ ) e o centro de curvatura ( $C$ ), é invertida, menor, se comparada ao objeto, e é uma imagem real, pois os raios efetivamente passam através do ponto onde a imagem é formada. Para um espelho côncavo qualquer objeto localizado além de  $C$  terá sempre uma imagem real, invertida e entre  $F$  e  $C$ . O que ocorreria se o objeto estivesse entre  $F$  e  $C$ ? Onde a imagem seria formada? É só você reverter todas as direções dos raios no diagrama (reversibilidade dos raios). E terá exatamente o mesmo diagrama, apenas trocando o objeto pela imagem. Esta imagem continuará invertida e maior.

Para um espelho convexo, a imagem se forma como é mostrado na figura 4.22.

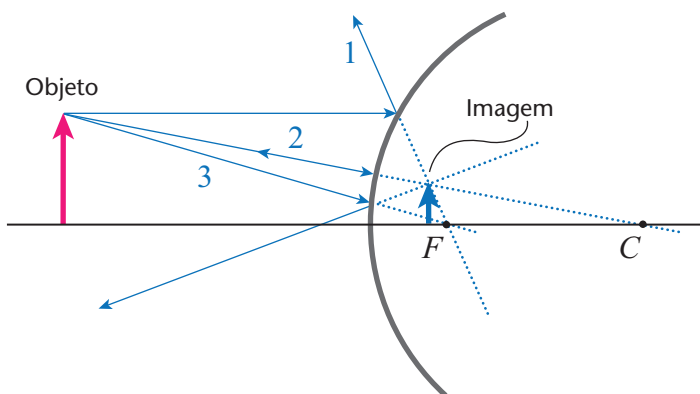


Figura 4.22 – Diagrama de raios para um espelho convexo.

Como o diagrama de raios mostra a imagem formada por um espelho convexo é virtual (formada “dentro do espelho”), direita e menor, se comparada com o objeto.

## Equação dos espelhos

Desenhar um diagrama de raios é uma maneira rápida de se ter uma idéia de como será a imagem de um objeto e onde ela estará localizada. Mas nós podemos calcular tudo isto com bastante precisão, usando uma equação derivada a partir de geometria e semelhança de triângulos, conhecida como **equação dos espelhos**.

Na figura 4.23, os raios de luz vêm de um objeto localizado em  $O$  e são refletidos num espelho côncavo com raio  $R$  e centro de curvatura  $C$ . A imagem se forma no ponto  $I$ . A distância do objeto ao espelho é  $x_o$ , e da imagem até o espelho é  $x_i$ .  $V$  é o vértice do espelho e  $A$  o ponto no espelho onde os raios são refletidos.  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são os ângulos dos raios com o eixo principal do espelho,  $\theta$  é o ângulo de incidência e, portanto de reflexão, e  $y$  é o semi-arco  $AV$ :

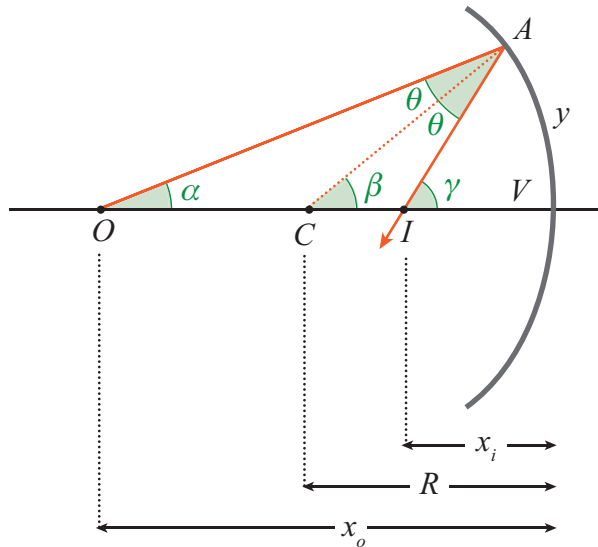


Figura 4.23 – Geometria para estabelecer a equação dos espelhos.

O ângulo  $\beta$  é exterior ao triângulo  $OAC$  e, portanto

$$\beta = \alpha + \theta \quad (4.26)$$

Igualmente para o triângulo  $OAI$  temos:

$$\gamma = \alpha + \theta \quad (4.27)$$

Eliminando  $\theta$  destas duas equações, obtemos:

$$2\beta = \gamma + \alpha \quad (4.28)$$

Considerando raios paraxiais podemos usar a aproximação para pequenos ângulos, e podemos escrever que:



$$\alpha \approx y/x_o$$

$$\beta \approx y/R$$

$$\gamma \approx y/x_i$$

Substituindo estes ângulos na equação (4.28) obtemos a **equação dos espelhos**:

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{x_o} + \frac{1}{x_i} \quad (4.29)$$

Vimos anteriormente que quando um objeto se encontra no infinito, a sua imagem se forma no ponto focal  $F$  (distância  $f$  ao espelho). E, portanto

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{R}{2}$$

onde  $f$  é definido como a **distância focal do espelho**.

Podemos reescrever a equação dos espelhos na seguinte forma:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_o} + \frac{1}{x_i} \quad (4.30)$$

O tamanho da imagem em relação ao tamanho do objeto é dado pela razão entre a altura do objeto ( $h_o$ ) e a altura da imagem ( $h_i$ ). Esta razão é chamada de **ampliação lateral**, representada pela letra  $m$ . Vamos usar o diagrama de raios mostrado na figura 4.24 para deduzir a expressão para  $m$ .

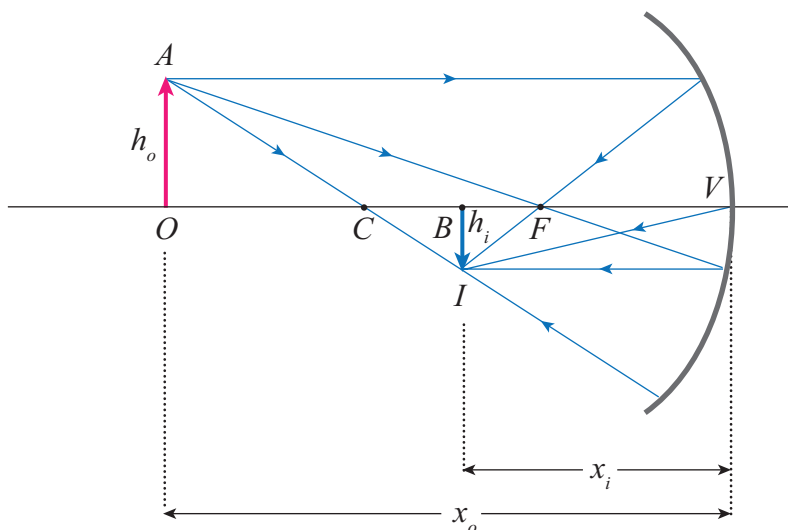


Figura 4.24 – Geometria para determinar ampliação lateral.

Por semelhança dos triângulos  $AOV$  e  $IBV$ , podemos escrever que

$$\frac{h_o}{x_o} = -\frac{h_i}{x_i}$$

$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{x_i}{x_o} \quad (4.31)$$

O sinal + ou sinal -, na fórmula da ampliação lateral, indica se a imagem é direita (+) ou invertida (-) comparada ao objeto. Quando  $m = 1$ , a imagem é do mesmo tamanho do objeto, para  $m < 1$ , menor que o objeto e para  $m > 1$ , maior que o objeto.

### Convenção de sinais

O que uma altura ou distância positiva ou negativa significa? Para entender a convenção de sinais, coloque o sinal positivo do lado do espelho onde o objeto se encontra. Qualquer distância medida deste lado será positiva e as medidas do outro lado serão negativas. Na tabela 4.2 você tem um resumo da convenção de sinais para espelhos.

Tabela 4.2 – Convenção de sinais para espelhos.

Medida	Sinal	Observação
$x_o$	+	Objeto em frente ao espelho (objeto real)
	-	Objeto atrás do espelho (objeto virtual)
$x_i$	+	Imagem em frente ao espelho (imagem real)
	-	Imagem atrás do espelho (imagem virtual)
$R, f$	+	Centro de curvatura em frente ao espelho (espelho côncavo)
	-	Centro de curvatura atrás do espelho (espelho convexo)
$m$	+	Imagem direita
	-	Imagem invertida

Para resolver qualquer problema sobre espelhos, que geralmente implica em determinar a posição da imagem e o tipo de imagem, se é real ou virtual, direita ou invertida, maior, menor ou igual ao tamanho do objeto, siga os três passos descritos abaixo:

- 1) Desenhe um diagrama de raios o mais cuidadoso possível, para ter uma boa idéia de onde a imagem estará.
- 2) Aplique a equação dos espelhos, cuidando com a convenção de sinais.

- 3) Tenha certeza que os dois passos anteriores são consistentes entre si.

**Exemplo 4.4:** Um objeto de 8,0 cm de altura é colocado a 23,0 cm na frente de um espelho côncavo que possui uma distância focal de 10,0 cm.

- a) Onde está localizada a imagem?  
b) Qual a altura da imagem?  
c) Quais são as características da imagem?

**Solução:** O primeiro passo é desenhar o diagrama de raios que vai lhe mostrar que a imagem é real, invertida e menor que o objeto, e que está localizada entre o ponto focal e o centro de curvatura do espelho.

Como segundo passo, vamos aplicar a equação dos espelhos e determinar quantitativamente os valores estimados no diagrama de raios.

- a) Localização da imagem:  $x_o = + 23,0$  cm (objeto na frente do espelho)

$$f = + 10,0 \text{ cm (espelho côncavo)}$$

portanto

$$\frac{1}{x_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x_o} = \frac{1}{+10,0} - \frac{1}{+23,0} = + \frac{13}{230} \Rightarrow x_i = +17,7 \text{ cm}$$

o que concorda com o diagrama de raios.

- b) Para determinar a altura da imagem, vamos calcular a ampliação lateral

$$m = -\frac{x_i}{x_o} = -\frac{(+17,7)}{(+23,0)} = -0,77 \Rightarrow$$

o sinal negativo indica que a imagem está invertida

$$\frac{h_i}{h_o} = 0,77 \Rightarrow h_i = 0,77 \times 8,0 \text{ cm} = 6,2 \text{ cm} \Rightarrow$$

podemos desconsiderar o sinal para o cálculo da altura

- c) A imagem será real, localizada a 17,7 cm em frente ao espelho, invertida e com altura de 6,2 cm, o que concorda com as estimativas feitas no diagrama de raios.

**Exemplo 4.5:** Considere o mesmo objeto do exemplo anterior, porém agora situada a 6,0 cm de um espelho convexo com uma distância focal de 12,0 cm. Onde estará a imagem neste caso e quais as suas características?

**Solução:** Fazendo o diagrama de raios vamos ver que a imagem está localizada atrás do espelho, portanto é virtual. É direita e parece um pouco menor que o objeto e está localizada entre o espelho e o ponto focal.

Vamos então confirmar estas observações usando a equação dos espelhos, considerando agora

$$x_o = + 6,0 \text{ cm} \Rightarrow \text{objeto na frente do espelho}$$

$$f = - 12,0 \text{ cm} \Rightarrow \text{espelho convexo}$$

$$\frac{1}{x_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x_o} = \frac{1}{-12,0} - \frac{1}{+6,0} = -\frac{18}{72} \Rightarrow x_i = -4,0 \text{ cm}$$

$$m = -\frac{x_i}{x_o} = -\frac{(-4,0)}{(+6,0)} = +0,667 \Rightarrow \text{o sinal positivo indica que a imagem é direita}$$

$$\frac{h_i}{h_o} = 0,667 \Rightarrow h_i = 0,667 \times 8,0 \text{ cm} = 5,3 \text{ cm}$$

Estes resultados também são consistentes com o diagrama de raios e concluímos que a imagem é virtual, localizada a 5,3 cm atrás do espelho, é direita e menor que o objeto.

## 4.7 Superfícies refratoras

Como se formam as imagens pela refração de raios na superfície de um material transparente, por exemplo, dentro da água, num aquário redondo, numa bola de cristal maciça? Estas superfícies podem ser planas ou esféricas.

Na figura 4.25 temos uma superfície esférica com raio  $R$ , que separa dois meios transparentes, com índices de refração  $n_1$  e  $n_2$ .

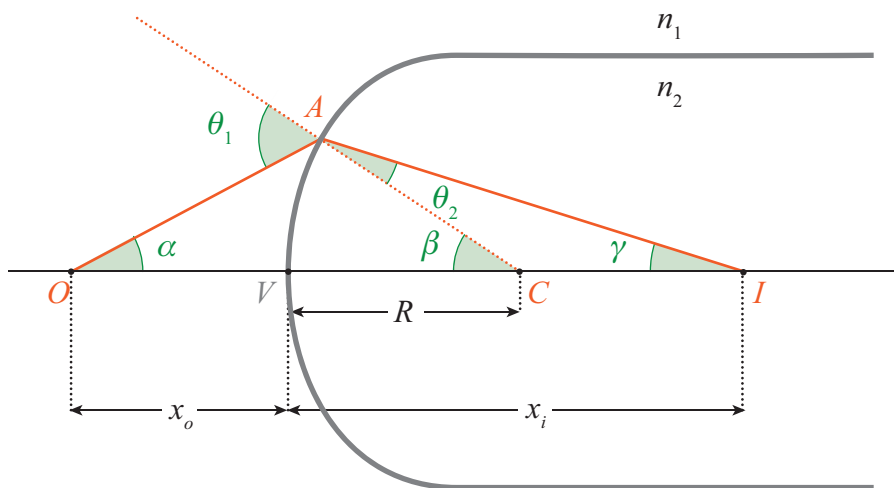


Figura 4.25 – Formação de imagens em superfícies refratoras.

Vamos derivar uma equação que relacione a distância da imagem ( $x_i$ ) com a distância do objeto ( $x_o$ ), com o raio de curvatura da superfície ( $R$ ) e com os índices de refração dos dois meios. Para isto vamos usar a lei da refração (lei de Snell) e vamos continuar na nossa aproximação de considerar apenas **raios paraxiais**. Assumindo que para ângulos pequenos  $\text{sen}\theta \cong \theta$ , podemos escrever nesse caso a lei de Snell como:

$$n_1\theta_1 = n_2\theta_2 \quad (4.32)$$

Usando o modelo geométrico de triângulos e lembrando que um ângulo externo a qualquer triângulo é a soma dos ângulos internos não adjacentes e aplicando isto aos triângulos  $OAC$  e  $ACI$ , temos:

$$\theta_1 = \alpha + \beta \quad (4.33)$$

$$\beta = \theta_2 + \gamma \quad (4.34)$$

Combinando as equações (4.32), (4.33) e (4.34) e eliminando  $\theta_1$  e  $\theta_2$  encontramos:

$$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta \quad (4.35)$$

Para pequenos arcos podemos escrever ainda que:

$$\alpha \approx AV / x_o$$

$$\beta \approx AV / R$$

$$\gamma \approx AV / x_i$$

Agora substituindo estes ângulos na equação (4.35) temos:

$$\frac{n_1}{x_o} + \frac{n_2}{x_i} = \frac{(n_2 - n_1)}{R} \quad (4.36)$$

**Raios paraxiais:** São raios luminosos que apresentam pouca inclinação em relação ao eixo óptico.

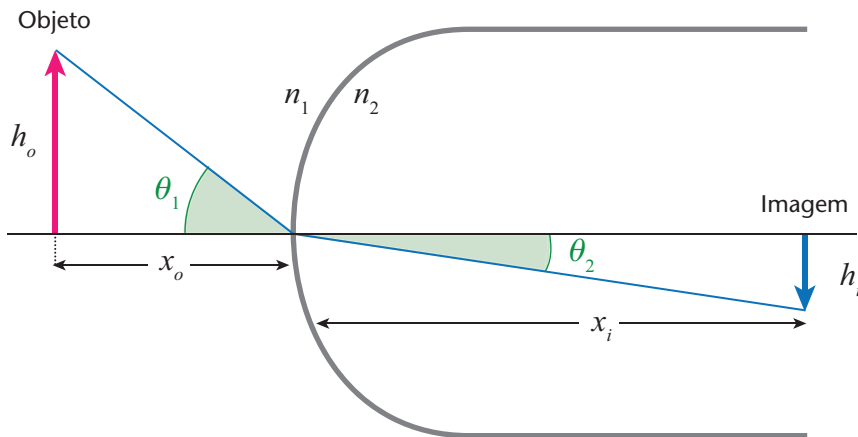


Figura 4.26 – Ampliação lateral para superfícies refratoras.

Usando a figura 4.26 podemos deduzir a equação para a ampliação lateral, do mesmo modo que fizemos para espelhos, utilizando a lei de Snell e a aproximação para ângulos pequenos, onde  $\text{tg}\theta \approx \text{sen}\theta \approx \theta$ .

$$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2$$

$$\text{tg}\theta_1 = \frac{h_o}{x_o} ; \text{tg}\theta_2 = -\frac{h_i}{x_i}$$

$$n_1 \frac{h_o}{x_o} = -n_2 \frac{h_i}{x_i} \Rightarrow \frac{h_i}{h_o} = -\frac{n_1 x_i}{n_2 x_o}$$

$$m = -\frac{n_1 x_i}{n_2 x_o} \quad (4.37)$$

A convenção de sinais para a refração é diferente da que vimos para espelhos. Na refração as imagens reais são formadas dentro da superfície, o que nos chamamos de lado de transmissão (*LT*), enquanto que as imagens virtuais aparecem no lado onde está objeto, que seria o lado de incidência (*LI*). É importante prestar atenção que para deduzir a equação para a superfície refratora usamos esta convenção, assim, o lado 1 é o lado de incidência, ou seja, onde está o objeto, e o lado 2 é o lado da transmissão. A tabela 4.3 abaixo mostra a convenção de sinais para estas superfícies.

Tabela 4.3: Convenção de sinais para superfícies refratoras.

Medida	Sinal	Observação
$x_o$	+	Objeto real – na frente da superfície ( <i>LI</i> )
	-	Objeto virtual – dentro da superfície ( <i>LT</i> )
$x_i$	+	Imagem real – dentro da superfície ( <i>LT</i> )
	-	Imagem virtual – na frente da superfície ( <i>LI</i> )
$R, f$	+	Centro de curvatura no <i>LT</i>
	-	Centro de curvatura no <i>LI</i>
$m$	+	Imagem direita
	-	Imagem invertida

Vamos agora analisar uma **superfície refratora plana**. Neste caso o raio de curvatura  $R$  tenderia a  $\infty$ . Fazendo esta substituição na equação (4.36) obtemos:

$$\frac{n_1}{x_o} + \frac{n_2}{x_i} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{(n_2 - n_1)}{R} \right] = 0 \Rightarrow \frac{n_1}{x_o} = -\frac{n_2}{x_i} \Rightarrow x_i = -\frac{n_2}{n_1} x_o \quad (4.38)$$

Substituindo agora na equação (4.37) para a ampliação lateral temos:

$$m = -\frac{n_1 x_i}{n_2 x_o} = -\left( -\frac{n_2 x_o}{n_2 x_o} \right) = +1$$

Portanto não há aumento de tamanho.

**Exemplo 4.6:** Imagine um lago, onde você está pescando e as águas são tão limpas que você consegue enxergar o peixe. Será que o peixe está realmente na posição que você enxerga? Olhe a figura 4.27, e veja que pelas propriedades das superfícies refratoras que acabamos de ver, o peixe estará de fato numa profundidade aparente. Se você estiver usando, por exemplo, um arpão e mirar na cabeça do peixe, como na figura, certamente não vai conseguir pegá-lo! Vamos usar a equação (4.38) para calcular a profundidade aparente, supondo que o peixe está a 50 cm abaixo da superfície e o índice de refração da água é igual a 1,33.

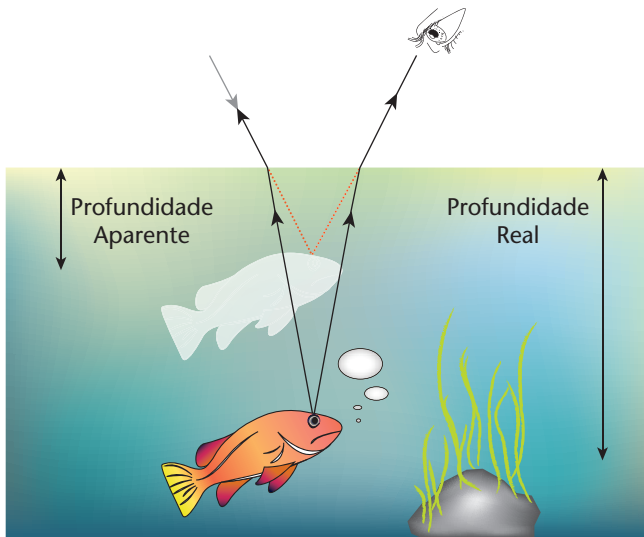


Figura 4.27 – Exemplo 4.6

**Solução:** O lado incidente é a água, pois lá é que está o nosso objeto, portanto  $n_1 = 1,33$ . O lado de transmissão é o ar, portanto  $n_2 = 1$ . Usando agora a equação (4.38) temos:

$$x_i = -\frac{1}{1,33} 50 \text{ cm} = -37,6 \text{ cm}$$

O sinal - indica que a imagem é virtual e está no mesmo lado do objeto, ou seja, dentro da água.

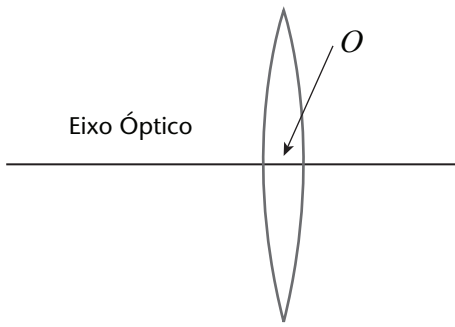


Figura 4.28 – Lente com seu eixo óptico.

## 4.8 Lentes delgadas

Uma lente delgada é um modelo ideal onde consideramos a espessura da lente muito menor comparada às distâncias envolvidas (raio de curvatura, distância do objeto e imagem, etc) e por isto, pode-se desprezar o efeito da espessura da lente. Ela consiste de um material transparente, em geral vidro ou plástico, onde as duas superfícies são polidas e moldadas de tal modo que formem superfícies esféricas, cilíndricas ou planas. Lentes são usadas em instrumentos ópticos em geral, como câmaras fotográficas, microscópios e telescópios, para formar imagens por refração. Na figura 4.28 temos o desenho de uma lente, com seu eixo óptico, onde o ponto  $O$  no eixo, está situado exatamente no meio entre as duas superfícies e é chamado de centro óptico.

Existem dois tipos básicos de lentes: **convergentes** e **divergentes**. Na figura 4.29 mostramos diferentes formatos, com seus nomes respectivos, para lentes convergentes e divergentes.

### convergente



biconvexa



plano-convexa



menisco-positivo

### divergente



bicôncava



plano-côncava



menisco-negativo

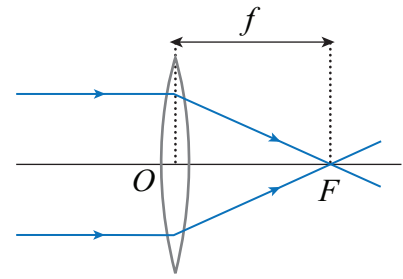
Figura 4.29 – Diferentes formatos de lentes convergentes e divergentes.

Para definir a distância focal destas lentes, vamos de novo, imaginar um objeto no infinito, de tal modo que a luz vinda deste objeto chega com seus raios paralelos ao eixo óptico da lente. Uma lente convergente irá reunir todos os raios paralelos ao seu eixo óptico, em apenas um ponto, formando a imagem do outro lado da lente, que chamamos **ponto focal  $F$**  ou apenas **foco**, da lente, como é mostrado na figura 4.30 (a). Na lente divergente (figura 4.30 (b)) os raios que chegam para-

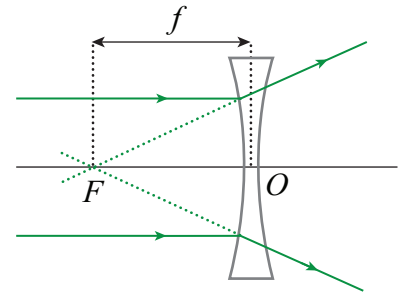


lelos ao seu eixo óptico são espalhados, de tal modo que parecem divergir de um **ponto focal  $F$  virtual**, na frente da lente. Definimos a frente da lente como o lado que a luz incide, ou seja, o lado onde se encontra um objeto real.

A **distância focal** de uma lente, denominado  $f$ , é definido como a distância entre o centro óptico e o seu ponto focal  $F$ , como é mostrado na figura 4.30. Como usamos a aproximação da lente delgada, na verdade a distância focal pode ser medida até a superfície da lente, em vez do seu centro óptico, pois não haverá praticamente diferença. Na figura 4.31 mostramos que as lentes delgadas têm **uma distância focal**, porém **dois pontos focais**, pois podemos ter os raios incidindo na lente vindos da direita ou da esquerda. Chamamos de  $F_2$  o ponto focal para o qual os raios convergem (lente convergente) ou parecem divergir (lente divergente).



**A** lente convergente



**B** lente divergente

Figura 4.30 – Distância focal para uma lente convergente (a) e uma lente divergente.

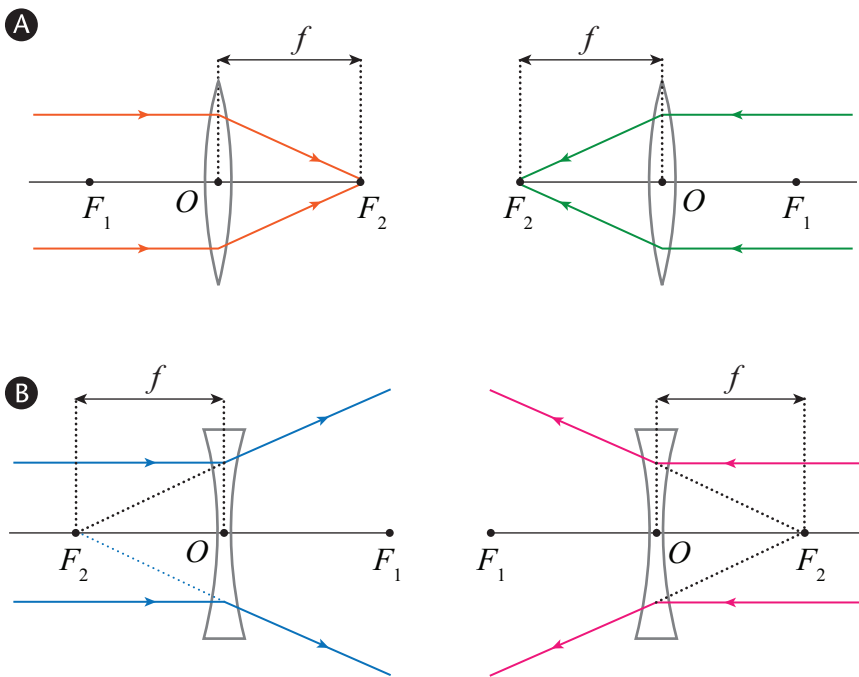


Figura 4.31 – Duas distâncias focais para lentes convergentes (a) e divergentes (b).

A convenção de sinais para lentes nos dá que a distância focal para lentes convergentes é positiva, e por isto chamamos estas lentes de positivas, enquanto que para lentes divergentes esta distância é negativa (do mesmo lado do objeto) e as chamamos então de lentes negativas.

Vamos deduzir agora a equação para as lentes, usando a aproximação dos raios paraxiais, como temos feito até agora. Vamos combinar duas superfícies refratoras esféricas, com raios de curvatura  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente, e aproximá-las, de tal modo que se obtenha uma lente convergente, como mostrado na figura 4.32.

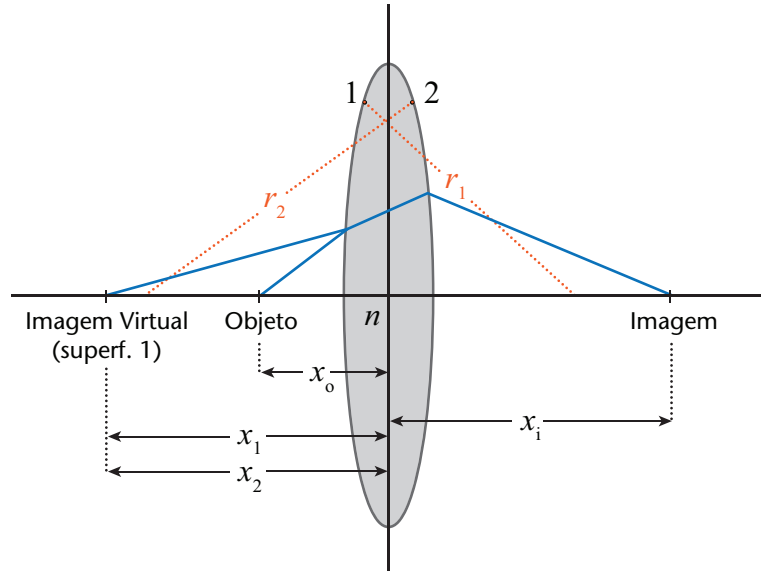


Figura 4.32 – Geometria para deduzir a equação para lentes.

Usando a equação (4.36) para superfícies refratoras  $\frac{n_1}{x_o} + \frac{n_2}{x_i} = \frac{(n_2 - n_1)}{R}$

e considerando apenas a superfície 1, onde  $n_1 = 1$  e  $n_2 = n$ , podemos escrever:

$$\frac{1}{x_o} + \frac{n}{x_1} = \frac{(n-1)}{r_1}$$

Note que a imagem não será formada, porque a luz é de novo refratada na superfície 2, e portanto passa para o outro lado da lente. Mas considerando apenas a superfície 1, olhando a figura 4.32, vemos que a imagem formada por esta superfície é virtual e os raios que atingem a superfície 2 parecem vir desta imagem virtual e portanto podemos considerar que a imagem virtual devido a superfície 1 será o objeto para a superfície 2. Agora considerando a superfície 2 e usando a aproximação de lentes delgadas, onde a espessura da lente é insignificante, podemos escrever que  $x_2 = -x_1$ . De acordo com nossa convenção de sinais, temos agora um objeto virtual para a superfície 2. Temos agora  $n_1 = n$  e  $n_2 = 1$ , e aplicando na equação (4.36) obtemos:

$$\frac{n}{-x_1} + \frac{1}{x_i} = \frac{(1-n)}{r_2}$$

Combinando agora estas duas equações temos:

$$\frac{1}{x_o} + \frac{1}{x_i} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (4.39)$$

Colocando agora o objeto no infinito, sabemos que a imagem se forma na distância focal  $f$ , e colocando na equação estas condições:  $x_o = \infty$  e  $x_i = f$ , obtemos a equação conhecida como **equação dos fabricantes de lentes**

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (4.40)$$

Substituindo a equação (4.40) na (4.39) obtemos a **equação das lentes delgadas**:

$$\frac{1}{x_o} + \frac{1}{x_i} = \frac{1}{f} \quad (4.41)$$

Note que é a mesma equação obtida para espelhos, mas preste atenção, pois a convenção de sinais é diferente para lentes. Abaixo está a tabela 4.4 mostrando esta convenção, que é a mesma usada para superfícies refratoras.

Tabela 4.4 – Convenção de sinais para lentes.

Medida	Sinal	Observação
$x_o$	+	Objeto real – está na frente da lente
	-	Objeto virtual – está atrás da lente
$x_i$	+	Imagem real – está atrás da lente
	-	Imagem virtual – está na frente da lente
$r_1, r_2, f$	+	Centro de curvatura – está atrás da lente
	-	Centro de curvatura – está na frente da lente

A ampliação lateral  $m$  para lentes pode ser deduzida a partir da figura 4.33.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta &= \frac{h_o}{x_o} = -\frac{h_i}{x_i} \Rightarrow \frac{h_i}{h_o} = -\frac{x_i}{x_o} \\ &\Rightarrow m = -\frac{x_i}{x_o} \end{aligned} \quad (4.42)$$

É a mesma expressão determinada anteriormente para espelhos. De novo aqui o sinal negativo significa que a imagem está invertida e o positivo, que a imagem é direita.

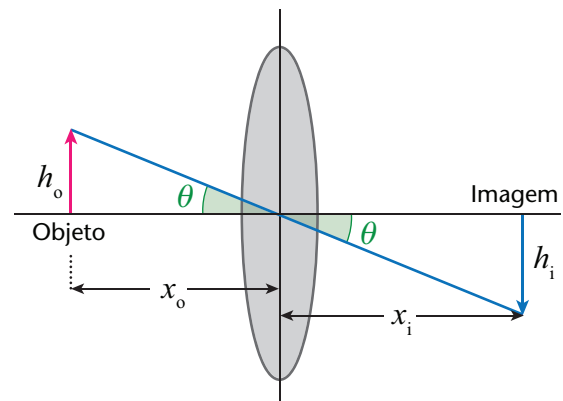


Figura 4.33 – Geometria para deduzir ampliação lateral para lentes.

## Diagrama de raios

Assim como fizemos para espelhos, é conveniente localizar a imagem utilizando um diagrama de raios. Para lentes convergentes vamos utilizar os seguintes raios (figura 4.34) para formar a imagem:

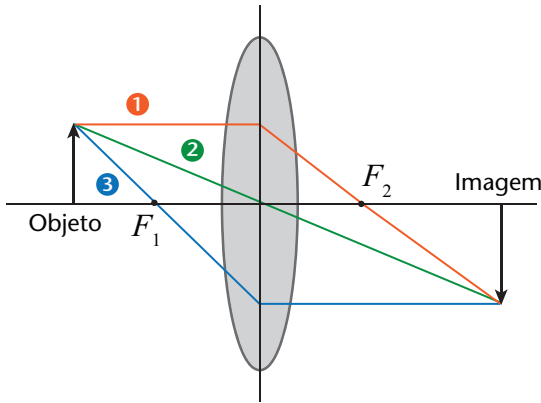


Figura 4.34 – Diagrama de raios para lente convergente.

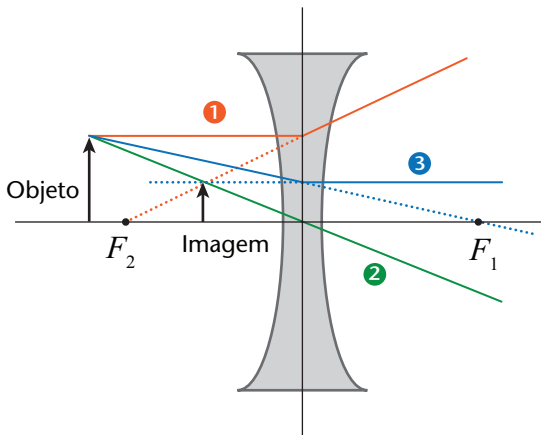


Figura 4.35 – Diagrama de raios para lente divergente.

- 1) Raio paralelo: é desenhado a partir do topo do objeto paralelo ao eixo óptico sendo desviado na lente, passando pelo segundo ponto focal ( $F_2$ ).
- 2) Raio central: é desenhado a partir do topo do objeto e passa pelo centro óptico da lente, não sendo desviado.
- 3) Raio focal: é desenhado a partir do topo do objeto e passa pelo primeiro ponto focal ( $F_1$ ), emergindo da lente paralelamente ao eixo óptico.

Para lentes divergentes temos os seguintes raios, representados na figura 4.35.

- 1) Raio paralelo: é desenhado a partir do topo do objeto paralelo ao eixo óptico e diverge da lente como se viesse do segundo ponto focal ( $F_2$ ).
- 2) Raio central: é desenhado a partir do topo do objeto e passa pelo centro óptico da lente, não sendo desviado.
- 3) Raio focal: é desenhado a partir do topo do objeto em direção ao primeiro ponto focal ( $F_1$ ), emergindo da lente paralelamente ao eixo óptico.

Note que como todos os raios divergem, a imagem é formada pela extensão destes raios refratados, para a parte da frente da lente. Deste modo temos realmente um ponto de intersecção de onde parece que estes raios divergem.

**Exemplo 4.7:** Um objeto de altura de 7,0 cm é colocado a uma distância de 25 cm de uma lente positiva (convergente) que possui distância focal de 35,0 cm. Qual é a altura, posição e natureza da imagem?

Dados:

$$h_o = 7,0 \text{ cm} ; x_o = 25,0 \text{ cm} ; f = 35 \text{ cm}$$

Posição da imagem:

$$\frac{1}{x_o} + \frac{1}{x_i} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{x_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x_o} \Rightarrow x_i = \frac{1}{1/f - 1/x_o} = \frac{1}{1/35 - 1/25} = -87,5 \text{ cm}$$

Altura da imagem:

$$m = -\frac{x_i}{x_o} = -\left(\frac{-87,5}{25}\right) = +3,5 \quad h_i = m \times h_o = 3,5 \times 7 = 24,5 \text{ cm}$$

Portanto a imagem é virtual ( $x_i < 0$ ) localizada a 87,5 cm na frente da lente, direita ( $m > 0$ ) e maior que o objeto ( $m > 1$ ). Note que o objeto está entre a lente e seu foco.

**Exemplo 4.8:** Considere agora que o objeto do exemplo anterior foi deslocado para uma distância de 90 cm da lente. Qual a nova posição da imagem, sua altura e natureza?

Dados:

$$h_o = 7,0 \text{ cm} ; x_o = 90,0 \text{ cm} ; f = 35 \text{ cm}$$

Posição da imagem:

$$\frac{1}{x_o} + \frac{1}{x_i} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{x_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x_o} \Rightarrow x_i = \frac{1}{1/f - 1/x_o} = \frac{1}{1/35 - 1/90} = 57,3 \text{ cm}$$

Altura da imagem:

$$m = -\frac{x_i}{x_o} = -\frac{57,3}{90} = -0,64 \quad h_i = m \times h_o = 0,64 \times 7 = 4,46 \text{ cm}$$

Portanto a imagem é real ( $x_i > 0$ ) localizada a 57,3 cm na frente da lente, invertida ( $m < 0$ ) e menor que o objeto ( $m < 1$ ). Note que o objeto estava agora além do foco, na frente da lente.

**Exemplo 4.9:** A que distância de uma lente negativa (divergente), com distância focal de 45,0 cm deve estar um objeto, para garantir que o tamanho da imagem seja 10 vezes menor que o tamanho do objeto? A que distância da lente a imagem estará localizada?

Dados:

$$f = -45,0 \text{ cm (foco negativo para lente divergente); } h_i = 0,1 h_o$$

Usando a equação para ampliação lateral, temos:

$$\frac{h_i}{h_o} = -\frac{x_i}{x_o} \Rightarrow x_i = -x_o \frac{h_i}{h_o} = -x_o \frac{0,1h_o}{h_o} \Rightarrow x_i = -0,1x_o$$

Substituindo  $x_i$  e  $f$  na equação das lentes, obtemos:

$$\frac{1}{x_o} + \frac{1}{x_i} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{x_o} + \frac{1}{(-0,1x_o)} = \frac{1}{f} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x_o} - \frac{10}{x_o} = \frac{1}{-45} \Rightarrow \frac{-9}{x_o} = \frac{1}{-45} \Rightarrow x_o = 9 \times 45 = 405 \text{ cm}$$

Portanto o objeto deve estar a 405 cm na frente da lente. A distância da imagem será:

$$x_i = -0,1x_o = -0,1 \times 405 = -40,5 \text{ cm}$$

A imagem será virtual e encontra-se na frente da lente e será direita ( $m > 0$ ).

### Combinação de lentes

Vamos supor que temos duas lentes ( $L_1$  e  $L_2$ ), colocadas a certa distância uma da outra, como mostra a figura 4.36 abaixo. Cada lente tem uma distância focal diferente. Como se formará a imagem do objeto colocado na frente das duas lentes?

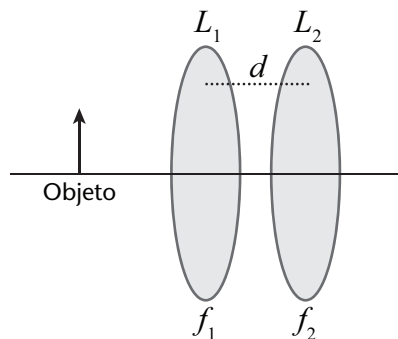


Figura 4.36 – Lentes duplas.

*Veja problema resolvido no fim do capítulo!*

Para **resolver este problema** consideramos primeiro a  $L_1$ , como se a  $L_2$  não existisse e calculamos a posição da imagem. Esta imagem será o objeto para a segunda lente. Calcula-se então a posição da imagem para a segunda lente, considerando este “novo” objeto. Esta será a imagem final formada pelo conjunto das duas lentes. A ampliação total  $M$  para as duas lentes é dada por

$$M = m_1 m_2 \quad (4.43)$$

onde  $m_1$  e  $m_2$  são as ampliações laterais para cada lente, respectivamente.

Vamos supor agora que as duas lentes  $L_1$  e  $L_2$  estejam superpostas, ou seja,  $d = 0$ . Como a imagem final será formada neste caso? De novo vamos calcular a imagem para as duas lentes separadamente. Para  $L_1$  temos:

$$\frac{1}{x_{1o}} + \frac{1}{x_{1i}} = \frac{1}{f_1} \quad (4.44)$$

Como as duas lentes estão juntas, a imagem produzida por  $L_1$  estará atrás de  $L_2$ , e, portanto, teremos um objeto virtual para  $L_2$ , e a distância deste objeto até  $L_2$  será  $x_{2o} = -x_{1i}$ . A equação para  $L_2$  será:

$$\frac{1}{x_{2o}} + \frac{1}{x_{2i}} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_{1i}} + \frac{1}{x_{2i}} = \frac{1}{f_2} \quad (4.45)$$

Somando (4.44) e (4.45) para eliminar  $x_{1i}$ , e como  $d = 0$ , podemos dizer que  $x_{1o} = x_o$  e  $x_{2i} = x_i$ , obtendo assim:

$$\frac{1}{x_{1o}} + \frac{1}{x_{2i}} = \frac{1}{x_o} + \frac{1}{x_i} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f} \quad (4.46)$$

Este é um resultado importante, pois mostra que quando temos duas lentes sobrepostas, os recíprocos de suas distâncias focais se somam. O recíproco da distância focal é chamado de potência da lente e quando esta potência é expressa em metros, é chamada de **dioptria (D)**.

$$P = \frac{1}{f(\text{metros})} \Rightarrow 1\text{m}^{-1} = 1\text{D} \quad (4.47)$$

De acordo com a equação (3) podemos ver que a potência total de lentes sobrepostas é a soma de suas potências individuais:

$$P_1 + P_2 = P \quad (4.48)$$

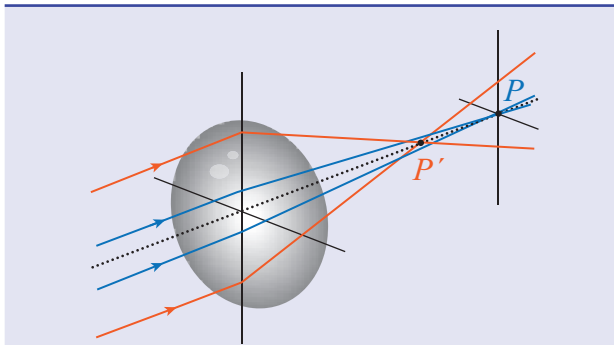
### Aberrações

Quando todos os raios de um objeto pontual não estão focalizados num único ponto, a ausência de nitidez da imagem é uma **aberração**. Este efeito acontece na prática tanto para lentes como para espelhos. As aberrações não são conseqüências de qualquer defeito da lente, ou do espelho, mas apenas o resultado da aplicação das leis da refração e

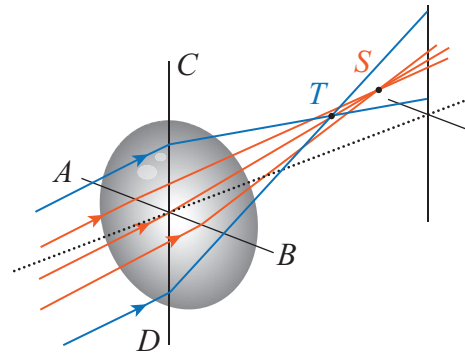
da reflexão às superfícies esféricas. Não aparecem explicitamente nas nossas equações, pois usamos as aproximações de pequenos ângulos nas deduções das fórmulas (aproximação paraxial). Algumas aberrações podem ser eliminadas, ou parcialmente corrigidas, mediante superfícies **anesféricas** nos espelhos ou lentes. Estas superfícies, no entanto, são mais difíceis de lapidar. Um exemplo típico de superfície refletora anesférica é o espelho parabólico. Vamos ver alguns exemplos de aberrações de raios que se afastam da aproximação paraxial, na tabela 4.5:

**Anesférica:**  
superfície cujo raio de curvatura não é constante; não-esférica.

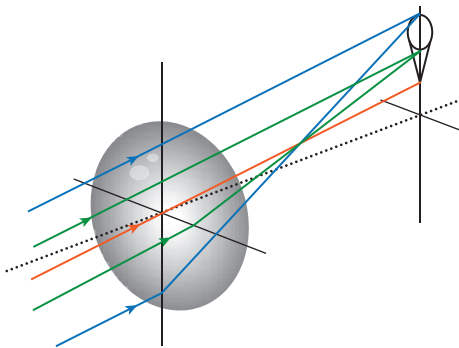
Tabela 4.5 – Alguns tipos de aberrações.



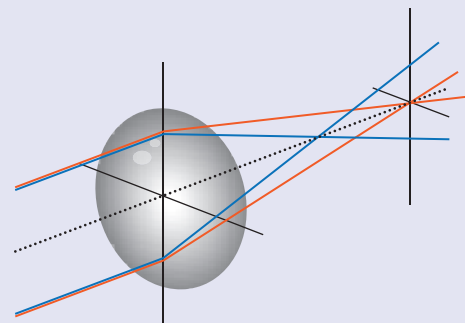
**Aberração esférica:** os raios que atingem a lente em pontos afastados do eixo são muito mais refratados que aqueles que atingem a lente nas vizinhanças do eixo, o que faz com que nem todos os raios sejam focalizados num único ponto. A imagem parece ser a de um disco circular, com diâmetro determinado pelos raios refratados na borda mais externa da lente.



**Astigmatismo:** os raios afastados do eixo da lente que passam ao longo do eixo  $AB$  são focados em  $S$ , enquanto que os raios que se originam do mesmo ponto objeto, mas que passam através do eixo  $CD$  são focados em  $T$ , originando uma imagem completamente fora de foco.



**Coma:** é produzido quando os raios de um ponto fora do eixo da lente passam através do perímetro da lente e são focados num anel deslocado radialmente do foco dos raios que passam no centro da lente. A imagem que se observa tem a forma de uma cauda cometária.



**Aberração Cromática:** resulta do efeito de dispersão, onde ocorre a variação do índice de refração com o comprimento de onda. A distância focal de uma lente depende de seu índice de refração sendo diferente para os diferentes comprimentos de onda. Note que esta aberração não ocorrerá em espelhos, pois neste caso só temos reflexão!



## Resumo

Em Óptica Geométrica consideramos que o comprimento de onda é pequeno frente ao tamanho dos objetos ( $\lambda \ll d$ ) e utilizamos a **aproximação retilínea**: a luz se propaga num meio através de linhas retas (raios).

Quando a luz incide numa superfície que separa dois meios, parte da luz será refletida e parte refratada. A velocidade da luz será diferente nestes dois meios e as leis que regem o comportamento da luz nestas condições seguem o **princípio de Fermat**:

“O caminho que um raio de luz percorre para ir de um ponto a outro é tal que o tempo para fazer este percurso é um mínimo.”

**Lei da Reflexão**: a luz refletida terá um ângulo de reflexão igual ao ângulo de incidência

$$\theta'_1 = \theta_1$$

**Lei de Snell (da refração)**: a luz que for refratada sofrerá um desvio de sua direção incidente que dependerá dos índices de refração dos meios envolvidos que vai obedecer a relação

$$\frac{\text{sen}\theta_2}{\text{sen}\theta_1} = \frac{v_2}{v_1} = \text{constante} \text{ ou } n_2 \text{sen}\theta_2 = n_1 \text{sen}\theta_1$$

onde  $v_1$  é a velocidade da luz no meio 1 e  $v_2$  é a velocidade da luz no meio 2, e  $n_1$  e  $n_2$  são respectivamente os índices de refração dos meios 1 e 2, definidos como:

$$n = \frac{\text{velocidade da luz no vácuo}}{\text{velocidade média da luz no meio}} = \frac{c}{v}$$

A relação entre o índice de refração e o comprimento de onda no meio e no vácuo é dada por:

$$n = \frac{\lambda_0}{\lambda_n}$$

**Reflexão Interna Total**: pode ocorrer quando a luz se propaga de um meio de alto índice de refração para um meio de índice de refração mais baixo. O ângulo crítico de incidência  $\theta_c$ , no qual ocorre a reflexão interna total em uma interface, é:

$$\text{sen}\theta_c = \frac{n_2}{n_1} \text{ para } n_1 > n_2$$

**Dispersão:** fenômeno que ocorre quando  $n$  varia com o comprimento de onda, e que explica as cores do arco-íris. Os diferentes comprimentos de onda são desviados de sua direção incidente, em ângulos diferentes. Pode-se determinar o índice de refração de um meio transparente, através da medida destes ângulos.

**Espelhos:** na aproximação paraxial a distância do objeto  $x_o$  e a distância da imagem  $x_i$  para um espelho esférico de raio  $R$  estão relacionadas pela equação dos espelhos

$$\frac{1}{x_o} + \frac{1}{x_i} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$$

onde  $f = R/2$  é a distância focal do espelho. A imagem de um objeto é um ponto do qual a luz diverge (imagem real) ou **parece** divergir (imagem virtual). Uma imagem real sempre pode ser projetada num anteparo, enquanto que a imagem virtual não. Segundo a convenção de sinais para espelhos,  $x_i$  é negativa para uma imagem virtual e positiva para uma imagem real. A relação entre a altura do objeto  $h_o$  e a altura da imagem  $h_i$  é dada pela **ampliação lateral**  $m$

$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{x_i}{x_o}$$

Quando  $m > 0$  a imagem será direita e quando  $m < 0$  a imagem será invertida.

**Superfícies refratoras:** uma imagem pode ser formada por refração de uma superfície esférica de raio  $R$ . As distâncias do objeto e da imagem para uma superfície assim estão relacionadas pela equação:

$$\frac{n_1}{x_o} + \frac{n_2}{x_i} = \frac{(n_2 - n_1)}{R}$$

E a amplitude lateral é dada por

$$m = -\frac{n_1 x_i}{n_2 x_o}$$

**Lentes delgadas:** as relações entre as distâncias do objeto e da imagem são dadas pela **equação das lentes**

$$\frac{1}{x_o} + \frac{1}{x_i} = \frac{1}{f}$$

onde a distância focal  $f$  é dada pela relação conhecida como **equação dos fabricantes de lentes**

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Lentes convergentes possuem distâncias focais positivas e para lentes divergentes,  $f$  é negativa.

A ampliação lateral é dada por

$$m = -\frac{x_i}{x_o}$$

**Combinação de lentes:** quando tivermos mais de uma lente para formar uma imagem, e no caso de elas estarem sobrepostas, a distância focal do conjunto será

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}$$

E a ampliação lateral

$$M = m_1 m_2$$

**Potência da lente:** é o recíproco da distância focal, que quando for expressa em metros, a unidade de potência é Dioptria

$$P = \frac{1}{f(\text{metros})} \Rightarrow 1\text{m}^{-1} = 1D$$

**Aberrações:** Quando todos os raios de um objeto pontual não estão focalizados num único ponto, a ausência de nitidez da imagem é uma aberração. Este efeito acontece na prática tanto para lentes como para espelhos e ocorre quando os raios incidentes fazem um ângulo muito grande com o eixo óptico, isto é, estamos fora da aproximação paraxial.

## Problemas resolvidos

1) Uma coisa interessante no estudo de espelhos planos são as imagens múltiplas formadas por dois espelhos, como já foi visto no exemplo 4.1. Considere agora dois espelhos planos colocados a  $45^\circ$ , com um objeto entre eles, como mostra a figura 4.41. Convença-se que se formarão 7 imagens deste objeto, como é mostrado na figura 4.42. Faça o diagrama de raios e reproduza esta figura.

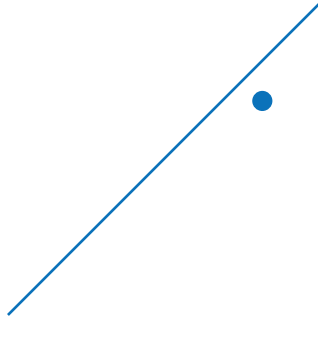


Figura 4.41: Espelhos planos com um ângulo de  $45^\circ$  entre eles.

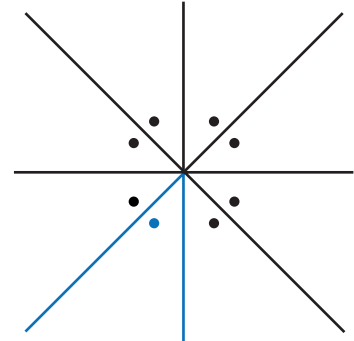


Figura 4.42: Imagens formadas pelos espelhos planos da figura 4.41.

2) Onde se formará a imagem de um objeto que está entre o ponto focal e o espelho? Desenhe o diagrama de raios e se convença que a imagem se formará atrás do espelho, portanto teremos uma imagem virtual, sendo direita, e maior que o objeto! Como você chamaria este tipo de espelho? Pense qual o tipo de espelho que você usa para se maquiagem ou fazer a barba e que produz uma imagem maior que o objeto?

3) Uma moeda de 1,0 cm de diâmetro está embutida em uma esfera de cristal maciça, com índice de refração de 1,56, com  $R = 30,0$  cm. A moeda está a 20 cm da superfície da esfera, como é mostrado na figura 4.28. Determine a posição e o tamanho da imagem que você observa. Considere que a esfera está imersa no ar ( $n_2 = 1$ ).

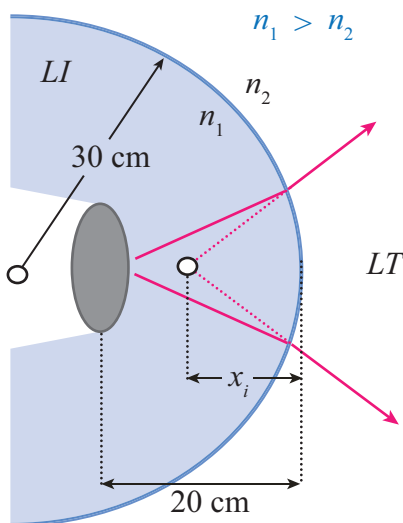


Figura 4.43: Problema 4.3

**Solução:** Nestes problemas, a primeira coisa que se faz é determinar o lado de incidência ( $LI$ ), que será o lado onde estará o objeto, e aí se coloca o índice 1 neste lado. Com isto podemos usar a equação (5) para determinar a posição da imagem. Os dados são:  $n_1 = 1,56$ ;  $n_2 = 1,00$ ;  $x_0 = 20,0$  cm;  $R = -30$  cm

$$\frac{n_1}{x_0} + \frac{n_2}{x_i} = \frac{(n_2 - n_1)}{R}$$

$$\frac{n_2}{x_i} = \frac{(n_2 - n_1)}{R} - \frac{n_1}{x_o}$$

$$x_i = \left( \frac{(n_2 - n_1)}{R} - \frac{n_1}{x_o} \right)^{-1} = \left( \frac{(1,00 - 1,56)}{-30,0} - \frac{1,56}{20,0} \right)^{-1} = -16,8 \text{ cm}$$

O tamanho da imagem será dado por

$$m = -\frac{n_i x_i}{n_o x_o} = -\frac{1,56 \times (-16,8)}{1,00 \times 20,0} = +1,3 \Rightarrow$$

$$m = \frac{h_i}{h_o} \Rightarrow h_i = 1,3 \times 1,0 \text{ cm} = 1,3 \text{ cm}$$

Ou seja, 30% maior do que o objeto real.

**4)** Duas lentes convergentes estão separadas por uma distância  $d = 30,0$  cm. A L1 tem uma distância focal de 10,0 cm e L2, de 8,0 cm. Um objeto é colocado a 30,0 cm na frente da lente L1. Encontre a posição final da imagem e a ampliação lateral.

**Solução:** Como as duas lentes são convergentes, as distâncias focais são positivas. Vamos analisar a imagem formada pela L1:

Dados:  $f_1 = 10,0$  cm;  $x_{1o} = 30,0$  cm

$$\frac{1}{x_{1o}} + \frac{1}{x_{1i}} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow \frac{1}{x_{1i}} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{x_{1o}} \Rightarrow x_{1i} = \frac{1}{1/f_1 - 1/x_{1o}} = \frac{1}{1/10 - 1/30} = 15 \text{ cm}$$

Esta imagem é real e será o objeto para a lente L2, estando situada entre as duas lentes, a uma distância de 15 cm da lente L2, já que a distância entre as duas lentes é 30,0 cm. Agora vamos calcular a imagem devido a este objeto, que será real, pois está na frente de L2.

Dados:  $f_2 = 8,0$  cm;  $x_{2o} = 15,0$  cm

$$x_{2i} = \frac{1}{1/f_2 - 1/x_{2o}} = \frac{1}{1/8 - 1/15} = 17,14 \text{ cm}$$

Portanto a imagem final, devido a combinação destas duas lentes será real, e estará situada depois da lente L2

A ampliação lateral para cada lente será:

$$m_1 = -\frac{x_{1i}}{x_{1o}} = -\frac{15}{30} = -0,5 \quad m_2 = -\frac{x_{2i}}{x_{2o}} = -\frac{17,14}{15} = -1,14$$

A ampliação total  $M$  das duas lentes será:

$$M = m_1 m_2 = 0,57$$

Portanto a imagem final será real, localizada a 17,14 cm da L2, direita ( $M > 0$ ) e menor do que o objeto. Faça o diagrama de raios e confirme estes cálculos!

## Problemas propostos com respostas

### 4.1 Reflexão e Refração:

**1)** Um mergulhador que está embaixo da água ( $n = 1,33$ ), emite um sinal de luz para um pescador num barco. A luz emitida faz um ângulo de  $35^\circ$ , em relação à normal à superfície. Para o pescador, com que ângulo a luz emerge em relação a normal a superfície?

Resposta:  $49,7^\circ$

**2)** Um aquário retangular com paredes de vidro espessas ( $n_v = 1,50$ ) está cheio de água ( $n_a = 1,33$ ). Um raio de luz, vindo do ar, incide na parede de vidro com um ângulo de  $37^\circ$ , em relação à normal à superfície. Qual é o ângulo de refração dentro da água?

Resposta:  $26,9^\circ$

**3)** Considere um prisma equilátero ( $\phi = 60^\circ$ ), com índice de refração de 1,45. Com que ângulo a luz deveria incidir no prisma para que o ângulo final de refração (luz saindo do prisma) fosse igual ao ângulo incidente?

Resposta:  $46,5^\circ$

**4)** Um bloco de vidro flint ( $n = 1,66$ ) é imerso num líquido desconhecido. O raio incidente dentro do líquido, ao atingir o vidro, faz um ângulo de  $48^\circ$  com a normal à superfície do vidro. O raio refratado (dentro do vidro) faz um ângulo de  $36^\circ$  com a normal. Qual o índice de refração do líquido?

Resposta: 1,31

### 4.3 Reflexão Interna Total:

5) Considere um diamante, que possui um índice de refração de 2,4.  
(a) Qual o seu ângulo crítico no ar? (b) E na água ( $n_a = 1.33$ )?

Resposta: (a)  $24,6^\circ$ ; (b)  $33.6^\circ$

6) Qual o ângulo de incidência crítica para um vidro flint ( $n = 1,66$ ), supondo que ele está imerso no ar?

Resposta:  $37^\circ$

7) Imagine um material transparente imerso no ar. Qual deverá ser seu índice de refração para que uma reflexão interna total ocorra para ângulos maiores de  $55^\circ$ ?

Resposta: 1,22

### 4.5 Espelhos Planos:

8) Quantas imagens são produzidas de um objeto que se encontra entre dois espelhos cujo ângulo entre eles é de  $60^\circ$ ? Convença-se de que este é o princípio do caleidoscópio!

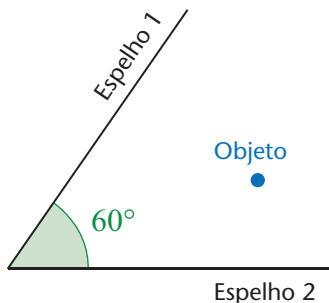


Figura 4.44: Espelhos planos com ângulo entre eles.

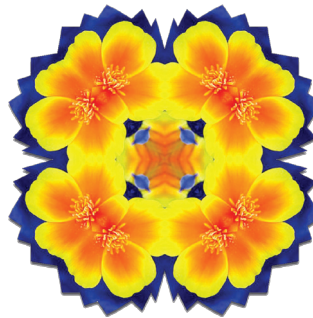


Figura 4.45: Caleidoscópio

Resposta: 6

### 4.6 Espelhos Esféricos:

9) Você está na frente de um espelho de aumento, a 25,0 cm de sua superfície, retocando a sua maquiagem (ou fazendo a barba...). Este espelho tem um raio de curvatura de 1,0 m. Localize e descreva sua própria imagem através de um diagrama de raios e calcule, usando a equação dos espelhos: a distância focal, a posição da imagem, e a

ampliação lateral. Verifique a consistência dos dados calculados com o diagrama de raios desenhado. Este espelho é côncavo ou convexo?

Resposta:  $f = 50,0$  cm;  $x_i = -50,0$  cm;  $m = 2,0$ .

**10)** Um carro de 2,2 m de altura está a 3,5 m de um espelho convexo com raio de curvatura de 90,0 cm. Encontre o tamanho e a posição da imagem.

Resposta:  $x_i = 0,40$  m ;  $h_i = 0,25$  m.

**11)** Um espelho côncavo é usado numa câmera fotográfica para que a imagem de um objeto de 1,5 m de altura, situado a uma distância de 8,0 m, possa ser enquadrada num filme de 35 mm de altura. Qual deve ser o raio de curvatura deste espelho?

Resposta:  $R = 36,5$  cm

**12)** Faça um diagrama de raios para os exemplos 4.7 e 4.8, confirmando sua solução numérica.

#### 4.7 Superfícies Refratoras:

**13)** Você está dentro de uma piscina, olhando para seus pés, como na figura 4.46. A distância entre a superfície da água e seus pés é de 1,0 m. A que distância abaixo da superfície da água seus pés parecerão estar?

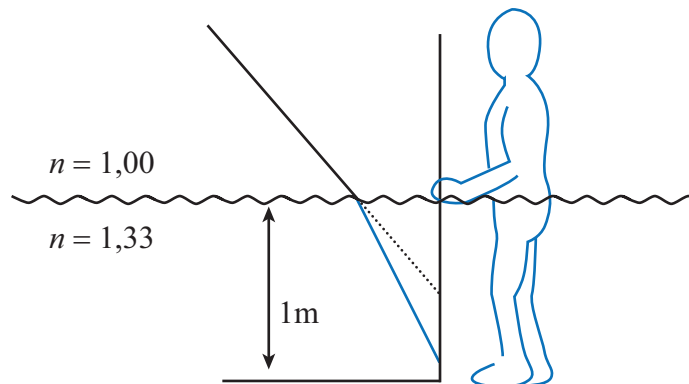


Figura 4.46: Desenho para resolver o problema 13.

Resposta: 75 cm.

**14)** Imagine um tubo longo de vidro maciço, na forma de um tubo de ensaio, onde uma das suas extremidades possui uma superfície esférica convexa, com raio de curvatura de 5,0 cm. O índice de refração deste tubo é de 1,5. Um objeto pontual é colocado ao longo do



eixo deste tubo, no ar. Agora imagine as situações descritas a seguir e encontre a imagem, descrevendo se será real ou virtual, a partir do desenho de um diagrama de raios para cada caso, confirmando com os cálculos, onde:

- (a) o objeto está a 20,0 cm da superfície esférica;
- (b) objeto a 5,0 cm da superfície esférica;
- (c) objeto a uma distância muito grande da superfície esférica.

Resposta: (a)  $x_i = 30,0$  cm, real; (b)  $x_i = -15,0$  cm, virtual;  
(c)  $x_i = 15,0$  cm, real.

**15)** Repita o problema acima, considerando agora uma superfície esférica côncava, com raio de curvatura de  $-5,0$  cm.

Resposta: (a)  $x_i = -10,0$  cm, virtual; (b)  $x_i = -5,0$  cm, virtual;  
(c)  $x_i = -15,0$  cm, virtual.

#### 4.8 Lentes Delgadas:

**16)** Um objeto com 5,0 cm de altura está situado a 30,0 cm na frente de uma lente convergente, com uma distância focal de 24,0 cm. Utilizando um diagrama de raios, localize e descreva a imagem (real ou virtual, direita ou invertida, maior, menor ou igual). Confira com os dados obtidos através da equação para lentes.

Resposta:  $x_i = 120,0$  cm (real);  $m = -4,0$  (invertida, maior);  
 $h_i = 20,0$  cm.

**17)** Um objeto é colocado na frente de uma lente com distância focal de 20,0 cm. Onde a imagem será formada e qual sua ampliação lateral quando o objeto é deslocado para as seguintes distâncias: (a) 10,0 cm; (b) 20,0 cm; (c) 25,0 cm; (d) 50,0 cm e (e) 75,0 cm.

Resposta: (a)  $x_i = -20,0$  cm,  $m = 2,0$ ; (b)  $x_i = \infty$ ; (c) 12 pt = 100,0 cm,  
 $m = -4,0$ ; (d)  $x_i = 33,3$  cm,  $m = -0,67$ ; (e)  $x_i = 27,3$  cm,  
 $m = -0,36$ .

**18)** Uma lente bi-côncava com índice de refração de 1,45 tem raios de curvatura de 30,0 cm e 25,0 cm. Um objeto está localizado a 80,0 cm a esquerda da lente. Determine: (a) a distância focal da lente; (b) a posição da imagem; (c) a ampliação lateral. (d) A imagem é real ou virtual? Direita ou invertida?

Resposta: (a)  $-30,3$  cm; (b)  $-22,0$  cm; (c) 0,275; (d) Virtual e direita.

**19)** Vidro com índice de refração de 1,6 é usado para fazer uma lente que tem os raios de curvatura com igual magnitude. Determine este raio de curvatura e faça um desenho da lente se a sua distância focal no ar, for (a) + 5,0 cm; (b) - 5,0 cm.

Resposta: (a)  $r_1 = 6$  cm;  $r_2 = -6$  cm; (b)  $r_1 = -6$  cm;  $r_2 = 6$  cm.

**20)** Duas lentes convergentes, cada uma com distância focal de 10,0 cm, estão separadas por uma distância de 35,0 cm. Um objeto está colocado a 20,0 cm, a esquerda da primeira lente.

(a) Ache a posição da imagem final usando o diagrama de raios e a equação para lentes.

(b) Descreva a imagem (real ou virtual, direita ou invertida, maior, menor ou igual).

Resposta: (a) 30,0 cm, depois da segunda lente.

(b) real, direita, maior.

**21)** Uma lente bi-convexa de raios  $r_1 = +10,0$  cm e  $r_2 = -10,0$  cm é feita de vidro com índice de refração de 1,53 para a luz azul e de 1,47 para a luz vermelha. Determine a distância focal desta lente para (a) luz vermelha e (b) luz azul.

Resposta: (a) 10,6 cm; (b) 9,43 cm.

## Referências

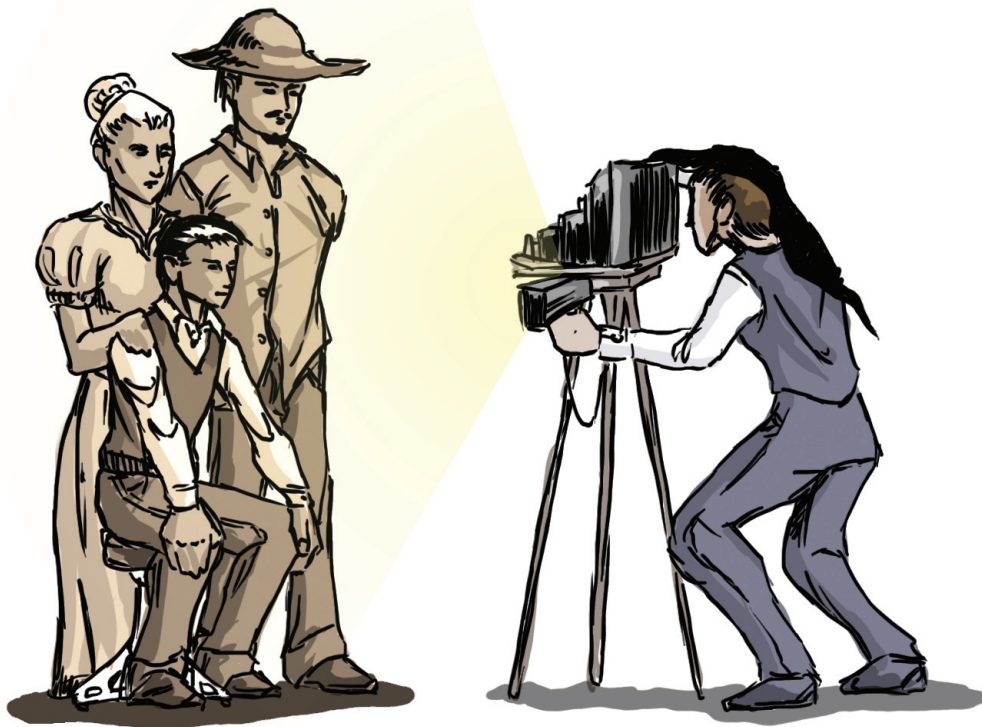
TIPLER, P. A. **Física para Cientistas e Engenheiros**. 4. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física 4** - Ótica e Física Moderna. 6 ed. Rio de Janeiro: LTC.

SERWAY, R. **Física 3** - Eletricidade, Magnetismo e Ótica. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC.

SERWAY, R. **Princípios de Física** – Óptica e Física Moderna. 3. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning.

## 5 Instrumentos ópticos





## 5 Instrumentos ópticos

*Neste capítulo espera-se que você aplique os conhecimentos obtidos no capítulo 4, sobre lentes e espelhos, para entender a operação de diversos instrumentos ópticos, como a máquina fotográfica, a lupa, o microscópio e o telescópio.*

É interessante se dar conta de que a maioria dos instrumentos ópticos que vamos estudar foi criada para auxiliar a nossa visão! Estes instrumentos permitem estender o alcance dos nossos sentidos desde o muito pequeno até o extremamente distante. Como o olho não é só parte do processo, mas também um instrumento óptico em si mesmo, nós começaremos nosso estudo entendendo como funciona a formação de imagens no nosso olho! A seguir estudaremos o funcionamento de uma máquina fotográfica, da lupa, de um microscópio óptico e de um telescópio.

### 5.1 Olho

A figura 5.3 mostra um esquema bastante simplificado das partes essenciais do olho, para que possamos estudá-lo. Na parte da frente temos a **córnea** que possui uma curvatura bem acentuada. A luz entra no olho através da *pupila*, que é uma abertura variável e vai ser focalizada na **retina**, uma película de fibras nervosas que recobre a superfície posterior do olho. A focalização da luz é feita através do sistema **córnea-cristalino**.

A retina contém os **bastonetes** e **cones**, que são células fotossensíveis que recebem a imagem (luz) e transmitem a informação para o cérebro, através do **nervo óptico**. O **músculo ciliar** ajusta a curvatura do cristalino a fim de permitir a formação da imagem de objetos a diferentes distâncias. Entre a córnea e o cristalino, temos um líquido chamado **humor aquoso** com índice de refração  $n = 1,336$ . Quase toda a refração da luz incidente no olho ocorre quando a luz passa do ar para esse líquido. O cristalino possui um índice de refração médio  $n = 1,396$ . Atrás do cristalino, preenchendo o olho, temos um líquido semelhante ao humor aquoso, chamado **humor vítreo**.



Figura 5.1 – Microscópio



Figura 5.2 – Telescópio

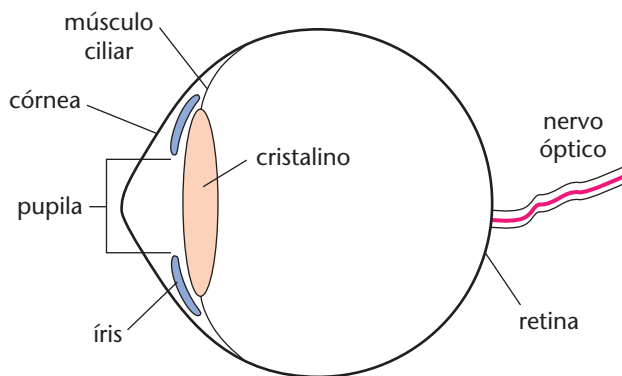


Figura 5.3 – Diagrama esquemático do olho.

A visualização e os detalhes de um objeto dependem do tamanho da imagem do objeto na nossa retina. No olho, sem nenhuma ajuda, o tamanho da imagem é determinado pelo ângulo subtendido pelo objeto no olho e, portanto este ângulo vai ser maior se o objeto estiver mais próximo do olho e menor, quando estiver afastado. Chegará num ponto em que o olho não focaliza mais confortavelmente a imagem deste objeto na retina. Define-se então uma distância, chamada de **ponto-próximo ( $x_{pp}$ )**, onde conseguimos sem esforço, focar a ima-

gem do objeto na retina. Esta distância varia de pessoa para pessoa e é alterada com a idade. Você pode determinar seu ponto-próximo trazendo o livro o mais perto possível dos seus olhos de forma que mantenha ainda uma imagem nítida do texto e medir a distância do livro até seus olhos. O valor padrão da distância do ponto-próximo é de 25 cm. Pode variar de, por exemplo, 7 cm para alguém com 10 anos de idade até 200 cm, aos 60 anos. Esta variação está relacionada com a perda da flexibilidade do cristalino e do músculo ciliar, que permite ajustar a distância focal. Este processo de ajustamento da distância focal é chamado de **acomodação**.

Quando o olho está focalizado num objeto distante, o músculo está relaxado e o sistema córnea-cristalino tem a sua distância focal máxima, em torno de 2,5 cm. Quando a convergência do olho não é suficiente, e se tem um objeto próximo, o olho não consegue focalizar a imagem na retina, mas apenas atrás da retina. Pessoas com este problema são **hipermétropes**. Ela consegue ver objetos ao longe, para os quais a convergência necessária para focalizar a imagem na retina é pouca. Na figura 5.4 mostramos um esquema de um olho com hipermetropia e a lente necessária para sua correção, que é a convergente.

Quando a convergência do olho for em demasia, a imagem de um objeto distante é focalizada na frente da retina e apenas objetos próximos têm sua imagem focalizada na retina. Este problema na formação da imagem é conhecido como **miopia**. Pessoas míopes precisam de lentes divergentes (negativa) para corrigir a convergência em excesso dos olhos. Na figura 5.4 podemos ver um esquema de um olho com miopia e a lente necessária para sua correção.

Outro problema comum de visão é o **astigmatismo**, onde a imagem de um objeto puntiforme se transforma num segmento de reta. Isto é provocado pela anesfericidade da córnea. Veja a tabela 4.5, no capítulo

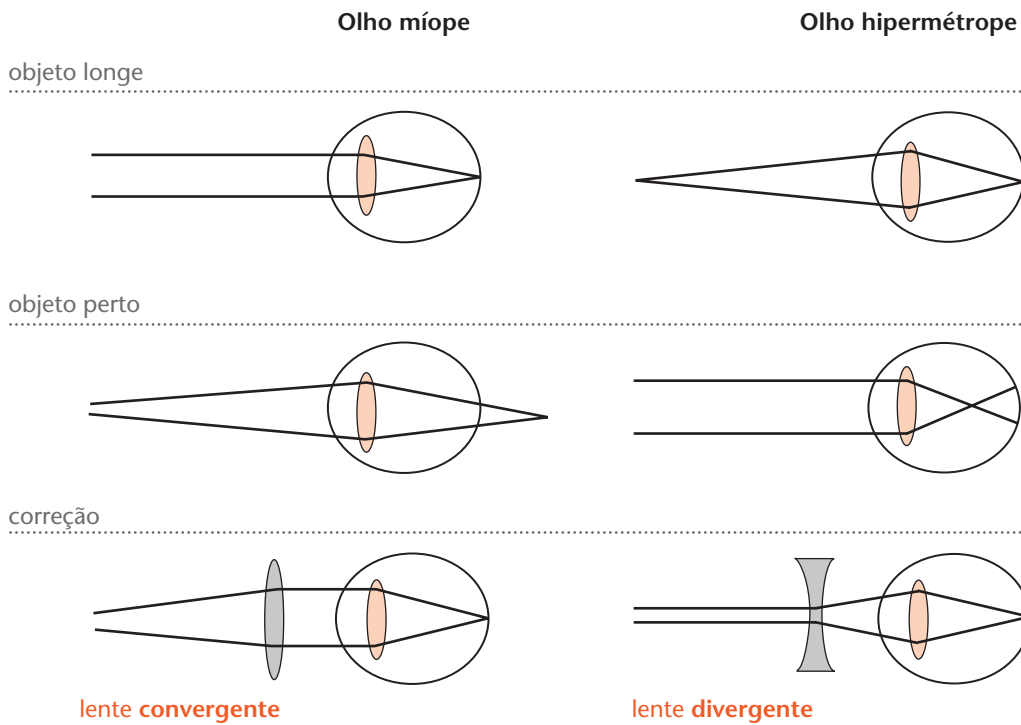


Figura 5.4 – Olho míope e hipermetrope.

4, sobre aberrações esféricas, onde se mostra exatamente o astigmatismo. As lentes usadas para corrigir este problema são cilíndricas.

**Exemplo 5.1:** Considere uma pessoa míope que vai colocar uma lente de contato. O ponto- próximo desta pessoa está a 100,0 cm de distância da vista. Qual a potência da lente que precisaria usar para trazer o ponto-próximo até 25,0 cm de distância, uma distância considerada confortável para leitura?

**Solução:** Precisamos usar uma lente convergente ( $f$  positivo) para uma pessoa míope. Para determinar a potência desta lente, vamos calcular sua distância focal considerando o diagrama da figura 5.5.

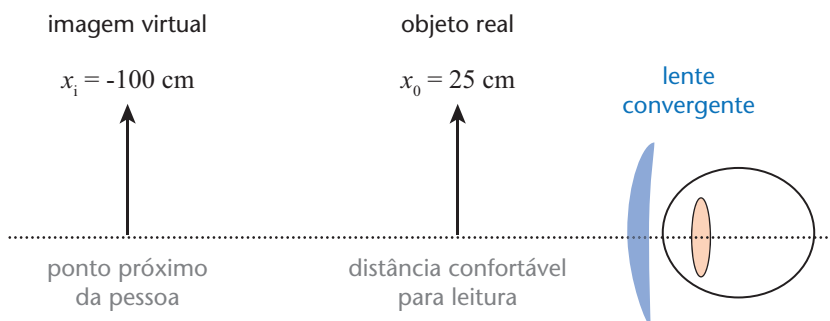


Figura 5.5

Neste diagrama, o ponto-próximo da pessoa é 100,0 cm e, portanto, este ponto é onde a imagem deverá ser formada, sendo uma imagem virtual, pois se encontra na frente da lente (sinal negativo). Esta imagem deverá ser obtida para um objeto situado a 25,0 cm do olho. Temos então

$$x_o = 25,0 \text{ cm} \quad x_i = -100,0 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_o} + \frac{1}{x_i} = \frac{1}{25,0 \text{ cm}} + \frac{1}{(-100,0 \text{ cm})} = \frac{3}{100,0 \text{ cm}} \Rightarrow f = 33,3 \text{ cm}$$

Para calcular a potência da lente, precisamos usar  $f$  em metros, portanto  $f = 0,3 \text{ m}$  e

$$P = \frac{1}{f} = 3 \text{ dioptrias}$$

## 5.2 Máquina Fotográfica

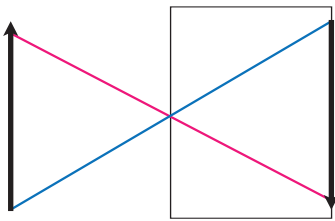


Figura 5.6 – Câmera do tipo pin-hole.

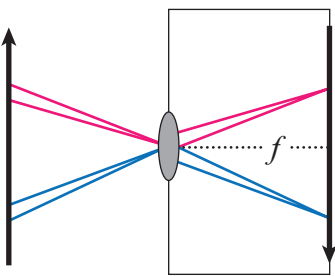


Figura 5.7 – Câmera simples.

A câmara mais simples que existe é aquela feita apenas com uma caixa e um orifício extremamente pequeno (*pin-hole*), por onde a luz entra. Na face oposta a este orifício pode-se colocar um pedaço de filme onde a imagem é fixada, como é mostrado na figura 5.6.

Cada ponto do objeto emite raios em todas as direções possíveis, mas apenas dois são mostrados na figura 5.6, e que passam através do orifício. Para cada ponto do objeto, apenas um raio passará pelo orifício, gerando uma imagem bem definida no filme (um ponto minúsculo para cada ponto do objeto). Entretanto, como o orifício é muito pequeno, a imagem ficará pouco visível, pois muito pouca luz passa pelo orifício. Para obtermos uma imagem mais brilhante, temos que abrir um pouco o orifício, onde mais raios irão atingir o filme, mas formarão pontos maiores que serão sobrepostos e a imagem, embora mais brilhante, ficará borrada. Podemos então usar uma lente neste orifício, de tal modo a focar a imagem. Neste caso teremos que montar a caixa de tal modo que o filme fique na distância focal da lente, como é mostrado na figura 5.7.

Este é o princípio da máquina fotográfica!

Um esquema simples da máquina fotográfica é mostrado na figura 5.8. Ela consiste em uma caixa hermética à luz, uma **lente convergente** cuja área iluminada vai ser regulada por uma **abertura variável**, um



**diafragma** que regula o tempo de exposição do filme, que pode ser também variado, sendo que ambos os dispositivos permitem controlar a quantidade de luz que entra na máquina, e por uma película sensível a luz, que é o **filme fotográfico**.

As máquinas fotográficas mais simples, de 35 mm (largura do filme fotográfico) possuem uma lente com distância focal fixa, em geral de 50 mm. A focalização da imagem é feita variando-se a distância entre a lente e o filme fotográfico. A quantidade ótima de luz para se ter uma imagem com bom contraste está relacionada com a “velocidade” do filme, medida convencionalmente por um número ASA. Quanto mais “rápido” o filme, menos luz é preciso para fixar a imagem, e a ASA será grande. Um filme com ASA 400 ou 1000 é utilizado para fotos em lugares fechados onde a iluminação é pouca. Filmes com ASA 100 são utilizados para fotos em exteriores, onde há bastante luz.

A abertura máxima da máquina está limitada pelo tamanho da lente e pelas diversas aberrações que já discutimos no capítulo 4. Na verdade o custo de uma máquina está relacionado à qualidade das suas lentes e do seu sistema ótico, que visa a redução das aberrações cromáticas, esféricas e as outras já vistas. O tamanho da abertura é dado pelo **número  $f$**  (adimensional)

$$\text{número } f = \frac{f}{D} \quad (5.1)$$

onde  $f$  é a distância focal e  $D$  o diâmetro máximo utilizável da lente. Por exemplo, uma lente com a seguinte especificação  $f/2,8$  e com distância focal de 50 mm, têm o diâmetro máximo utilizável  $D$  de sua lente dado por

$$D = \frac{f}{\text{número } f} = \frac{50 \text{ mm}}{2,8} = 17,9 \text{ mm}$$

Quanto menor o número  $f$ , mais cara é a lente, pois significa que seu diâmetro utilizável é maior e aí começamos a ter os problemas de aberrações já vistos no capítulo 4 e que precisam ser corrigidos, encarecendo o custo destas lentes.

O campo de visão de uma máquina de 35 mm com lente de distância focal de 50 mm é de  $45^\circ$ , o mesmo do nosso olho. Para aumentar este campo, usa-se uma objetiva grande angular, com distância focal menor, por exemplo, de 24 mm. Quando um objeto está a uma distância

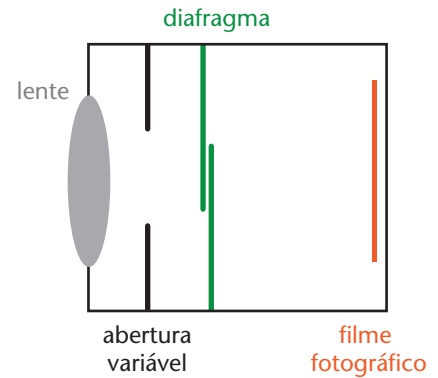


Figura 5.8 – Diagrama esquemático de uma máquina fotográfica.

muito maior que a distância focal, a imagem se formará no foco e como a ampliação lateral é dada por  $m = -x_i / x_o$  (4.42), o tamanho desta imagem no filme será menor e aproximadamente proporcional a distância focal. Portanto uma objetiva grande angular forma uma imagem menor de um objeto, do que uma objetiva de 50 mm. Já para objetivas do tipo telefoto, a distância focal é muito maior, da ordem de 200 mm e proporciona uma ampliação cerca de 4 vezes a de uma objetiva de 50 mm, porém possui um campo de visão menor.

### 5.3 Lente de aumento

Para aumentar o tamanho aparente de um objeto, precisamos trazê-lo para perto do olho, como é mostrado na figura 5.9. Mas quando fazemos isto, e o objeto fica mais perto do que o seu ponto-próximo, a imagem fica borrada, não se consegue focar direito.

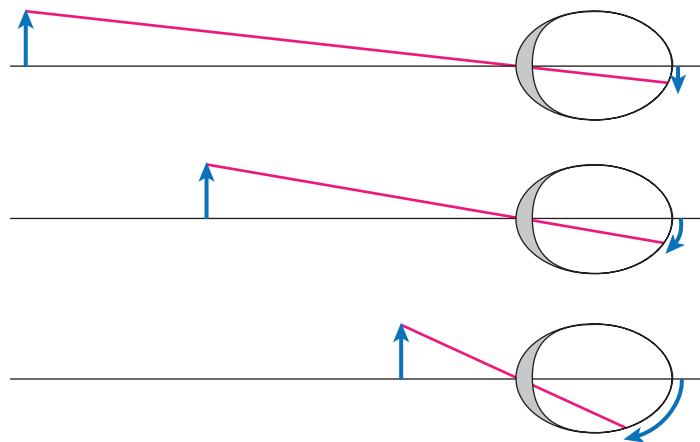


Figura 5.9 – Tamanho da imagem na retina conforme a distância do objeto.

Com o auxílio de uma lente convergente pode-se criar uma imagem virtual no infinito e seus olhos poderão focar esta imagem facilmente, produzindo uma imagem bem definida na retina, como é mostrado na figura 5.10. Esta lente convergente é chamada de **lupa simples**.

Como já foi discutida antes, a ampliação da imagem é proporcional ao ângulo subtendido pelo objeto no olho, mostrado na figura 5.10 (a)

$$\theta = \frac{h_o}{x_{pp}}$$

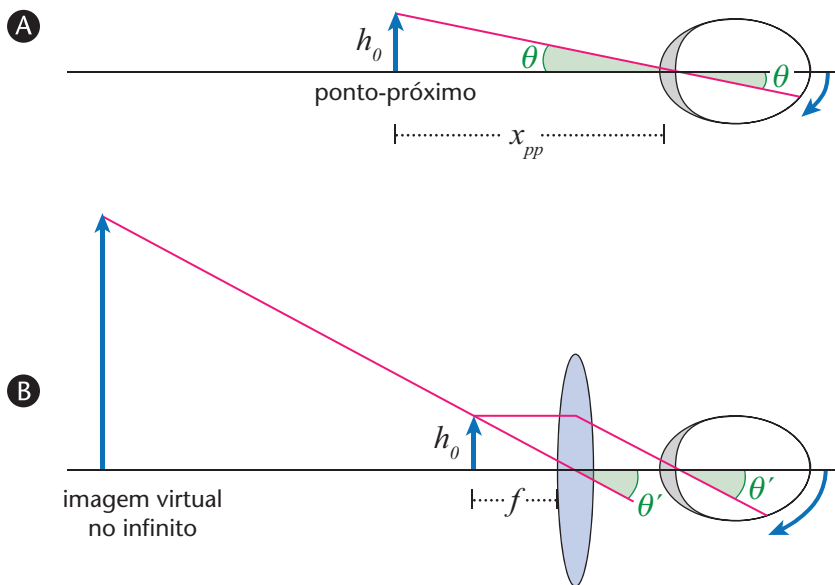


Figura 5.10 – Imagem no ponto-próximo (A) e aumento da imagem com a lente convergente (B).

Se a lente estiver próxima ao olho e possuir uma distância focal  $f$  menor que  $x_{pp}$  e o objeto for colocado na distância focal desta lente, como na figura 5.10 (b), o ângulo subtendido pelo objeto é, agora dado por:

$$\theta' = \frac{h_o}{f}$$

A **ampliação angular** ou **aumento da lupa** é dado por:

$$M_{oc} = \frac{\theta}{\theta'} = \frac{x_{pp}}{f} \quad (5.2)$$

As objetivas usadas em microscópios e telescópios são simples lentes de aumento, como vamos ver a seguir.

**Exemplo 5.2:** Uma pessoa com ponto-próximo normal, de 25 cm, usa uma lente de aumento com 50 dioptrias. Qual o aumento desta lupa?

**Solução:** A distância focal de uma lente com  $P = 50$  dioptrias é:

$$f = \frac{1}{P} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ m} = 2,0 \text{ cm}$$

Para  $x_{pp} = 25\text{cm}$ , temos que  $M_{oc} = \frac{25,0 \text{ cm}}{2,0 \text{ cm}} = 12,5$

Portanto o objeto parecerá 12,5 vezes maior, pois ele pode ser colocado a 2,0 cm do olho no lugar dos 25 cm, e assim a imagem na retina aumentará 12,5 vezes de tamanho.

## 5.4 Microscópio Composto

O microscópio composto é usado para observar objetos minúsculos a distâncias muito pequenas. Na figura 5.11 temos um desenho esquemático de sua forma mais simples, onde temos apenas duas lentes convergentes. A lente que fica próxima ao olho é chamada de **ocular** e a que fica mais perto do objeto é chamada de **objetiva**.

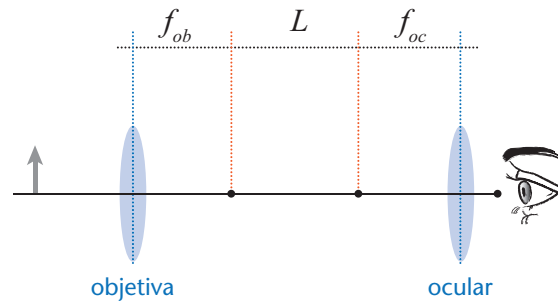


Figura 5.11 – Diagrama esquemático de um microscópio composto.

O microscópio é construído de tal forma que a imagem formada pela objetiva caia no segundo ponto focal da ocular, como é mostrado na figura 5.12. A distância entre o segundo ponto focal da objetiva  $f_{ob}$  e o primeiro ponto focal da ocular  $f_{oc}$  é o **comprimento do tubo L**, que deve ser de aproximadamente 16 cm, conforme padronização.

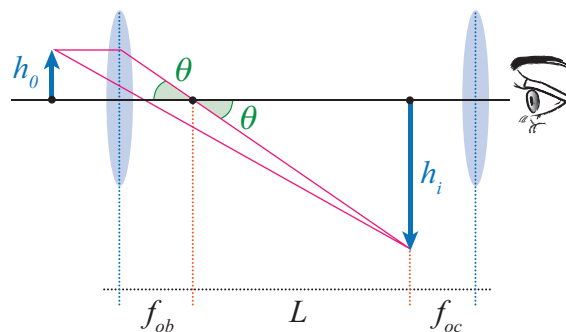


Figura 5.12 – Formação da imagem pela objetiva.

A ampliação lateral da objetiva, conforme o diagrama da figura 5.10, é dada por:

$$\tan \theta = \frac{h_o}{f_{ob}} = -\frac{h_i}{L} \Rightarrow m_{ob} = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{L}{f_{ob}} \quad (5.3)$$

A ampliação angular da ocular é dada pela equação 5.2:  $M_{oc} = \frac{x_{pp}}{f}$ , onde  $x_{pp}$  é o ponto-próximo do observador e  $f = f_{oc}$ , a distância focal da ocular:

$$M = m_{ob} M_{oc} = -\frac{L}{f_{ob}} \frac{x_{pp}}{f_{oc}} \quad (5.4)$$

Na figura 5.13 temos a formação da imagem vista pela ocular, e como o objeto agora para a ocular, é a imagem produzida pela objetiva, no ponto focal da ocular, temos a impressão de que os raios que chegam na ocular vêm de uma distância grande (lembre da definição de distância focal dada na secção 4.8, do capítulo 4) e portanto a imagem observada será ampliada e invertida, como é mostrado na figura 5.13.

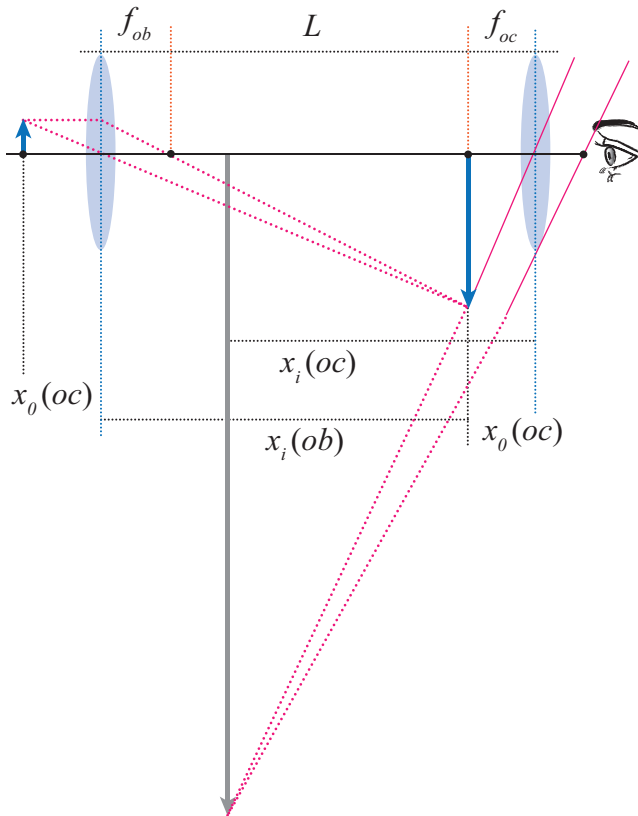


Figura 5.13 – Formação da imagem final, observada pela ocular.

O aumento, ou poder de ampliação para o microscópio composto, será dado então pelo produto da ampliação lateral da objetiva pela ampliação angular da ocular, e a imagem final será ampliada, invertida e virtual (formada na frente da ocular), como é mostrado na figura 5.13.

**Exemplo 5.3:** Um microscópio tem sua objetiva e ocular separadas por 18,0 cm. Se  $f_{ob} = 0,4$  cm e  $f_{oc} = 5,0$  cm, onde o objeto deve estar localizado para produzir uma imagem final virtual e no infinito? Qual o aumento total deste microscópio?

**Solução:** Para resolver este exemplo vamos ver a figura 5.13. Queremos determinar  $x_o$  (*ob*) considerando  $x_i$  (*oc*) =  $\infty$ . Para ter a imagem da ocular formada no infinito, a imagem da objetiva deve estar exatamente sobre o ponto focal da ocular, portando de acordo com o desenho da figura 5.13 temos:

$$x_i (ob) + x_o (oc) = 18,0 \text{ cm}$$

$$x_o (oc) = f_{oc} = 5,0 \text{ cm}$$

$$x_i (ob) = 18,0 \text{ cm} - 5,0 \text{ cm} = 13,0 \text{ cm}$$

Usando a equação dos espelhos e considerando os sinais para as distâncias do objeto e da imagem em relação à objetiva, que serão positivos, temos:

$$\frac{1}{f_{ob}} = \frac{1}{x_i(ob)} + \frac{1}{x_o(ob)} \Rightarrow \frac{1}{x_o(ob)} = \frac{1}{f_{ob}} - \frac{1}{x_i(ob)} = \frac{1}{0,40 \text{ cm}} - \frac{1}{13,0 \text{ cm}} = \frac{12,6}{5,2}$$

$$x_o (ob) = 0,41 \text{ cm}$$

O aumento total do microscópio será dado pela equação 5.4:

$$M = -\frac{L}{f_{ob}} \frac{x_{pp}}{f_{oc}}$$

Vamos considerar  $x_{pp} = 25,0$  cm e  $L$  será dado por:

$$L = 18,0 \text{ cm} - (f_{ob} + f_{oc}) = 18,0 \text{ cm} - 5,4 \text{ cm} = 12,6 \text{ cm}$$

$$M = -\frac{12,6 \text{ cm}}{0,4 \text{ cm}} \times \frac{25,0 \text{ cm}}{5,0 \text{ cm}} = 157,5$$

O objeto deve estar a 0,41 cm da objetiva para se gerar uma imagem no infinito com um aumento de 157,5 vezes.

## 5.5 Telescópio

O telescópio é usado para observar objetos muito distantes, que em geral são grandes, mas parecem muito pequenos, pois o ângulo subtendido pelo olho é muito pequeno e a idéia é aumentar este ângulo, de tal modo que a imagem deste objeto pareça maior. Na figura 5.14 temos o desenho esquemático de um telescópio astronômico bem simples, constituído apenas por duas lentes convergentes: uma objetiva e uma ocular, separadas por uma distância igual a  $f_{ob} + f_{oc}$ . Este tipo de telescópio é chamado de telescópio refrator. Comparando com o microscópio composto, vemos que para montar este telescópio, precisamos apenas colocar  $L = 0$  (veja figura 5.11).

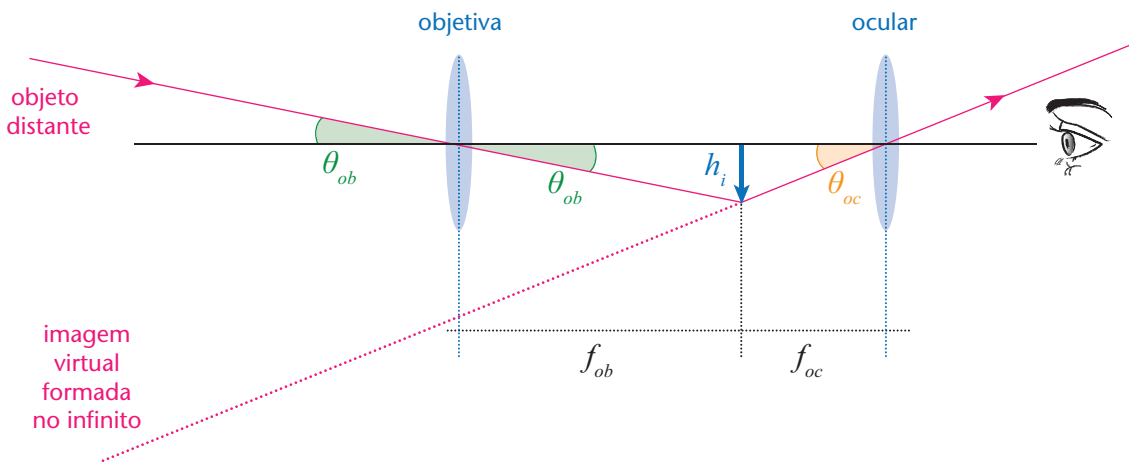


Figura 5.14 – Diagrama esquemático para um telescópio simples.

O objeto está situado a uma distância muito grande da objetiva, portanto sua imagem irá se formar na distância focal da objetiva ( $f_{ob}$ ). Será uma imagem real, invertida e muito menor que o objeto. Esta imagem será agora o objeto para a ocular. Esta lente está colocada de tal modo, que sua distância focal ( $f_{oc}$ ) coincide com a distância focal da objetiva, como pode ser observado no diagrama da figura 5.14. Neste caso, a imagem vista pela ocular, do objeto no seu ponto focal (imagem da objetiva) irá se formar no infinito e teremos uma imagem final virtual e maior.

O aumento do telescópio é o aumento angular, já definido antes para o microscópio composto, e será a razão entre  $\frac{\theta_{oc}}{\theta_{ob}}$ .

De acordo com a figura 5.14 temos:

$$\tan \theta_{oc} = \frac{h_i}{f_{oc}} \approx \theta_{oc}; \quad \tan \theta_{ob} = -\frac{h_i}{f_{ob}} \approx \theta_{ob} \Rightarrow \frac{\theta_{oc}}{\theta_{ob}} = -\frac{f_{ob}}{f_{oc}}$$

$$M = -\frac{f_{ob}}{f_{oc}} \quad (5.5)$$

É interessante ressaltar aqui que o aumento num telescópio não é o mais importante, mas o que limita um telescópio é sua capacidade de receber luz, e isto depende do tamanho de sua objetiva. Como já foi discutido anteriormente, na máquina fotográfica, quanto maior o diâmetro da objetiva, mais luz entrará e, portanto mais brilhante será a imagem. Porém vamos recair no problema, também já discutido na secção 4.8, do capítulo 4, de aberração das lentes, pois vamos nos afastar da aproximação paraxial, e como vimos, lentes grandes e sem aberrações são difíceis de construir. Além disso, existe uma limitação mecânica, lentes grandes são pesadas e só podem ser suportadas pelas suas bordas, o que torna mais difícil também a sua construção. Por isto em muitos casos, são usados espelhos côncavos no lugar de lentes e chamamos os telescópios que usam espelhos, de telescópios refletor. Quando usamos espelhos no lugar de lentes, as aberrações cromáticas são eliminadas e o suporte para os espelhos não é limitado apenas às bordas, podendo estes ser grandes e pesados, o que permite receber uma grande quantidade de luz. Na figura 5.15 é mostrado o desenho esquemático de duas construções de telescópios refletor. No desenho mostrado em (a) temos um telescópio onde o espelho deve ser bem grande, pois a cabine do observador bloqueia parte da luz incidente. Na construção mostrada em (b) temos o auxílio de um espelho secundário, que reflete a luz da objetiva, através de um orifício no próprio espelho da objetiva. Neste caso, o observador fica numa posição melhor para observar a imagem.

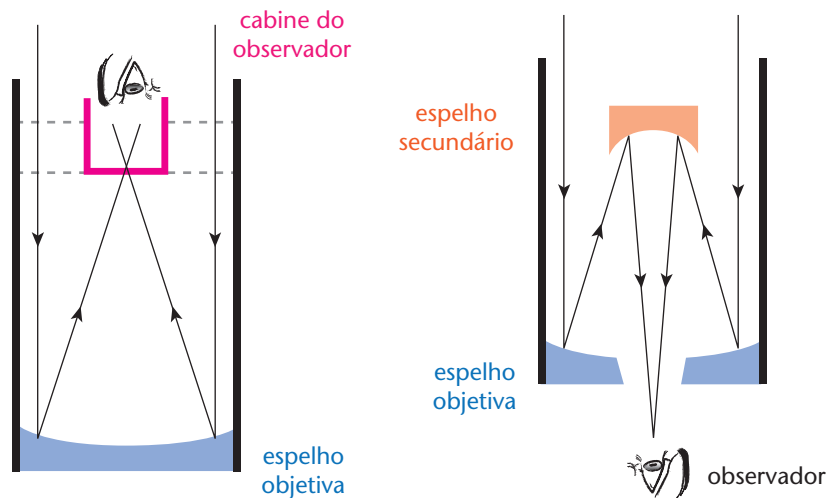


Figura 5.15 – Diagrama esquemático para dois telescópios refletor.



## Resumo

### Olho

- A luz que chega ao olho é focada na retina pelo sistema córnea-cristalino;
- Para um olho relaxado, a sua distância focal é em torno de 2,5 cm;
- Para focar objetos na retina, que estiverem muito próximos ou muito longe do olho, o cristalino tem a capacidade de alterar um pouco sua forma;
- A menor distância na qual o cristalino consegue ainda focalizar uma imagem na retina é chamado de **ponto-próximo ( $x_{pp}$ )**, que varia com a idade e de pessoa para pessoa – casos normais  **$x_{pp} = 25 \text{ cm}$** ;
- Tamanho aparente do objeto depende do tamanho da imagem na retina, que depende da distância do objeto ao olho;
- Hipermetropia – quando a convergência do olho não é suficiente e usa-se para correção, uma lente convergente;
- Miopia – quando a convergência é demasiada, usando-se para correção uma lente divergente.

### Máquina fotográfica

- Sistema mais simples: caixa hermética à luz, uma **lente convergente** (objetiva), uma **abertura variável**, um **diafragma** que regula o tempo de exposição do filme, sendo que ambos os dispositivos permitem controlar a quantidade de luz que entra na máquina, e o **filme fotográfico** (largura de 35 mm);
- A distância focal da objetiva é fixa, em geral 50 mm, e a focalização da imagem no filme se dá pelo movimento da lente na direção do filme;
- Número  $f$  dá a razão entre a distância focal da objetiva ( $f$ ) e o diâmetro ( $D$ ) da sua abertura:

$$\text{número } f = \frac{f}{D}$$

- Uma objetiva grande angular tem distância focal menor (28 mm), gerando uma imagem menor no filme, porém tem um campo de visão maior que 45°;
- Uma objetiva telefoto tem distância focal maior (200 mm), gerando uma imagem maior no filme, porém possui um campo de visão menor que 45°.

### Lente de aumento

- É uma lente convergente, conhecida como lupa, e tem uma distância focal menor que o ponto próximo;
- Seu aumento angular  $m$  é a razão entre a distância do ponto próximo ( $x_{pp}$ ) e a distância focal ( $f$ ) da lente:

$$M_{oc} = \frac{\theta}{\theta'} = \frac{x_{pp}}{f}$$

### Microscópio composto

- Usado para olhar objetos muito pequenos a distâncias muito próximas;
- Forma mais simples: duas lentes convergentes, uma objetiva, do lado do objeto e uma ocular, próxima ao olho;
- O objeto fica a uma distância um pouco maior que a distância focal da objetiva e sua imagem é formada no ponto focal da ocular, que atua como uma lupa, aumentando a imagem final do objeto, que será invertida;
- O comprimento do tubo do microscópio, dado por  $l$  é a distância entre o segundo ponto focal da objetiva ( $f_{ob}$ ) e o primeiro ponto focal da ocular ( $f_{oc}$ ).
- O aumento do microscópio ( $M$ ) é dado pelo produto da ampliação lateral da objetiva ( $m_{ob}$ ) pelo aumento da ocular ( $m_{oc}$ ):

$$M = m_{ob}M_{oc} = -\frac{L}{f_{ob}} \frac{x_{pp}}{f_{oc}}$$

## Telescópio

- Usado para observar objetos muito distantes e em geral grandes;
- Na sua forma mais simples, um telescópio refrator é composto por duas lentes convergentes, uma objetiva e uma ocular, e a distância entre elas é igual a  $f_{ob} + f_{oc}$ ;
- A objetiva forma uma imagem real muito menor que o objeto, porém bem mais próxima e esta imagem é aumentada pela ocular, que funciona como lupa;
- O aumento de um telescópio ( $M$ ) é dado pela razão entre a distância focal da objetiva e da ocular:

$$M = -\frac{f_{ob}}{f_{oc}}$$

- A característica mais importante do telescópio é sua capacidade de recolher a luz, o que depende do tamanho de sua objetiva;
- Telescópios construídos com espelhos côncavos no lugar de lentes, são chamados de telescópios refletores e podem ter objetivas muito maiores, portanto podendo coletar mais luz e formando uma imagem mais brilhante do objeto.

## Problemas propostos com respostas

### Olho

1) Considere que a distância da córnea até a retina de um determinado olho é de 2,1 cm. Ache a distância focal efetiva deste olho para um objeto localizado: (a) no infinito; (b) a 10,0 m do olho; (c) a 25,0 cm do olho.

Resposta: (a) 2,1 cm; (b) 2,096 cm  $\approx$  2,1 cm; (c) 1,94 cm.

2) Uma pessoa só consegue focar objetos a distâncias menores que 50,0 cm. Como chamamos a este problema de visão? Supondo que esta pessoa resolva colocar uma lente de contato para corrigir o problema, qual seria o tipo de lente indicada? Calcule a distância focal e a potência desta lente. (Dica: precisamos supor um objeto no infinito

e encontrar uma lente que forme uma imagem virtual deste objeto a 50,0 cm do olho).

Resposta:  $f = -0,50$  cm;  $P = -2$  dioptrias.

**3)** Considere uma pessoa que só consiga focar objetos a distâncias maiores que 150,0 cm do olho. Qual o problema de visão desta pessoa? Para fazer a correção do problema, ela decide usar óculos, cuja lente deverá ficar a 2,0 cm do olho. Calcule a distância focal e a potência desta lente. (Dica: lembre que se a lente está a 2,0 cm do olho, a distância que a pessoa consegue focar objetos estará agora a 148 cm da lente, e a melhor distância para leitura estará agora a 23,0 cm da lente, em vez dos 25,0 cm para a lente de contato! Veja Exemplo 5.1)

Resposta:  $f = 27,2$  cm;  $P = 3,7$  dioptrias.

### Máquina Fotográfica

**4)** Uma câmara do tipo pin-hole foi usada para tirar a fotografia de um estudante com 1,8 m de altura. Ele se encontra a 2,7 m de distância da câmara. O filme é colocado a 10,0 cm atrás do orifício (pin-hole). Determine a altura da imagem produzida por esta câmara.

Resposta: 6,7 cm.

**5)** A objetiva de uma máquina fotográfica tem uma distância focal de 55 mm e uma velocidade  $f/1,8$  (número  $f$ ). Determinar o diâmetro da objetiva.

Resposta: 30,6 mm.

### Lente de aumento

**6)** Um joalheiro analisa um diamante usando uma lupa com distância focal de 5,0 cm. Em que posição deve estar o diamante para se ter uma imagem virtual no infinito? Qual a ampliação angular (ou aumento) da lupa, considerando um ponto-próximo normal (25,0 cm)?

Resposta:  $f = 5,0$  cm;  $M = 5$ .

**7)** a) Mostrar que a imagem final de uma lupa no ponto-próximo, e não no infinito, proporciona um aumento dado por

$$M = \frac{x_{pp}}{f} + 1$$

- b) Achar o aumento de uma lupa de 10 dioptrias para uma pessoa que tem o ponto próximo a 30 cm, se a imagem for observada neste ponto próximo.

Resposta: (b) 4.

- 8)** Um estudante observa uma formiga com uma lupa de 12 dioptrias. Qual o aumento angular que se pode esperar se (a) a imagem final estiver no infinito? (b) a imagem final estiver a 25,0 cm?

Resposta: (a) 3; (b) 4.

### Microscópio Composto

- 9)** Considere um microscópio composto cuja objetiva tem uma distância focal de 0,2 cm e cuja ocular tem uma distância focal de 4,0 cm. A imagem se forma a 16,0 cm do segundo ponto focal da objetiva. Qual será o aumento observado para uma pessoa cujo ponto-próximo é de 25,0 cm?

Resposta: 500.

- 10)** Um microscópio composto tem sua objetiva e ocular, separadas por 16,0 cm. (a) Se a potência da objetiva for de 80 dioptrias e da ocular de 40 dioptrias, onde o objeto deve estar localizado para produzir uma imagem virtual final no infinito? (b) Qual o aumento observado?

Resposta:  $x_o(ob) = 1,38$  cm;  $M = 98$ .

- 11)** Você quer montar um microscópio composto e dispõe para isto de um tubo de 30,0 cm de comprimento e duas lentes convergentes com potência de 20 dioptrias. Vamos supor que você coloque as duas lentes nas extremidades deste tubo. (a) Qual seria o comprimento do tubo ( $L$ ) para o microscópio? (b) Qual a ampliação lateral para a objetiva? (c) Qual o aumento total para o microscópio? (d) A que distância da objetiva deve ficar o objeto?

Resposta: (a) 20,0 cm; (b) 4; (c) 20; (d) 6,25 cm.

### Telescópio

- 12)** Considere um telescópio cuja objetiva tem uma distância focal de 15,0 cm. A que distância da objetiva devemos colocar uma ocular

com distância focal de 0,5 cm para formar uma imagem no infinito? Qual o aumento deste telescópio?

Resposta: 15,5 cm;  $M = 30$ .

**13)** Sabe-se que a lua subtende um ângulo de aproximadamente 0,009 rad. Usando um telescópio com uma objetiva com distância focal de 200 cm e uma ocular com distância focal de 5 cm para observá-la, determine: (a) o diâmetro da imagem formada pela objetiva; (b) o ângulo subtendido pela imagem final no infinito; (c) o aumento do telescópio.

Resposta: (a) 1,8 cm; (b) 0,36 rad; (c) 40.

## Referências

TIPLER, Paul A. **Física para Cientistas e Engenheiros**. 4. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física 4** - Ótica e Física Moderna. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

SERWAY, Raymond. **Física 3** - Eletricidade, Magnetismo e Ótica. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

SERWAY, Raymond; JEWETT Jr, John W. **Princípios de Física** - Óptica e Física Moderna. 3. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning.

## 6 Óptica física







## 6 Óptica física

Neste capítulo espera-se que você aprenda os conceitos de **interferência** e **difração**, e possa aplicá-los para entender, por exemplo: as cores observadas em uma mancha de óleo sobre o asfalto e em bolhas de sabão; a iridiscência azul-esverdeada vista em diversos organismos, como nas asas da borboleta **Morpho**, nas penas de um pavão e em algumas conchas; a separação de cores observada em um CD ou DVD, quando incide luz sobre eles; os filtros usados em máquinas fotográficas; os filmes anti-reflexão usados em óculos. Estes são apenas alguns fenômenos que podem ser explicados pela **Óptica Física**, onde a propriedade dominante da luz é justamente sua natureza ondulatória!



Figura 6.1 – Bolhas de sabão.



Figura 6.2 – Pavão.

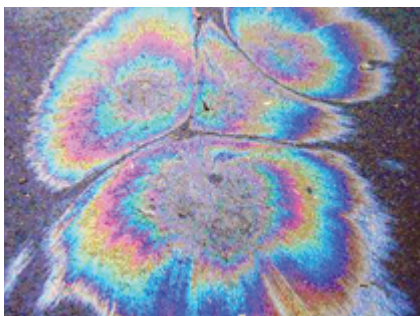


Figura 6.3 – Mancha de óleo sobre asfalto.



Figura 6.4 – Borboleta Morpho.

## 6.1 Introdução

Vimos no capítulo 4 (Óptica Geométrica), que quando a luz interage com objetos de dimensões ( $d$ ) bem maiores do que o seu comprimento de onda ( $\lambda$ ), ela pode ser tratada como um fluxo de partículas, onde se traçam raios para indicar o caminho da luz através do espaço. Mas o que acontece quando a dimensão dos obstáculos for agora da ordem do comprimento de onda da luz? Vamos ver que neste caso o fenômeno de **difração** começa a ser observado e para entender esta propriedade da luz, devemos tratá-la como uma onda. A teoria ondulatória da luz desenvolvida por Christian Huygens (1690) tem um papel fundamental no entendimento da difração assim como da interferência da luz. A grande maioria das experiências mais fundamentais, que ajudaram a explicar a difração da luz, foram realizadas entre o fim do século XVII e começo do século XIX, pelo italiano Francesco Grimaldi, pelo francês Augustin Fresnel, pelo inglês Thomas Young, entre tantos outros.

Thomas Young e Augustin Jean Fresnel (1801) aprofundaram a teoria ondulatória de Huygens. Young com seu famoso experimento de fendas duplas, mostrou que duas ondas podem se sobrepor, o que chamou de princípio de interferência. Esta interferência de ondas pode formar um padrão composto de franjas coloridas. Utilizando este experimento, Young foi capaz de determinar o comprimento de onda de diversas cores. Fresnel conseguiu sintetizar os conceitos de interferência e difração, o que permitiu explicar o padrão de interferência observado quando a luz incide num obstáculo.

## 6.2 Princípio de Huygens

O princípio de Huygens tem este nome em homenagem ao físico holandês Christian Huygens (1629-1695), um contemporâneo de Newton e que, em oposição a este, defendia uma teoria corpuscular da luz, era um grande defensor da idéia que a luz era uma onda. Huygens introduziu um princípio em sua teoria da luz muito útil, pois permite calcular a posição da frente da onda de luz num dado tempo se soubermos onde ela se encontrava num tempo anterior. O princípio pode ser assim formulado:

Todo ponto de uma frente de onda pode ser visto como a fonte de pequeninas ondas, que se propagam no mesmo sentido da frente e com a velocidade desta. A nova frente de onda é a curva “envelope” (ou seja, que envolve) das pequenas frentes de onda. Em outras palavras, a nova frente é a curva tangente às pequenas frentes de onda das diminutas fontes.

O Princípio de Huygens não é restrito a ondas de luz, podendo ser também aplicado a qualquer tipo de onda. Podemos visualizar este princípio na figura 6.5, neste caso para uma onda sonora, onde o alto falante emite um som que se propaga na forma de ondas circulares. As frentes de onda são os círculos cujo centro se encontra no alto-falante.

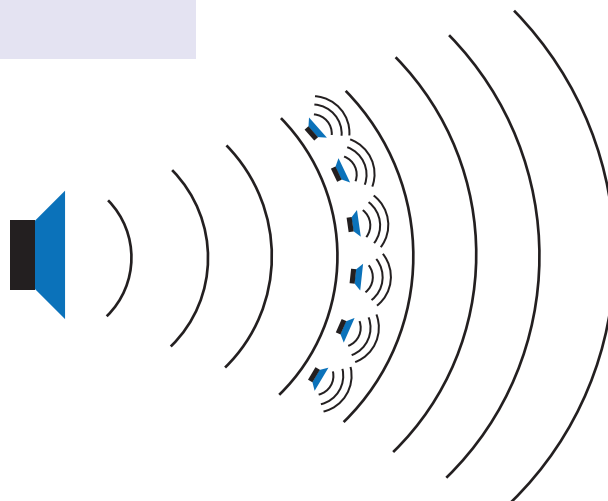


Figura 6.5 – Princípio de Huygens no caso de uma onda sonora.

De acordo com o princípio podemos imaginar que em cada ponto da frente de onda existem pequenos alto-falantes que emitem, por sua vez, ondas. A curva tangente a todas as pequenas frentes de onda é a frente original. O princípio se aplica a qualquer onda, independente de sua natureza.

O Princípio de Huygens é muito útil quando queremos estudar as propriedades que ondas têm de “contornar” ou de se “quebrar” quando encontram um obstáculo. Esta é uma propriedade típica de ondas, que às diferenciam de partículas: a difração (que tem origem na palavra latina para “quebrar”). A figura 6.6 mostra como podemos entender a difração através das idéias de Huygens.

Na figura 6.7 vemos a difração de uma onda na água quando esta passa por um mole com duas aberturas (o mesmo valeria se pudéssemos ver as cristas e vales da onda de luz, o princípio é exatamente análogo).

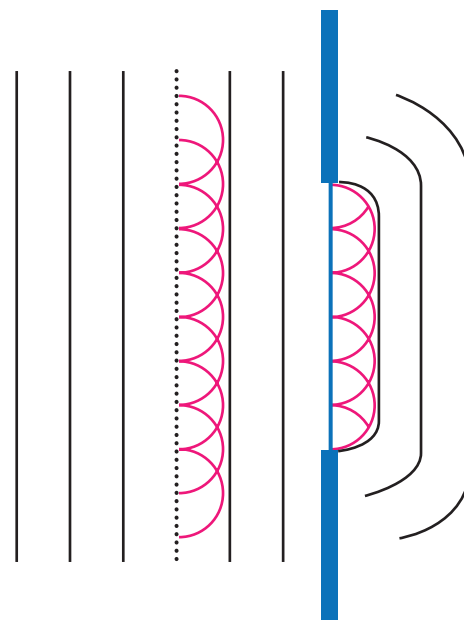


Figura 6.6 – O princípio de Huygens e a difração.

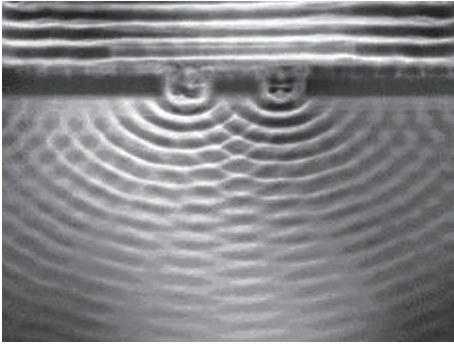


Figura 6.7 – O caso da “difração” de uma onda na água.

Vamos supor que na parte debaixo da figura 6.7 temos uma tela onde a luz incidisse, e caso esta se comportasse como partícula, veríamos duas imagens que teriam a forma exata das fendas. Porém como a onda difrata, a imagem formada na tela será borrada nos cantos. Nessa mesma figura 6.7 podemos ver claramente outro importante fenômeno: a interferência das ondas. Na interferência as ondas se somam podendo resultar em pontos de maior ou menor intensidade. No caso da luz, isto corresponde a regiões claras e escuras. Como já vimos na secção 3.6, a intensidade da luz é proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico e cada onda pode ser representada por um campo elétrico. Vamos considerar, para tornar nossos cálculos mais simples, que os campos elétricos individuais, isto é, que representam cada fonte, têm a mesma amplitude, o que significa basicamente que vamos trabalhar com ondas com a mesma intensidade. Além de facilitar os cálculos, vamos conseguir visualizar melhor o contraste na interferência (máximos e mínimos), ao sobrepormos estas ondas.

### 6.3 Interferência

Em 1801, o físico inglês Thomas Young (1773-1829) descobriu, para a luz, o fenômeno já conhecido para ondas em meios materiais: a interferência. Este fenômeno está bem ilustrado para o caso de ondas na superfície da água na figura 6.7. Apenas ondas são capazes de interferir e o fato de Young mostrar que isso valia também para a luz foi mais um forte indício para a conjectura de que a luz realmente se comportava como uma onda.

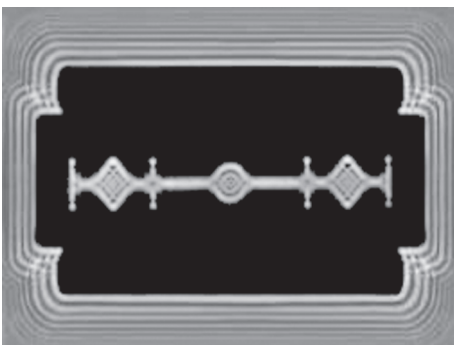


Figura 6.8 – A difração da luz por uma lâmina de barbear. As zonas mais claras e escuras que observamos devem-se à interferência dos raios de luz difratados pelas bordas da lâmina.

A difração é um conceito estreitamente relacionado ao da interferência, como mostram as figuras 6.7 e 6.8. Ao passar por um objeto, a onda o contorna. Isso faz com que a onda possa ser observada atrás de obstáculos e nos permite, por exemplo, ouvir um som mesmo que entre nós e a fonte sonora haja um obstáculo. O mesmo ocorre com a luz se os obstáculos forem da ordem do comprimento de onda da luz. Incidindo um feixe diretamente sobre um objeto pequeno, é possível detectar na região da sombra um ponto luminoso, que resulta da combinação dos raios de luz que difrataram pelas laterais do obstáculo. Um outro belo exemplo de difração pode ser visto na figura 6.8, onde as ondas que contornam a lâmina interferem construtiva ou destrutivamente, formando padrões que seguem o contorno da mesma.

A idéia por trás da interferência é simples. O que ocorre se duas ondas interagirem, ou seja, sofrerem superposição num mesmo ponto do espaço? Para visualizar isto, podemos olhar a figura 6.7, onde temos duas ondas, originadas dos dois orifícios e que se superpõe em diversos pontos ao longo da sua direção de propagação, gerando o que chamamos de um padrão de interferência. Este padrão e sua visualização dependem de uma característica da fonte, que chamamos de coerência. Podemos ter fontes coerentes e fontes não coerentes. Somente fontes coerentes resultam num padrão de franjas de interferência. Para entender melhor isto, precisamos definir o que é coerência!

### 6.3.1 Conceito de coerência

A coerência é um importante conceito da Física em geral e da Óptica em particular. Disso resulta que ele também é um tema bastante extenso e por isso vamos nos restringir aqui apenas às idéias mais importantes para o contexto do presente capítulo. Colocando de maneira simples, *coerência é a medida da correlação entre as fases da onda medidas em diferentes pontos desta onda.*

Para se ter uma visão simples do que é coerência, imagine duas bóias presas no fundo de um lago e flutuando para cima e para baixo com as ondas. Vamos supor que a fonte destas ondas na água seja uma única pedra jogada no lago inicialmente sem ondas. Deste modo iríamos encontrar uma perfeita correlação entre os movimentos das duas bóias – elas podem não estar exatamente em fase (isto é, uma pode estar no topo da onda enquanto a outra se encontra na parte de baixo da mesma), mas a fase relativa entre as posições das duas bóias iria permanecer constante no tempo. Neste caso nós dizemos que a **fonte é perfeitamente coerente**. Agora, imagine que estas ondas no lago são originadas por gotas de chuva. Como as gotas de chuva atingem o lago em tempos aleatórios e em posições aleatórias, nós não deveríamos esperar que a fase da onda em uma posição estivesse correlacionada com a fase da onda em outra posição, já que a onda em cada ponto seria a superposição de ondas originadas por diferentes fontes (as diversas gotas de chuva) – as duas bóias iriam subir e descer ao sabor das ondas, aleatoriamente, sem nenhuma relação aparente entre seus movimentos. Neste caso dizemos que a **fonte é bastante incoerente**.

Transportemos a discussão para o caso da luz. A luz natural ou a luz de uma lâmpada de filamento incandescente não é coerente: o processo de emissão de luz (um processo em nível atômico) ocorre através de transições aleatórias de elétrons de níveis de energia maior para níveis de energia menor. Esta diferença de energia se manifesta

na emissão de luz. Cada um destes “pacotes” de luz emitidos pelos átomos do filamento da lâmpada, é emitido com intervalos de tempo aleatórios e não conseguem portanto, manter a coerência (como as gotas de chuva no lago).

A interferência entre as diversas ondas produzidas assim, ainda ocorre, mas como estas ondas não mantêm uma diferença de fase constante entre elas, portanto não são coerentes, as interferências destrutivas e construtivas ocorrem em pontos do espaço que mudam rapidamente com o tempo: hora aqui, hora lá, num tempo muito curto, cerca de  $10^{-8}$  s, que é o tempo que os elétrons levam para passar de um nível para outro de energia e emitirem a luz.

Nossos olhos não conseguem ver assim as regiões claras e escuras, pois não conseguimos enxergar variações de intensidade num tempo tão pequeno, e o que vemos é uma média no tempo de todas estas intensidades máximas e mínimas e que vão resultar numa iluminação uniforme. Mas podemos ter **fontes de luz coerentes**, que na sua definição mais geral são **fontes pontuais e monocromáticas** (compare com a pedra no lago, temos apenas um comprimento de onda e a origem da onda é num ponto apenas). Um exemplo típico de fonte de luz coerente é o laser. Fazendo incidir um laser em duas fendas, por exemplo, podemos obter um belo padrão de interferência, como o mostrado na figura 6.9 abaixo.

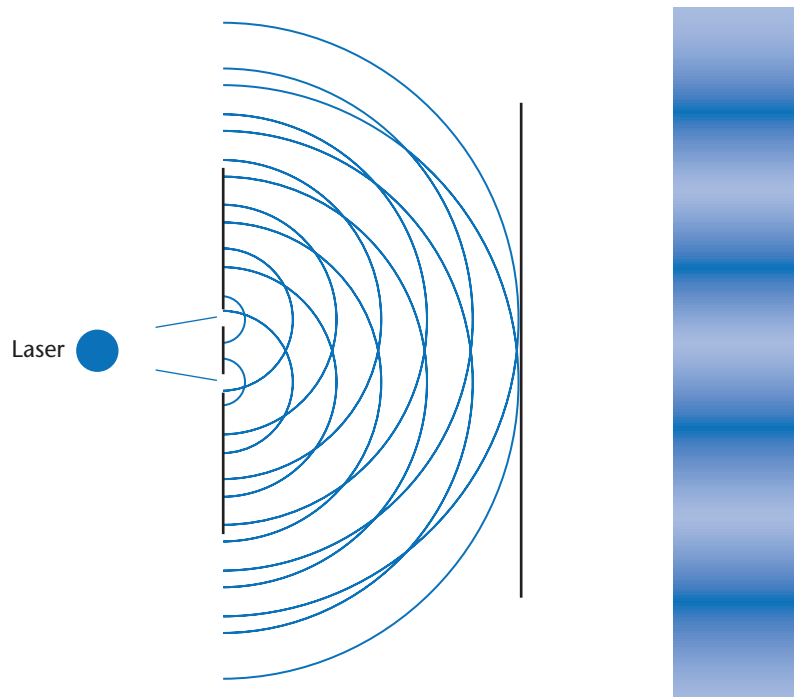


Figura 6.9 – Padrão de interferência observado para duas fendas.

Vamos ver na próxima secção que Thomas Young em 1801 conseguiu produzir um padrão de interferência utilizando a luz do sol, que é uma fonte não coerente. Isto mostra que podemos transformar uma fonte não coerente em uma fonte mais coerente. Foi dito que uma fonte pontual é coerente, podemos, portanto, aumentar a coerência de uma fonte se fizermos esta luz passar por um pequeno orifício – a grosso modo, é como se eliminássemos diversas ondas incoerentes e deixássemos apenas uma, afinal toda onda é coerente com relação a si mesma. E foi exatamente isto que Young fez para poder observar as franjas de interferência ao superpor duas ondas.

### 6.3.2 Experimento da fenda dupla de Young

Vamos então discutir com mais detalhes o experimento de Young. Nele, o cientista fez incidir um feixe de luz sobre uma fenda simples, e após sobre uma fenda dupla, projetando um padrão de interferência num anteparo à frente das duas fendas, como é mostrado no desenho da figura 6.10.

A primeira fenda torna a fonte mais coerente e permite que apenas uma frente de onda incida nas duas fendas à frente.

Estas duas fendas “produzem” duas ondas que vão se superpor em diferentes pontos no anteparo. Esta superposição, que chamamos de interferência, produzirá um padrão de intensidade no anteparo: franjas de interferência onde temos pontos com um máximo de intensidade (claros) intercalados com pontos com um mínimo de intensidade (escuros).

A pergunta é: quais pontos da tela ficarão escuros, e quais ficarão claros? A resposta é relativamente direta, e com um pouco de matemática e argumentação física podemos determinar exatamente os pontos de maior ou menor intensidade luminosa. Para isto basta calcular a diferença de caminho entre o feixe que passa por uma fenda ( $r_1$ ) e o feixe que passa pela outra ( $r_2$ ). Veja a figura 6.11 abaixo. A diferença de caminho entre os feixes ( $b = \Delta r = r_2 - r_1$ ) depende claramente do ponto na tela onde nos encontramos, definido por um ângulo  $\theta$ : para atingir o ponto exatamente simétrico, no meio da tela, ambos os feixes terão que percorrer a mesma distância até chegar lá, ou seja,  $\theta = 0$ , o que resulta em  $\Delta r = 0$ . Para um ponto acima (ou abaixo) do meio do anteparo, o feixe que passou pela fenda de cima, por exemplo, terá que percorrer um caminho menor, e, portanto,  $\Delta r \neq 0$ . Mas o que isto significa? Em se tratando de uma onda, um caminho mais

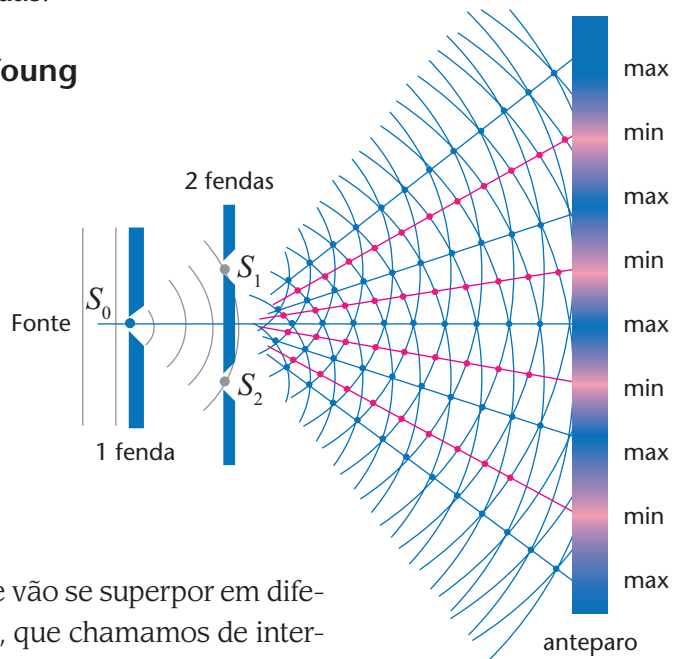


Figura 6.10: Experimento de Young.

longo implica que uma onda terá oscilado mais e chegará ao mesmo local que a outra com uma fase diferente, ou se pensarmos que este percurso pode ser medido em comprimentos de onda, significa que teremos mais comprimentos de onda naquele percurso.

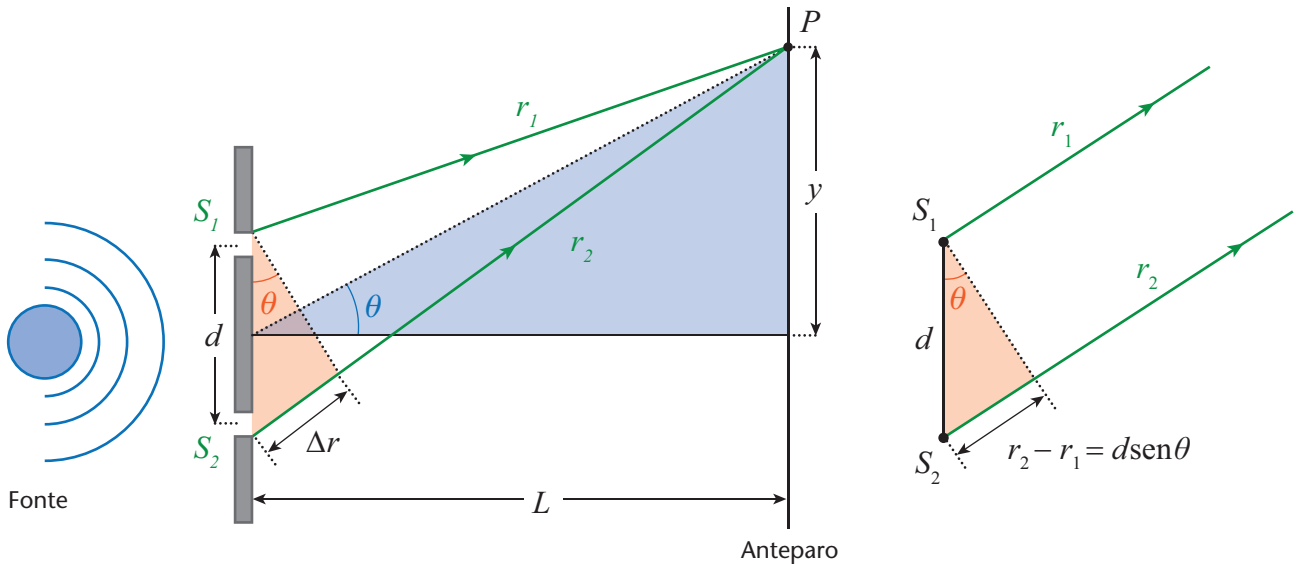


Figura 6.11 – Geometria do experimento da fenda dupla de Young.

Na figura 6.11 podemos ver que a diferença de caminho depende não só da posição do ponto  $P$  (determinado pelo ângulo  $\theta$ ) mas também da separação  $d$  entre as fendas. Vamos determinar então a posição de máximos e mínimos de interferência considerando que o anteparo está a uma distância  $L$  das fendas. É importante chamar a atenção de que  $L \gg d$ , neste caso podemos considerar que  $r_1$  e  $r_2$  são paralelos, o que facilita nossos cálculos. Vamos determinar os máximos ou mínimos localizados no anteparo num ponto  $P$ , localizado na altura  $y$  e que faz um ângulo  $\theta$  em relação à horizontal, como mostrado na figura 6.11. O feixe que chega a  $P$  vindo da fenda  $S_1$  percorre uma distância  $r_1$ . Esta distância é um pouco menor que a distância  $r_2$  percorrida pelo feixe vindo de  $S_2$ . Considerando que estes dois feixes são paralelos, como mostrado no detalhe a direita da figura 6.11, a diferença de caminho  $\Delta r$  entre estes dois feixes é dada pelo valor da base deste triângulo retângulo. Note que o ângulo  $\theta$  deste triângulo é o mesmo que define a posição do ponto  $P$ . Esta relação é facilmente determinada se lembrarmos as relações de semelhança para triângulos retângulos (veja os dois triângulos preenchidos na figura 6.11).

$$\Delta r = r_2 - r_1 = d \text{sen} \theta \quad (6.1)$$

Agora, se esta diferença de caminho for exatamente igual a um múltiplo de comprimentos de onda (ou seja, se for igual a  $0\lambda, 1\lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$ ) as



duas ondas chegarão “em fase” e se somarão construtivamente. Se a diferença de caminho for exatamente igual a um múltiplo semi-inteiro de  $\lambda$  (ou seja,  $\lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, \dots$ ) então a crista de uma onda encontrar-se-á com o vale da outra e as duas interferirão destrutivamente. Em outras palavras, temos:

$$d \operatorname{sen} \theta = m \lambda \quad \text{com } m = 0, 1, 2, \dots \quad (6.2)$$

(interferência construtiva - máximos)

Para o máximo central  $m = 0$ , para o segundo máximo  $m = 1$  e assim por diante.

$$d \operatorname{sen} \theta = \left( m + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad \text{com } m = 0, 1, 2, \dots \quad (6.3)$$

(interferência destrutiva - mínimos)

Para o primeiro mínimo  $m = 0$ , para o segundo mínimo  $m = 1$  e assim por diante.

Outra relação importante é a relação entre a diferença de caminho em comprimentos de onda e a diferença de fase das duas ondas. Podemos ver facilmente que quando a diferença de fase ( $\varphi$ ) for igual a  $0, 2\pi, 4\pi, \dots$  teremos uma interferência construtiva (as duas cristas das ondas se somam), enquanto que se a diferença de fase for  $\pi, 3\pi, \dots$  teremos uma interferência destrutiva, pois a crista de uma onda encontra o vale da outra. Podemos escrever então a seguinte relação:

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta r}{\lambda} \quad (6.4)$$

Substituindo nesta expressão a equação (6.1), obtemos:

$$\varphi = \frac{2\pi d \operatorname{sen} \theta}{\lambda} \quad (6.5)$$

Agora, substituindo:

- para máximos,  $\varphi = 2m\pi$ , temos:

$$\frac{2m\pi}{2\pi} = \frac{d \operatorname{sen} \theta}{\lambda} \Rightarrow d \operatorname{sen} \theta = m \lambda,$$

- para mínimos,  $\varphi = (2m + 1)\pi$ , temos:

$$\frac{(2m+1)\pi}{2\pi} = \frac{d \operatorname{sen} \theta}{\lambda} \Rightarrow d \operatorname{sen} \theta = \left( m + \frac{1}{2} \right) \lambda,$$

com  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Estas expressões são as mesmas já deduzidas anteriormente (6.2) e (6.3) para máximos e mínimos de interferência!

**Exemplo 6.1:** Em uma experiência de Young, a distância entre as fendas é 100 vezes o valor do comprimento de onda da luz usada para iluminá-las. Qual é a separação angular, em radianos, entre a franja brilhante do centro e a sua adjacente?

**Solução:** A franja central, tem  $m = 0$  e a sua adjacente,  $m = 1$ , portanto, usando a equação para máximos de interferência (6.2), onde  $d = 100\lambda$  temos:

$$d \sin\theta = m\lambda \Rightarrow \sin\theta = \frac{m\lambda}{d} = \frac{\lambda}{100\lambda} = \frac{1}{100} = 0,01 \Rightarrow \theta \cong 0,01 \text{ rad}$$

Vamos analisar agora o padrão de intensidades, usando o método de fasores, já discutido com detalhes na secção 1.7. Para isto vamos lembrar também um conceito muito importante, discutido na secção 3.6, o de que a *intensidade de uma onda é proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico*.

Considerando então duas ondas, cada uma se propagando através de uma fenda e representadas por um campo elétrico, respectivamente,  $E_1$  e  $E_2$ . Estes campos se propagam com a mesma amplitude ( $E_0$ ) e, portanto, tem a mesma intensidade [ $I_0 \cong (E_0)^2$ ], porém apresentam uma diferença de fase entre si de  $\phi$ . Podemos representar estas ondas como:

$$E_1 = E_0 \sin\omega t \quad ; \quad E_2 = E_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$I_1 = I_2 = (E_0)^2 = I_0$$

O campo elétrico da onda resultante para um ângulo  $\theta$  (ponto  $P$ ) no anteparo será dada por  $E_R = E_1 + E_2 = E_\theta \sin(\omega t + \beta)$ , onde  $E_\theta$  é a amplitude do campo elétrico resultante, portanto a intensidade resultante será dada por  $I_\theta = (E_\theta)^2$  e  $\beta$  seria a diferença de fase do campo resultante. Para visualizar melhor esta situação é interessante fazer a representação destes campos elétricos usando fasores, já discutidos nas secções 1.4 e 1.7 como vetores que giram em torno de um ponto fixo. Na figura 6.12 é mostrado um diagrama de fasores.

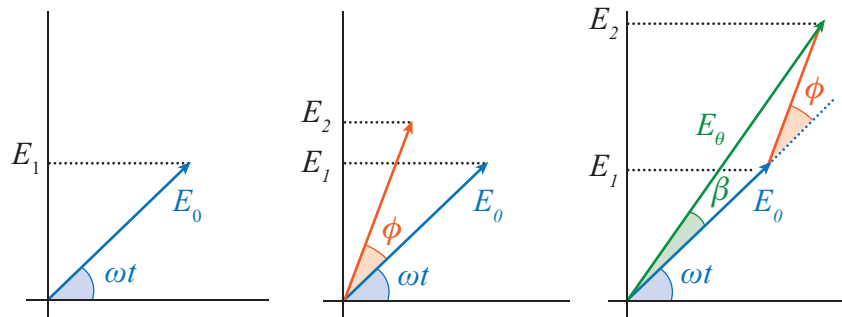


Figura 6.12 – Diagrama de fasores para cálculo de intensidade no experimento de Young.

Analisando a figura 6.12, podemos tirar algumas relações:

$$\varphi = 2\beta \ ; \ \cos \beta = \frac{E_\theta/2}{E_0} \Rightarrow E_\theta = 2E_0 \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$I_\theta = (E_\theta)^2 = \left(2E_0 \cos \frac{\varphi}{2}\right)^2 = 4(E_0)^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = 4I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$I_\theta = 4I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \quad (6.6)$$

Onde  $I_\theta$  é a expressão para a intensidade resultante e  $\varphi$  é dado pela expressão (6.5). Analisando a expressão (6.6) para máximos e mínimos, obtemos

$$\text{Máximos: } \varphi = 2m\pi \Rightarrow I_\theta = 4I_0 \cos^2 \frac{2m\pi}{2} = 4I_0 \cos^2(m\pi) = 4I_0$$

$$\text{Mínimos: } \varphi = (2m+1)\pi \Rightarrow I_\theta = 4I_0 \cos^2 \frac{(2m+1)\pi}{2} = 4I_0 \cos^2\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi = 0$$

para  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . A representação gráfica da expressão (6.6) é mostrada na figura 6.13.

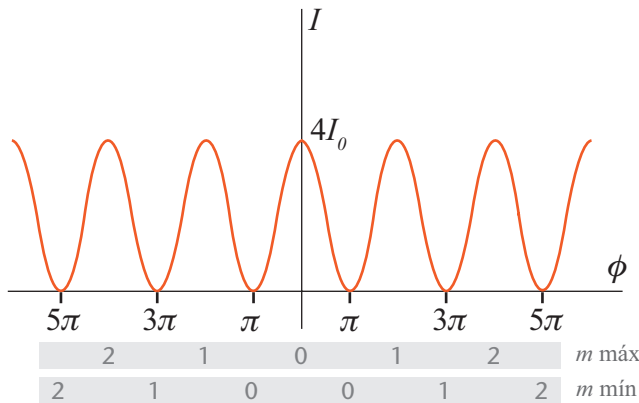


Figura 6.13 – Curva definida pela expressão (6.6) que determina a intensidade para as franjas de interferência num experimento de Young.

**Pergunta:** Existe um número finito ou infinito de pontos de interferência construtiva? Eles têm todos a mesma distância entre si?

**Resposta:** Somos tentados, olhando a equação que nos dá os ângulos  $\theta$  de máximos, a inferirmos que  $m$  pode ir de 0 até infinito. Porém do lado esquerdo da equação não podemos nos esquecer que temos uma função seno, cujo valor não pode exceder 1. Assim, o valor máximo de  $m$  é dado pela número inteiro menor ou igual à razão  $d/\lambda$ . Para valores pequenos de  $\theta$  porém a distância entre máximos (ou mínimos) adja-

centes é constante, como podemos mostrar com um simples cálculo matemático. De acordo com a figura 6.11, podemos escrever a seguinte expressão para a posição de um máximo de ordem  $m$  no anteparo

$$\operatorname{tg}\theta_m = \frac{y_m}{L} \quad (6.7)$$

Para um máximo adjacente, podemos escrever:

$$\operatorname{tg}\theta_{m+1} = \frac{y_{m+1}}{L}$$

Usando a expressão (6.2) e considerando  $\theta$  pequeno temos que:  $\operatorname{sen}\theta \cong \operatorname{tg}\theta \cong \theta$ , portanto

$$y_m = L\theta_m = L \frac{m\lambda}{d} \quad (6.8)$$

E para o máximo adjacente podemos escrever:

$$y_{m+1} = L\theta_{m+1} = L \frac{(m+1)\lambda}{d}$$

E a distância entre dois máximos adjacentes no anteparo, será dada por:

$$\begin{aligned} \Delta y = y_{m+1} - y_m &= L \frac{(m+1)\lambda}{d} - L \frac{m\lambda}{d} = \frac{L\lambda}{d} \\ \Delta y &= \frac{L\lambda}{d} \end{aligned} \quad (6.9)$$

**Observação:** você pode fazer o mesmo cálculo considerando a distância entre mínimos adjacentes. Tente e veja o que ocorre... O resultado deve ser exatamente o mesmo! Ou seja a distância entre franjas brilhantes ou escuras, adjacentes, é constante!

**Exemplo 6.2:** Num experimento de Young as duas fendas estão separadas por 0,04 mm, e o anteparo está localizado a 2 m de distância das fendas. A terceira franja brilhante está localizada a uma distância de 8,3 cm, em relação a franja brilhante central.

- a) Determine o comprimento de onda da luz incidente.
- b) Em que posição estará no anteparo a segunda franja escura?

**Solução:**

- a) Para a terceira franja brilhante,  $m = 3$ , podemos determinar  $\lambda$  a partir de equação (6.8), onde  $L = 2$  m,  $d = 0,04$  mm e  $y_m = 8,3$  cm. Tomando o cuidado de passar tudo para metros, temos:

$$y_m = L \frac{m\lambda}{d} \Rightarrow \lambda = \frac{d y_m}{mL} = \frac{0,04 \times 10^{-3} \times 8,3 \times 10^{-2}}{3 \times 2} =$$

$$= 5,53 \times 10^{-7} \text{ m} = 553 \text{ nm}$$

- b) Para determinar a posição da segunda franja escura ( $y_m$ ), devemos usar o comprimento de onda determinado em (a) e substituir os valores na equação (6.8) para mínimos:

$$y_m = L \frac{(m + 1/2)\lambda}{d}$$

onde a segunda franja é determinada para  $m = 1$  (começamos a contar de  $m = 0$ ), que seria o primeiro mínimo. Assim temos:

$$y_m = L \frac{(m + 1/2)\lambda}{d} = 2 \times \frac{(1 + 1/2)}{0,04 \times 10^{-3}} \times 553 \times 10^{-9} =$$

$$= 4,15 \times 10^{-2} \text{ m}$$

**Perguntas:** *O que acontece com os padrões de interferência quando:*

- aumentamos o comprimento de onda da fonte, por exemplo, de 500 nm para 700 nm, deixando  $L$  e  $d$  constantes?
- aumentamos a separação  $d$  entre as fendas e deixamos  $L$  e  $\lambda$  constantes?
- mantemos  $d$  e  $\lambda$  constantes e mexemos na distância  $L$  do anteparo?

**Respostas:**

- O padrão de interferência se torna mais largo, ou seja, os máximos adjacentes ficam mais separados,  $\Delta y$  é maior.
- As franjas se aproximam,  $\Delta y$  fica menor.
- A separação entre as franjas, depende apenas da distância  $L$  entre as fendas e o anteparo, e portanto quanto maior  $L$ , mais separadas estarão as franjas, ou seja, maior  $\Delta y$ .

Estas questões são facilmente respondidas analisando a expressão (6.9) acima!

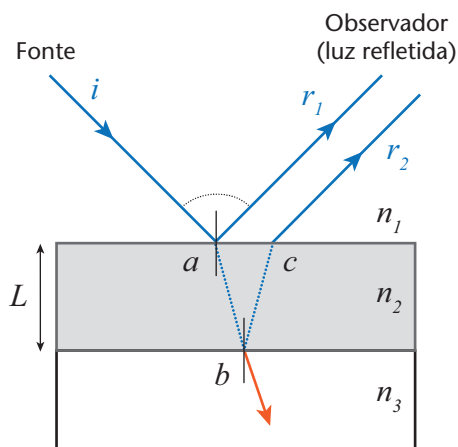


Figura 6.14 – A interferência em filmes finos.

### 6.3.3 Interferência em películas finas

Um dos exemplos mais fascinantes de interferência se dá quando a luz incide sobre uma película delgada. Estas películas são chamadas também de filmes finos e “fino” ou “delgado”, aqui, significa que sua espessura é da ordem dos comprimentos de onda incidentes. Quando olhamos para a luz refletida numa película de sabão ou sobre uma película de óleo na água, o padrão de cores que observamos é resultado da interferência entre a onda que se reflete na parte superior da película com a onda que se reflete na parte inferior. A interferência é também responsável pelas cores “metalizadas” que podemos observar nas asas de muitas borboletas. Mas como é que isto surge? Para entender esta questão, vamos analisar a figura 6.14 e considerar que temos um filme com

espessura  $L$ , com índice de refração  $n_2$  depositado sobre um substrato com índice de refração  $n_3$ . A luz incidente está num meio com índice de refração  $n_1$ . Esta onda incide sobre a superfície externa do filme e é refletida e refratada na interface  $n_1/n_2$ , ponto  $a$  no desenho. Esta onda refratada, por sua vez, é refletida e também refratada, na superfície interna do filme, cuja interface é  $n_2/n_3$  (ponto  $b$ ). A onda refletida no ponto  $b$  por sua vez, é transmitida (refratada) para fora do filme, no ponto  $c$ . Vamos analisar então, a interferência das ondas refletidas nas duas superfícies: externa ( $r_1$ ) e interna ( $r_2$ ). Esta análise será feita considerando **incidência normal** para facilitar os cálculos, embora no nosso desenho, elas estejam em ângulo para melhor visualização.

Vamos considerar que  $n_3 > n_2 > n_1$  e que a luz incidente tem comprimento de onda  $\lambda$ . Há uma seqüência grande de reflexões e refrações, mas para o nosso cálculo só nos interessa as ondas  $r_1$  e  $r_2$  (as sucessivas reflexões e refrações têm uma intensidade muito pequena para que tenhamos que nos preocupar com elas). O que devemos ter em mente na verdade é que a segunda onda, representada por  $r_2$  originou-se da refração no ponto  $a$  da onda incidente, portanto a diferença de caminho entre a onda  $r_1$  e a onda  $r_2$ , no caso de incidência normal será  $2L$ , isto é:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = 2L \quad (6.10)$$

É importante notar que a diferença de caminho entre as duas ondas ocorre dentro do filme e que o  $\lambda$  da onda incidente muda dentro do filme, isto é  $\lambda n = \lambda/n$ . A diferença de caminho  $\Delta r$  pode ser expressa como:

$$\Delta r = 2L = m\lambda_n, \text{ onde a onda } r_2 \text{ não inverte a sua fase } (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.11)$$

$$\Delta r = 2L = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_n, \text{ onde a onda } r_2 \text{ inverte a sua fase } (m = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (6.12)$$

Dependendo da espessura do filme, portanto podemos, ou não, mudar a fase de  $r_2$  em relação à  $r_1$  e produzir interferência construtiva ou destrutiva. Entretanto, no caso de reflexão de ondas temos uma complicação em toda esta nossa discussão: quando um feixe de luz reflete em um meio cujo índice de refração é maior que o índice de refração do meio incidente, ocorre uma mudança de fase nesta onda, de  $\pi$  rad, ou seja, neste caso, a onda simplesmente inverte a fase. Quando a reflexão ocorre num meio com índice de refração menor que o índice de refração do meio da onda incidente, não ocorre inversão da fase, a onda permanece com a mesma fase. Ainda, sempre que uma onda é refratada, ela nunca muda de fase.

Então para sabermos se a interferência observada é construtiva ou destrutiva, temos que fazer duas análises:

- 1) Se a onda inverte a sua fase na reflexão (pontos  $a$  e  $b$  no desenho);
- 2) Se a diferença de caminho provoca a inversão da fase da onda (ocorre quando  $2L$  for igual múltiplos ímpares de  $\lambda/2$ )

Na primeira análise observamos só a relação entre os índices de refração dos meios envolvidos na reflexão e avaliamos a troca de fase das ondas refletidas. Na segunda análise, que só deve ser feita depois da primeira análise, avaliamos a diferença de percurso e se queremos ou não mudar a fase da onda, simplesmente aplicando as relações (6.11) e (6.12) conforme a conveniência.

Parece complicado, mas vamos fazer um exemplo para deixar isto mais claro! Vamos analisar a figura 6.14, fazendo uma nova figura, a 6.15, aplicando os conceitos aprendidos e avaliar quando teremos interferência construtiva e quando ela será destrutiva. Lembre que neste caso  $n_3 > n_2 > n_1$ .

- 1) Mudança de fase devido à reflexão:

Ponto  $a$ :

- reflexão:  $r_1$  inverte a fase ( $n_2 > n_1$ )
- refração: não muda de fase ( $r_2$ )

Ponto  $b$ :

- reflexão: inverte a fase ( $r_2$ ) ( $n_3 > n_2$ )

Ponto  $c$ :

- refração: não muda de fase ( $r_2$ )

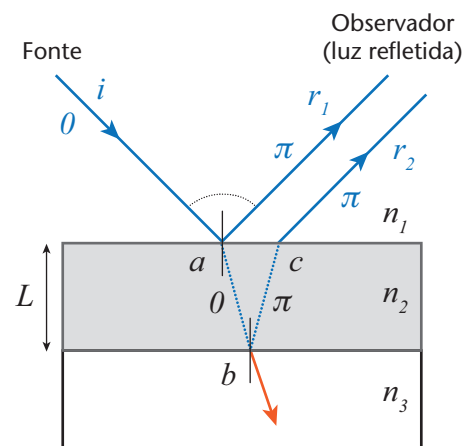


Figura 6.15 – Mudança de fase das ondas só devido à reflexão e refração:  $0$  significa que não muda a fase e  $\pi$  significa que mudou a fase. Esta figura poderia representar um filme de óleo ( $n_2$ ) sobre água ( $n_3$ ), e a onda incidente estaria no ar ( $n_1$ ).

Podemos concluir desta primeira análise que as ondas  $r_1$  e  $r_2$  refletidas têm a mesma fase e se considerássemos uma película com  $L \ll \lambda$ , as duas sofreriam uma interferência construtiva e o observador veria toda a película clara! Mas agora, se o filme tem certa espessura, podemos modificar esta interferência, fazendo a segunda análise:

2) mudança de fase devido à diferença de caminho  $\Delta r$ :

- para manter a **interferência construtiva** não podemos mudar a fase de  $r_2$  e para isto devemos ter:

$$2L = m\lambda_n \Rightarrow 2L = m \frac{\lambda}{n_2} \Rightarrow 2Ln_2 = m\lambda,$$

onde a menor espessura de filme para que isto ocorra será para  $m = 1$ , ou seja:  $L = \frac{\lambda}{2n_2}$ .

- para observar **interferência destrutiva**, temos que inverter a fase de  $r_2$  e isto ocorrerá se fizermos

$$2L = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_n \Rightarrow 2L = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{n_2} \Rightarrow 2Ln_2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda,$$

onde neste caso, a menor espessura de filme para que isto ocorra será para  $m = 0$ , ou seja  $L = \frac{\lambda}{4n_2}$ .

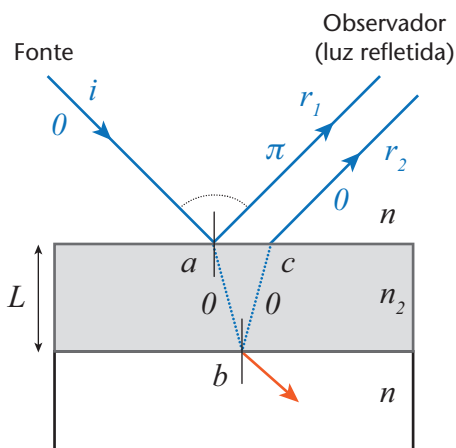


Figura 6.16 – Mostra como fica a mudança de fase das ondas só devido à reflexão e refração:  $\theta$  significa que não muda a fase e  $\pi$  significa que inverteu a fase. Esta figura poderia representar um filme de água com sabão ( $n_2$ ) no ar ( $n$ ).

Agora vamos supor que  $n_3 = n_1 = n$  e que  $n_2 > n$ . Fazendo a mesma análise anterior, vamos ver o seguinte:

1) Mudança de fase devido à reflexão:

Ponto  $a$ :

- reflexão:  $r_1$  inverte a fase ( $n_2 > n$ )
- refração: não muda de fase

Ponto  $b$ :

- reflexão: não inverte a fase ( $n < n_2$ )

Ponto  $c$ :

- refração: não muda de fase



Podemos concluir desta primeira análise que as ondas  $r_1$  e  $r_2$  estão fora de fase e, se considerássemos uma película com  $L \ll \lambda$ , as duas ondas sofreriam uma interferência destrutiva e o observador veria toda a película escura! Seguindo o exemplo anterior, se o filme tem certa espessura, podemos modificar esta interferência, fazendo a segunda análise:

2) mudança de fase devido à diferença de caminho  $\Delta r$ :

- para se ter agora, **interferência construtiva** precisamos mudar a fase de  $r_2$  e para isto devemos ter

$$2L = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_n \Rightarrow 2L = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{n_2} \Rightarrow 2Ln_2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda,$$

onde agora, a menor espessura de filme para que isto ocorra será para  $m = 0$ .

- para observar **interferência destrutiva**, temos que manter a fase de  $r_2$  e isto só ocorrerá se fizermos:

$$2L = m\lambda_n \Rightarrow 2L = m\frac{\lambda}{n_2} \Rightarrow 2Ln_2 = m\lambda,$$

onde neste caso, a menor espessura de filme para que isto ocorra será para  $m = 1$ .

Com este exemplo concluímos que as equações que definem interferência construtiva ou destrutiva dependem sempre da análise feita inicialmente para a inversão de fase devido à reflexão!

A interferência em filmes finos tem uma aplicação prática muito importante. Por exemplo em lentes de óculos e filtros diversos. No caso de óculos, podemos depositar um filme sobre o vidro, com uma espessura e índice de refração convenientes que possibilitem por exemplo, eliminar comprimentos de onda indesejáveis (tipo raios ultravioleta, ou mesmo reflexões) fazendo com que eles interfiram destrutivamente. Podemos reforçar também comprimentos de onda desejáveis, através de interferência construtiva.

**Exemplo 6.3:** Considere uma película de óleo ( $n_0 = 1,20$ ) sobre água ( $n = 1,33$ ) iluminada por luz cujo comprimento de onda é de 600 nm no ar, em incidência normal. Qual será a menor espessura de óleo que resultará em máxima reflexão?

**Solução:** Para resolvermos este problema é interessante olhar a figura 6.15 e considerar naquela figura que  $n_1 = 1$  (ar),  $n_2 = 1,20$  (óleo) e  $n_3 = 1,33$  (água). Vamos ter exatamente a inversão de fase mostrada na figura: ela ocorre na onda refletida na interface ar/óleo e na interface óleo/água. Assim vemos que as duas ondas refletidas estão em fase. Agora podemos analisar a mínima espessura do filme para produzir uma interferência construtiva, ou seja, um máximo na reflexão. Para que isto ocorra, precisamos manter a fase do feixe que passa dentro do filme de óleo. Para isto usamos a equação (6.11), considerando que a menor espessura ocorre para  $m = 1$ .

$$2L = m\lambda_{n_o} \Rightarrow L = \frac{\lambda}{2n_o} = \frac{600 \text{ nm}}{2 \times 1,20} = 250 \text{ nm}$$

### 6.3.4 Interferômetro de Michelson

O interferômetro de Michelson é um importante aparelho que recebe este nome por ter seu princípio de funcionamento baseado na interferência da luz e por ter sido inventado pelo físico americano Albert Abraham Michelson (1852-1931). Um desenho esquemático do interferômetro de Michelson é apresentado na figura 6.17.

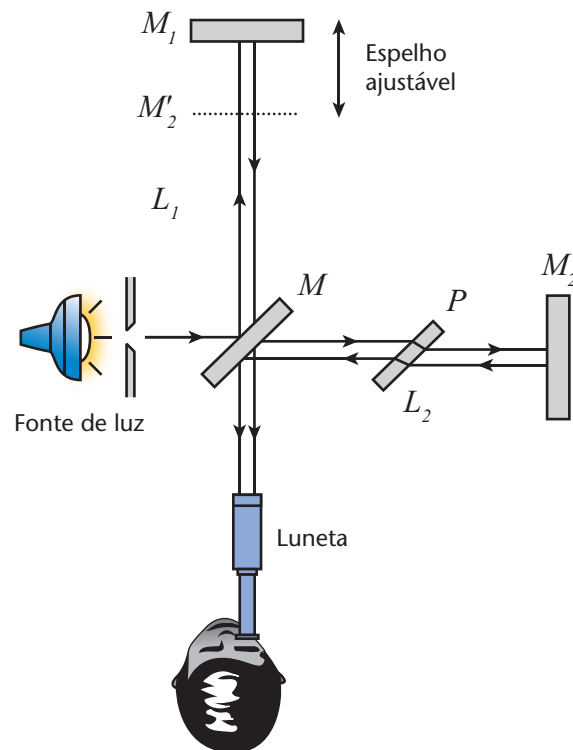


Figura 6.17 – O interferômetro de Michelson. Ele é composto de uma fonte de luz coerente (um laser), um espelho ajustável ( $M_1$ ), um espelho fixo ( $M_2$ ) e um espelho semi-refletor ( $M$ ).

O interferômetro é utilizado para se fazer medições precisas de distâncias. Seu princípio de funcionamento é o seguinte: um feixe de luz coerente (um laser) incide sobre um espelho semi-refletor  $M$ , chamado também de divisor de feixe. Este espelho deixa 50% da luz incidente atravessá-lo, refletindo os outros 50%.

A parte refletida percorre um caminho  $L_1$  até um espelho móvel  $M_1$  e volta pelo mesmo caminho (percorrendo assim um caminho total de  $2L_1$ ). Parte deste feixe que retorna chega até o olho do observador, ou é projetado numa tela (quando se usa lasers, devemos ter este cuidado!!! Nada de olhar direto no feixe, pode queimar sua vista!). A parte do feixe inicial que atravessa  $M$  segue até o espelho fixo  $M_2$  onde reflete e faz o caminho de volta (percorrendo assim uma distância de  $2L_2$ ). Uma parte deste feixe é refletida pelo espelho  $M$  e chega também até o ponto onde se encontra o observador. Os dois feixes são assim combinados e interferem.

Podemos escrever a seguinte equação, para a diferença de percurso entre os dois feixes:

$$2L_1 - 2L_2 = m\lambda$$

onde  $m$  seria medido em números de comprimento de onda. Imagine-mos agora que olhando na tela vemos uma franja clara (interferência construtiva), que para a nossa equação acima pode ser qualquer  $m$  inteiro, ou seja, a diferença de percurso sempre será um número inteiro de comprimentos de onda para resultar numa interferência construtiva. Se movermos o espelho  $M_1$  de uma distância  $\lambda/4$ , o caminho a mais que (ou a menos) o feixe terá que percorrer é de  $\lambda/2$  em relação ao caminho anterior. Logo, veremos na peça ocular que a franja clara se tornará uma franja escura. Podemos equacionar esta situação da seguinte maneira:

$$2L_1 - 2L_2 = m\lambda \quad (\text{antes})$$

$$2L_1 - 2(L_2 - d) = m'\lambda \quad (\text{depois})$$

Onde  $d$  é o deslocamento efetuado no espelho  $M_1$ . Fazendo a diferença entre estas duas equações temos:

$$[2L_1 - 2(L_2 - d)] - [2L_1 - 2L_2] = (m' - m)\lambda \Rightarrow 2d = \Delta m\lambda$$

$$d = \Delta m \frac{\lambda}{2} \quad (6.13)$$

onde  $\Delta m$  é a variação de franjas observada. Então se o deslocamento do espelho for  $d = \lambda/4$ ,  $\Delta m = 1/2$ , o que significa que passamos de uma franja clara para uma escura, ou seja, contamos meia franja, que equivale a meio comprimento de onda. Se agora  $d = \lambda/2$ ,  $\Delta m = 1$  significando que contamos uma franja, que equivale a um comprimento de onda! Seguindo este raciocínio, podemos ver que observando a mudança das franjas de interferência, podemos determinar com o interferômetro de Michelson variações de distância muito pequenas (até de um quarto do comprimento de onda da luz utilizada), aplicando a equação (6.13). Por exemplo, para um comprimento de onda de 400 nm podemos obter uma precisão de medida de 100 nm, ou seja,  $10^{-4}$  mm, para uma variação de meia franja de interferência. Mede-se distâncias em comprimentos de onda!

**Exemplo 6.4:** Um interferômetro de Michelson é usado para medir o avanço de um pequeno parafuso. De quanto foi este deslocamento se a fonte usada era uma lâmpada de Kr com  $\lambda = 606$  nm e foi observado o deslocamento de 4000 franjas a medida que o parafuso avançava.

**Solução:** Usando a equação (6.13) e considerando que  $\Delta m = 4000$  temos:

$$d = \Delta m \frac{\lambda}{2} = 4000 \times \frac{606 \times 10^{-9}}{2} = 1,21 \times 10^{-3} \text{ m} = 1,21 \text{ mm}$$

## 6.4 Difração

Já vimos que o fenômeno de difração é definido como a propriedade que a luz tem de contornar obstáculos e se desviar de sua trajetória retilínea. Diversos dos mais fundamentais experimentos que ajudaram a explicar a difração da luz foram realizados entre o fim do século XVII e começo do século XIX. Este fenômeno foi observado e descrito pela primeira vez pelo cientista italiano, Francesco Maria Grimaldi (1618-1663). Na mesma época, Christian Huygens (1629-1695) tratou a luz como onda e propôs um princípio, já descrito na seção 6.2, que é muito útil para entender a propagação das ondas. Thomas Young (1773-1829) e Augustin Jean Fresnel (1788-1827) usaram a teoria ondulatória de Huygens para entender os fenômenos de interferência e difração. Além destes cientistas, muitos outros nesta época estudaram e desenvolveram experimentos para entender estes fenômenos. Em geral estes experimentos envolviam a propagação da luz através

de pequenas aberturas, chamadas de fendas, e demonstraram que quando a luz passa através destas fendas, o tamanho físico da fenda determina como esta fenda interage com a luz. Vamos ver a seguir o que se quer dizer com isto!

O fenômeno de difração é facilmente explicado qualitativamente em termos do princípio de Huygens (secção 6.2). Na figura 6.18 você pode ver como ficaria uma onda passando por uma fenda e por um obstáculo, desenhando as frentes de onda de acordo com Huygens, e considerando inicialmente que a fenda e o obstáculo são grandes comparados com o comprimento de onda, neste caso, o comportamento da onda segue o que vimos na óptica geométrica. Se projetarmos estas imagens num anteparo, teremos uma região clara do tamanho da fenda e uma sombra com o perfil do obstáculo.

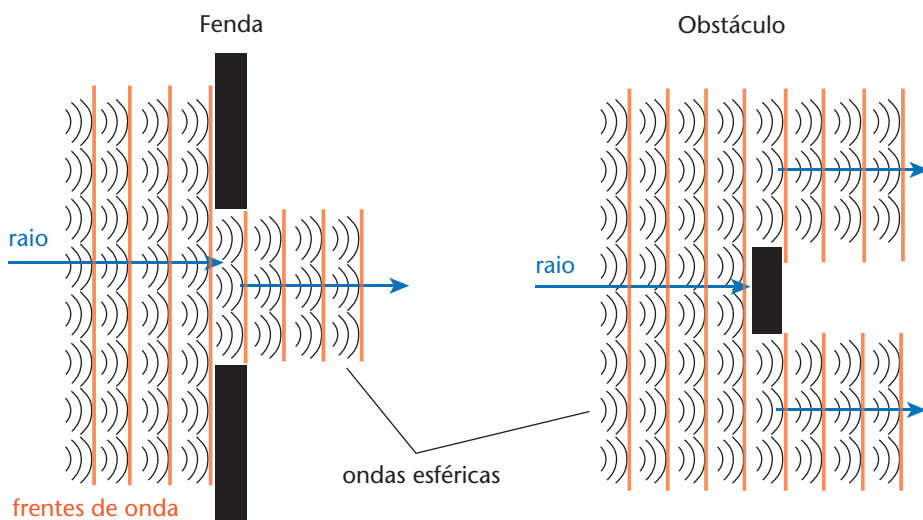


Figure 6.18 – Frentes de onda planas passando por uma fenda e por um obstáculo. Ambos são grandes comparados com o comprimento de onda.

Na figura 6.19, consideramos uma fenda e um obstáculo com tamanho da mesma ordem de grandeza do comprimento de onda da luz. Neste caso algumas das ondas esféricas serão bloqueadas e não irão mais contribuir para a frente de onda fazendo com que a frente de onda se curve ao passar pela fenda ou pelo obstáculo. Estas frentes de onda não passam mais livremente pela fenda e algumas partes da frente de onda sofrem algum atraso. O resultado disto é a curvatura da frente de onda depois de passar pela fenda ou pelo obstáculo. Quanto menor o obstáculo ou a abertura e mais próximo do comprimento de onda da luz incidente, maior a curvatura das frentes de onda e portanto maior a **difração**.

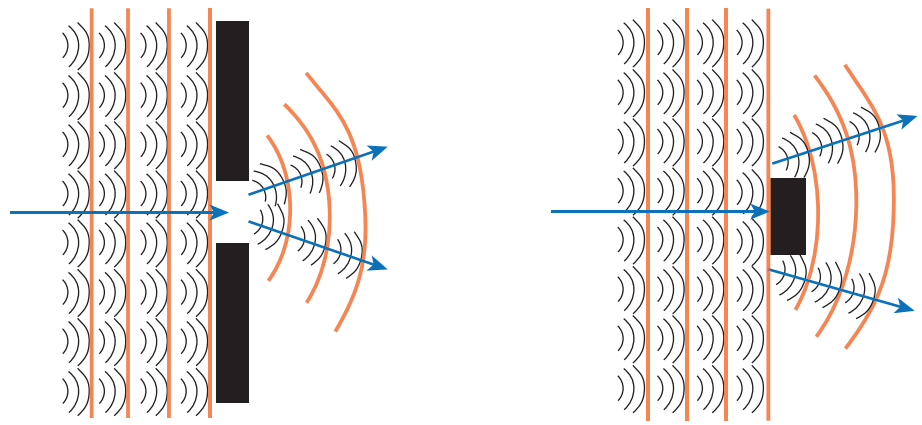


Figure 6.19 – Nesta figura as ondas esféricas interagem com as bordas da fenda ou do obstáculo que tem tamanho da mesma ordem do comprimento de onda, e algumas são bloqueadas, fazendo com que a frente de onda se curve ao passar pelas bordas.

### 6.4.1 Fenda simples

Vamos considerar a figura 6.20, onde temos uma fonte pontual e monocromática incidindo sobre uma fenda de largura  $a$  da mesma ordem do comprimento de onda da luz incidente. Na frente da fenda temos um anteparo onde se observa um padrão de intensidade, regiões de máximos e mínimos de intensidade, e a representação gráfica desta distribuição de intensidades.

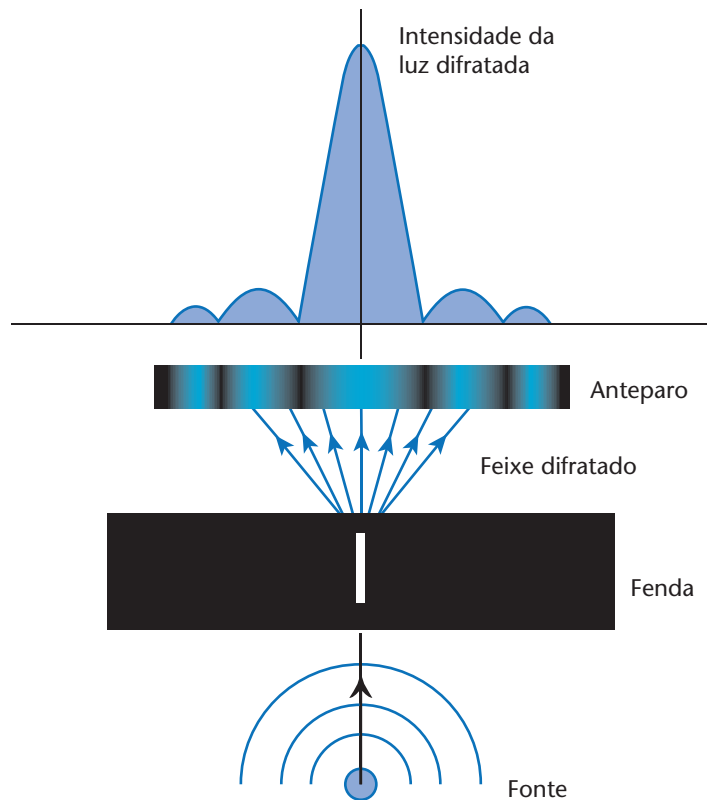
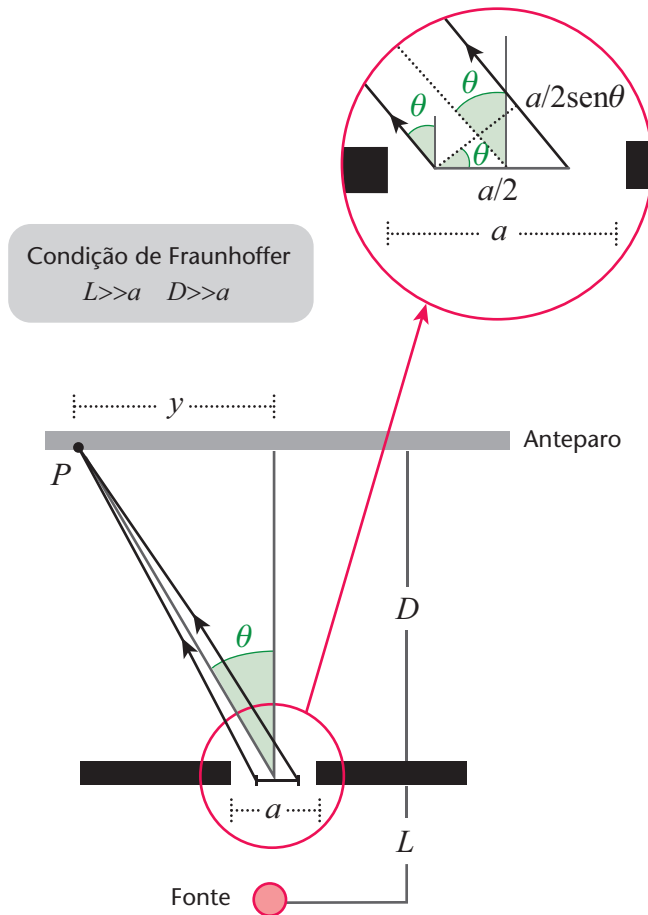


Figura 6.20 – Representação da difração por uma fenda.

Fazendo um corte na figura acima, representado na figura 6.21 abaixo, temos que a fonte está a uma distância  $L$  da fenda de largura  $a$ , onde  $L \gg a$ . Por sua vez, a fenda está a uma distância  $D$  do anteparo, onde  $D \gg a$ . Nestas condições temos **difração de Fraunhofer**. Agora vamos determinar, do mesmo modo que fizemos no experimento de Young de fenda dupla, quais as posições dos máximos e mínimos, desta figura de difração. Na verdade, vamos ver que neste caso podemos determinar com precisão a posição dos mínimos no anteparo, sendo que a posição dos máximos é apenas aproximada.



A difração é classificada em dois tipos dependendo da distância entre a fonte de luz ou o anteparo, aos obstáculos ou fendas. Chamamos de **difração de Fresnel** quando a fonte de luz ou o anteparo estão próximos do obstáculo. Neste caso o tratamento matemático para descrever a figura observada no anteparo é bastante complexo e está além dos objetivos deste texto. Quando a fonte e o anteparo estão bastante longe do obstáculo ou fenda, chamamos de **difração de Fraunhofer**, que é o que vamos estudar aqui. Portanto tenha em mente que os experimentos que vamos descrever devem obedecer sempre a esta condição, que matematicamente, é mais fácil de tratar.

Figura 6.21 – Representação geométrica da condição de difração por uma fenda.

A condição para mínimos de interferência, assim como foi feito no experimento de Young, é determinada pela diferença de caminho óptico entre duas ondas que saem da fenda, de pontos adjacentes. Vamos dividir a fenda em duas partes e olhar o raio que sai da metade de uma das partes e o raio que sai da outra metade, como é mostrado na figura 6.21. Estes dois raios estão saindo da fenda de dois pontos distantes

entre si de  $a/2$ , e se superpõe num ponto  $P$  no anteparo gerando uma interferência destrutiva. A condição para uma interferência destrutiva, de acordo com o que já vimos anteriormente é de que a diferença de caminho óptico seja de metade de um comprimento de onda. Pela geometria, mostrada no aumento na figura 6.21, onde os raios saem paralelos da fenda, pois  $D \gg a$ , podemos escrever a seguinte equação para o **primeiro mínimo**:

$$\frac{a}{2} \text{sen}\theta = \frac{1}{2} \lambda \rightarrow a \text{sen}\theta = \lambda \quad (6.14)$$

Agora imagine que dividimos a fenda em quatro partes iguais e pegamos sempre a diferença de caminho óptico entre dois raios que saem de duas divisões adjacentes, separadas agora por  $a/4$ . Neste caso, vamos determinar a posição do segundo mínimo, e podemos escrever a equação:

$$\frac{a}{4} \text{sen}\theta = \frac{1}{2} \lambda \rightarrow a \text{sen}\theta = 2\lambda \quad (6.15)$$

Podemos estender este raciocínio e subdividir a fenda em oito partes, dezesseis partes e assim por diante, e chegaremos na seguinte equação que determina os **mínimos de difração para uma fenda simples**:

$$a \text{sen}\theta = m \lambda \quad \text{onde } m = 1, 2, 3, \dots \quad (6.16)$$

Note que não existe um mínimo central. O centro da figura de difração é sempre um máximo, e o primeiro mínimo de difração corresponde a  $m = 1$  e não zero como no caso do experimento de Young. Temos a posição do mínimo determinada pelo ângulo  $\theta$ , definido sempre em relação ao centro da fenda, como é mostrado na figura 6.21. Mas podemos determinar também, a posição  $y$  dos mínimos no anteparo. Considerando que o ângulo  $\theta$  é muito pequeno, podemos escrever a posição  $y_m$  para um mínimo de ordem  $m$ , localizado no ponto  $P$ , como:

$$\text{sen}\theta = \frac{m\lambda}{a} ; \quad \text{tg}\theta = \frac{y_m}{D} \rightarrow \text{sen}\theta \approx \text{tg}\theta \rightarrow y_m \approx \frac{mD\lambda}{a} \quad (6.17)$$

para  $y \ll D$ .

Considerando a expressão acima, podemos também deduzir aproximadamente a posição dos máximos de difração. Olhando a figura 6.21, e aplicando a equação acima observamos que o primeiro mínimo está localizado em  $y_1 \approx \frac{D\lambda}{a}$  e o segundo mínimo em  $y_2 \approx \frac{2D\lambda}{a}$ , portanto o primeiro máximo (do lado do máximo central) estará localizado aproximadamente em:



$$\frac{y_2 - y_1}{2} \approx \frac{1}{2} \frac{D \lambda}{a} \quad (6.18)$$

Ou seja, aproximadamente entre os dois mínimos.

Vamos ver agora como podemos determinar a distribuição de intensidades no padrão de difração mostrado na figura 6.20. Podemos calcular esta distribuição usando fasores, assim como fizemos no experimento de Young. Vamos então, dividir a fenda em  $n$  partes iguais, separadas por uma distância  $\Delta x$ , onde  $a = n\Delta x$ , como é mostrado na parte (a) da figura 6.22. De cada parte sairá uma onda, representada por um campo elétrico com amplitude  $\Delta E$ , e estas ondas sofrerão interferência num ponto  $P$  do anteparo. Lembre que estamos tratando de difração de Fraunhöffer, portanto as frentes de onda saem em fase da fenda e vamos ignorar qualquer dependência da amplitude do campo com  $\theta$ . Portanto a amplitude total do campo elétrico em  $P$  pode ser obtida simplesmente pela soma das contribuições de cada zona (fasores). Por exemplo, se as ondas saíssem da fenda com um ângulo  $\theta = 0$ , a amplitude total  $E_\theta = 0 = n\Delta E = E_m$ , que seria a amplitude máxima obtida bem no centro do anteparo. Para um ângulo  $\theta$  qualquer, a amplitude total num ponto  $P$  será dada de acordo com a construção, mostrada na parte (b) da figura 6.22, usando fasores.

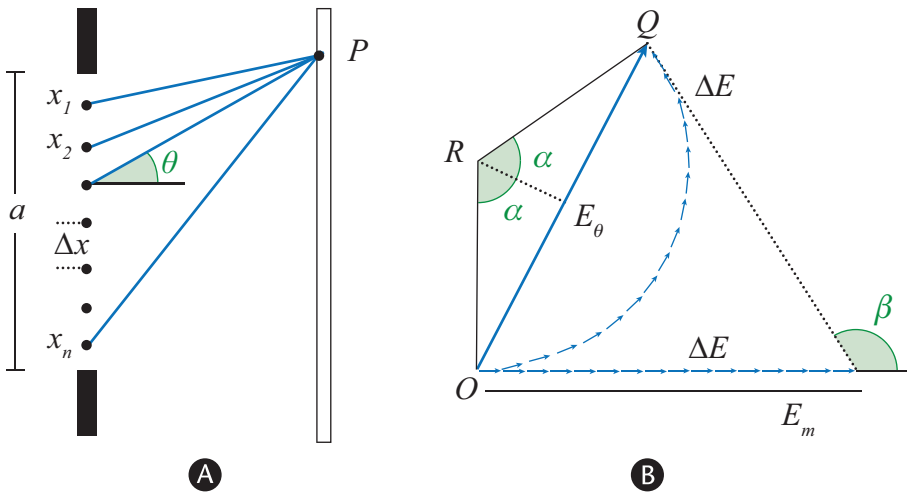


Figura 6.22 – Construção usada para calcular as intensidades da figura de difração, para qualquer ponto  $P$ .

Olhando a figura 6.22 (b) e usando um pouco de trigonometria, podemos tirar as seguintes relações:

$$\text{semi-arco } OQ = E_m \quad ; \quad \beta = 2\alpha = \frac{E_m}{R} \quad ; \quad \text{sen}\alpha = \frac{E_\theta/2}{R} = \frac{E_\theta}{2R}$$

onde  $\beta$  é a diferença de fase entre a primeira onda e a última, ou seja, as ondas que saem das duas bordas da fenda. Combinando estas relações podemos calcular a amplitude resultante como

$$E_{\theta} = 2R \operatorname{sen}\alpha = 2 \frac{E_m}{2\alpha} \operatorname{sen}\alpha = \frac{E_m}{\alpha} \operatorname{sen}\alpha$$

Como a intensidade é proporcional a amplitude ao quadrado, temos que a intensidade luminosa no ponto  $P$ , será

$$\begin{aligned} \frac{I_{\theta}}{I_m} &= \left( \frac{E_{\theta}}{E_m} \right)^2 = \left( \frac{E_m}{\alpha E_m} \operatorname{sen}\alpha \right)^2 = \left( \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \right)^2 \\ \Rightarrow I_{\theta} &= I_m \left( \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.19)$$

Devemos lembrar ainda que a diferença de fase  $\beta$  é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2\pi} &= \frac{a \operatorname{sen}\theta}{\lambda} \Rightarrow \beta = \frac{2\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda} \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2} \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda} \end{aligned} \quad (6.20)$$

onde  $a$  é a abertura da fenda. A equação para a intensidade ( $I_{\theta}$ ) está representada graficamente na figura 6.20 e na figura 6.23 abaixo, onde a posição dos mínimos de difração é expressa em termos da diferença de fase  $\alpha$  ( $a \operatorname{sen}\theta = m\lambda$  e, portanto,  $\alpha = m\pi$ ).

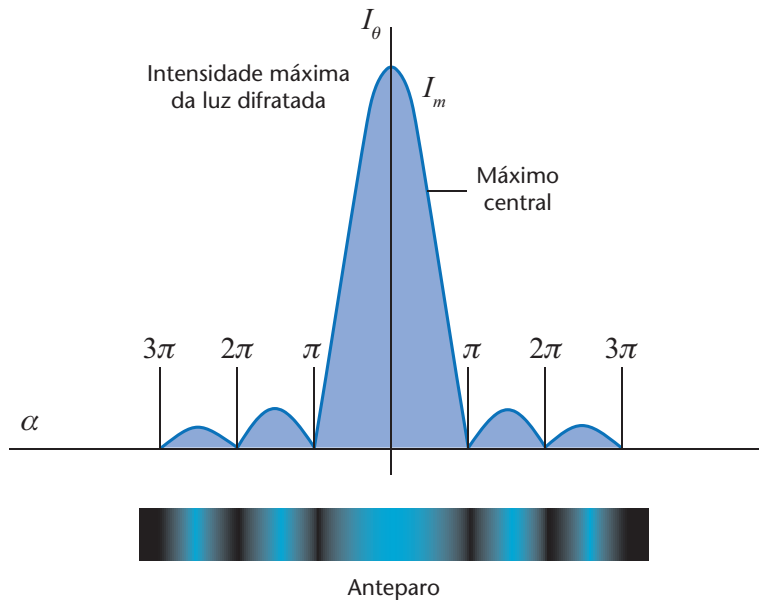


Figura 6.23 – Distribuição de intensidades para a difração.

### 6.4.2 Aberturas circulares e Resolução

Quando temos aberturas circulares, o padrão de difração é de círculos concêntricos de máximos e mínimos de intensidade. Na figura 6.24 podemos observar o espectro de difração de Fraunhöffer para uma abertura circular.

A determinação da posição destes máximos e mínimos é bastante complexa e não vamos demonstrá-la aqui. Mas como podemos ver na figura 6.24, a posição do primeiro mínimo de difração de uma abertura circular de diâmetro  $d$  é dada por

$$\text{sen}\theta = 1,22 \frac{\lambda}{d} \quad (6.21)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre o eixo central e a reta que liga o centro do anel a posição do mínimo.

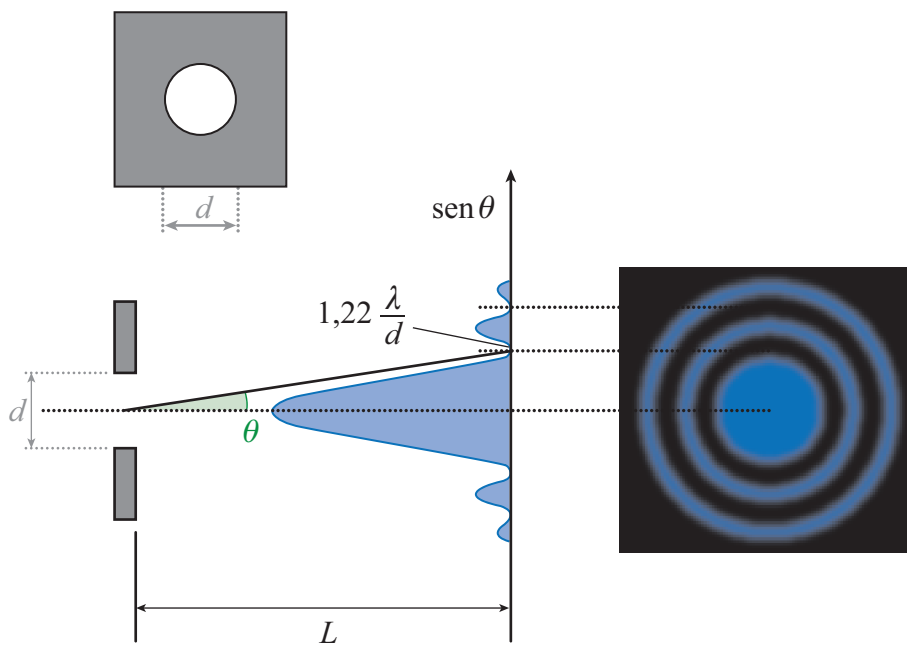


Figura 6.24 – Difração em abertura circular em que se podem observar os anéis concêntricos de máximos e mínimos.

É interessante comparar a equação 6.21 com o caso anterior, onde tínhamos uma fenda única de largura  $a$ . Neste caso a posição do primeiro mínimo seria:

$$\text{sen}\theta = \frac{\lambda}{a} \quad (6.22)$$

Portanto o fato de termos uma abertura circular é que nos dá o fator 1,22 da equação 6.21, e que não será calculado aqui, por envolver uma matemática mais avançada.

Quando utilizamos instrumentos ópticos, que são compostos por lentes, em geral com diâmetros variados, observamos padrões de difração como o mostrado na figura 6.24. Esta figura tem aplicações na resolução de diversos instrumentos ópticos, como telescópios e microscópios. Como podemos ver da equação 6.21 o ângulo  $\theta$  subtendido pelo primeiro mínimo de difração está relacionado ao comprimento de onda e ao diâmetro da abertura e quando temos duas fontes pontuais distantes, por exemplo, estrelas, observadas através de uma lente (telescópio), a imagem produzida será muito semelhante a da figura 6.24 e conforme a separação entre estas fontes, teremos duas figuras de difração superpostas e eventualmente não saberemos se temos uma ou duas fontes, e a pergunta é: qual a distância mínima entre duas fontes onde é possível determinar com certeza de que temos duas fontes e não uma fonte apenas? Ou seja, como podemos resolver estas duas fontes? Um desenho desta situação é vista na figura 6.25.

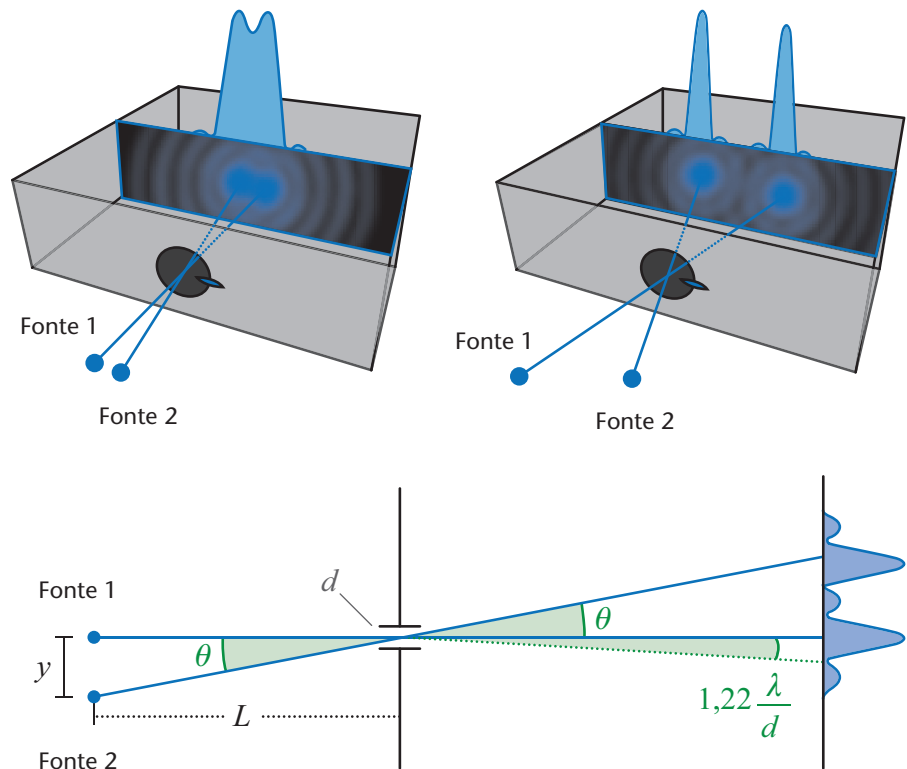


Figura 6.25 – Resolução de duas fontes, com separações diferentes e esquema desta configuração.

Como podemos ver na figura 6.25, os padrões de difração das duas fontes se superpõem. Existe uma separação angular (ou linear) mínima a partir da qual podemos efetivamente dizer que temos duas fontes, e esta separação mínima, ou limite de resolução, é conhecido como **Critério de Rayleigh** e é definido como: *duas fontes podem ser resolvidas quando o máximo de difração de uma fonte coincide com o primeiro mínimo de difração da outra fonte, com uma separação angular dada por:*

$$\theta_R = 1,22 \frac{\lambda}{d} \quad (6.23)$$

Consideramos ângulos pequenos onde podemos aproximar  $\sin \theta_R$  por  $\theta_R$ , e  $\theta_R$  nada mais é do que a posição do primeiro mínimo de difração para cada fonte. Não esqueça que estamos considerando fontes pontuais e com a mesma intensidade, para simplificar os cálculos.

Então podemos concluir o seguinte:

- $\theta \geq \theta_R \rightarrow$  temos resolução
- $\theta < \theta_R \rightarrow$  não temos resolução

onde  $\theta$  é a separação angular das duas fontes. Quanto menor a separação angular, melhor a resolução, ou seja, podemos ter duas fontes muito próximas e mesmo assim conseguir “resolvê-las”.

Podemos ainda determinar a separação linear mínima ( $y$ ) entre estas duas fontes, considerando as fontes a uma distância  $L$  de um orifício com diâmetro  $d$  (veja figura 6.25), temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\theta_R}{2} = \frac{y/2}{L} &\Rightarrow \frac{\theta_R}{2} \cong \frac{y/2}{L} \\ &\Rightarrow y \cong L\theta_R \end{aligned} \quad (6.24)$$

As equações 6.23 e 6.24 acima tem muitas aplicações. Por exemplo, o **poder de resolução** de um instrumento ótico, como um microscópio ou um telescópio, refere-se à capacidade do instrumento de resolver dois objetos que estejam muito próximos um do outro. Estas imagens tendem a se superpor em virtude da difração na abertura da entrada do instrumento. Temos duas maneiras de aumentar o poder de resolução, de acordo com a equação 6.23, podemos ter um  $\theta_R$  pequeno (**objetos muito próximos e no limite de resolução**) se estivermos olhando com um comprimento de onda pequeno ( $\lambda$ ) ou com uma lente de diâmetro  $d$  grande, ou uma combinação conveniente destes dois parâmetros.

Por exemplo, num microscópio óptico, em geral o sistema tem uma abertura pequena, ou seja, uma lente com diâmetro ( $d$ ) da ordem de 10 a 20 mm e podemos usar  $\lambda$  no visível, obtendo uma boa resolução. Se quisermos melhorar esta resolução, mantendo a mesma lente, podemos usar luz UV, cujo comprimento de onda é menor que o da luz visível. Deste modo podemos ver pontos muito próximos e mesmo assim resolvê-los.

Mas para o caso de objetos distantes, como duas estrelas? Como sabemos que estamos vendo uma, duas ou mais estrelas? Para isto precisamos usar um telescópio cuja abertura ou diâmetro da lente seja grande, de tal modo que  $\theta_R$  diminua, mesmo usando luz visível. Temos telescópios com espelhos da ordem de 5,0 m de diâmetro e no caso de radiotelescópios, podemos ter um arranjo de antenas que cheguem a um diâmetro da ordem de 300 m.

**Exemplo 6.5:** Uma lente convergente de 3,0 cm de diâmetro tem uma distância focal de 20,0 cm. Que separação angular devem ter os dois objetos puntiformes distantes de forma a satisfazerem a relação de Rayleigh? Suponha  $\lambda = 550$  nm.

**Solução:** pelo critério de Rayleigh temos:

$$\theta_R = 1,22 \frac{\lambda}{d} = 1,22 \frac{550 \times 10^{-9}}{3 \times 10^{-2}} = 2,2 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

Portanto a separação mínima para a qual podemos dizer que temos dois objetos é para este caso,  $2,2 \times 10^{-5}$  rad.

### 6.4.3 Difração por duas fendas

No experimento de Young descrito na secção 6.3.3 tínhamos a condição de que a largura da fenda era da ordem do comprimento de onda, com isto, como podemos ver pelo que foi discutido sobre difração por uma fenda simples (secção 6.4.1), o máximo central tem uma largura muito grande, de tal modo que a intensidade das franjas claras é praticamente constante para ângulos pequenos. Quando a largura da fenda começa a ficar maior, que é o que acontece na prática, a intensidade das franjas claras deixa de ser uniforme, mesmo para pequenos ângulos. É dito então que a **intensidade das franjas de interferência foi modulada pela difração**. A figura 6.26 mostra isto.

A equação que permite descrever o gráfico da figura 6.26, combina as intensidades determinadas para interferência e difração:

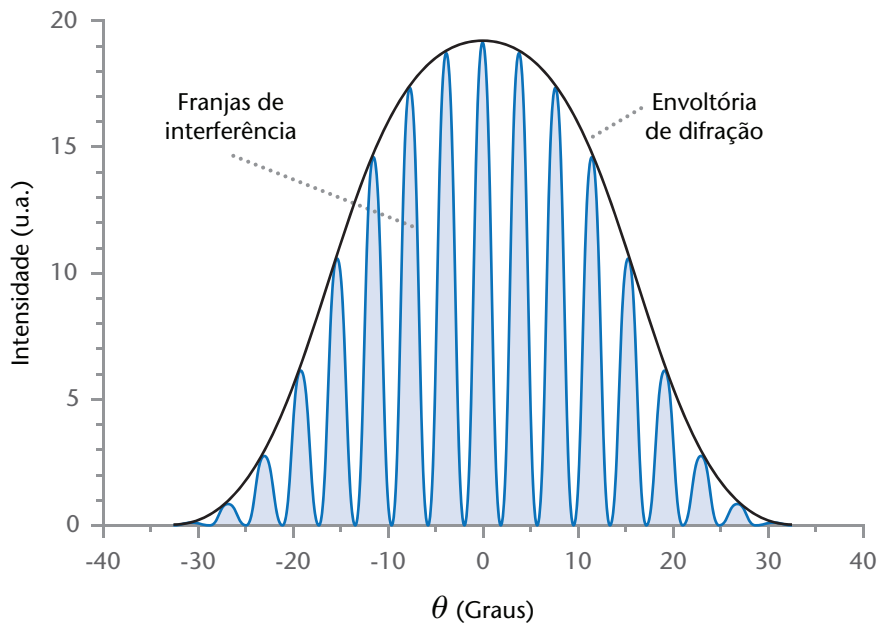


Figura 6.26 – Gráfico teórico da intensidade em um experimento de duas fendas com largura finita. A difração modula a intensidade das franjas de interferência.

$$I_{\theta} = I_m \cos^2 \frac{\phi}{2} \left( \frac{\text{sen} \alpha}{\alpha} \right)^2 \quad (6.25)$$

$$\text{onde } \frac{\phi}{2} = \frac{\pi d \text{sen} \theta}{\lambda} \text{ e } \alpha = \frac{\pi a \text{sen} \theta}{\lambda}$$

**Exemplo 6.6:** Vamos aproveitar a figura 6.26 e determinar, à partir do gráfico, quais as condições experimentais que poderiam produzir esta distribuição de intensidades, isto é: qual a distância  $d$  entre as fendas e qual a largura  $a$  das fendas, considerando que nossa fonte seja um laser de He-Ne com  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ .

**Solução:** Para isto precisamos analisar os dois mecanismos básicos que produziram esta imagem: difração e interferência.

- Difração: máximo central é limitado pelos primeiros mínimos de difração, produzidos pelas fendas individualmente e a posição destes primeiros mínimos é dada por  $a \text{sen} \theta = \lambda$  ( $m = 1$ )
- Interferência: a posição das franjas claras (máximos de interferência) é dada por  $d \text{sen} \theta = m' \lambda$  onde  $m' = 0, 1, 2, 3, \dots$

Então, para determinarmos  $a$ , vemos no gráfico que o primeiro mínimo de difração ocorre para um ângulo de aproximadamente  $35^\circ$ , portanto

$$\alpha = \frac{\lambda}{\text{sen}\theta} = \frac{632,8 \text{ nm}}{\text{sen}35^\circ} = 1,1 \mu\text{m}$$

A determinação de  $d$  pode ser feita de diversas maneiras:

- Podemos escolher qualquer franja clara e determinar no gráfico a ordem  $m'$  e o ângulo em que esta franja ocorre, por exemplo: para a ordem 3 (a franja central tem ordem zero), o ângulo em que ela ocorre é aproximadamente  $12,5^\circ$ , portanto

$$d = m' \frac{\lambda}{\text{sen}\theta} = 3 \times \frac{632,8 \text{ nm}}{\text{sen}12,5^\circ} = 8,77 \mu\text{m} \cong 8,8 \mu\text{m}$$

- Outra maneira de calcular: contem no gráfico quantas franjas temos em todo o máximo central de difração: devem ter contado 15 franjas claras! Como a figura é simétrica, temos 7 franjas de um lado, mais 7 franjas do outro e mais o máximo central. A franja de número 8 é a que desaparece totalmente para o ângulo de  $35^\circ$ , então podemos escrever:

$$\frac{d \text{ sen } 35^\circ = 8\lambda}{a \text{ sen } 35^\circ = \lambda} \Rightarrow \frac{d}{a} = 8 \Rightarrow d = 8a = 8 \times 1,1 \mu\text{m} = 8,8 \mu\text{m}$$

**Exemplo 6.7:** A figura de intensidades observada num anteparo, mostra apenas 5 franjas claras na envoltória central de difração. Sabendo que  $a = 2 \mu\text{m}$ , qual o valor da separação  $d$  entre as fendas?

**Solução:** Como a figura deve ser simétrica, a distribuição de franjas será:  $2 + 1 + 2$ , ou seja, um máximo central e mais duas franjas de cada lado. A franja clara que desaparece é, portanto, a de ordem 3. De acordo com o exemplo acima, podemos escrever:

$$\frac{d}{a} = 3 \Rightarrow d = 3a = 6 \mu\text{m}$$

#### 6.4.4. Fendas múltiplas e redes de difração

Um dos dispositivos mais úteis para quem trabalha no campo da Óptica e estuda a luz emitida e absorvida pelos corpos é a rede de difração. Ela tem a propriedade de separar os diversos comprimentos de onda que compõe esta luz, e baseados nos conceitos de difração e interferência vistos até agora, vamos ver como podemos separar comprimentos de onda, usando uma rede de difração. Há dois tipos de rede: por *reflexão* e por transmissão. Para se fazer uma rede de difra-

*Um exemplo típico de uma rede de difração por reflexão é o CD ou DVD. Quando incidimos luz branca nestes dispositivos, vemos imediatamente um espectro de cores! Tanto o CD como o DVD possuem ranhuras, ou sulcos, gerados na gravação, cujo espaçamento é muito pequeno e aproximadamente constante e quando a luz incide nestas ranhuras, que se comportam como fendas, a luz é espalhada (difratada) gerando figuras de interferência num anteparo a sua frente (no caso, o nosso olho).*



ção por transmissão, em geral usa-se vidro, onde são feitas ranhuras igualmente espaçadas e paralelas entre si. Estas redes são tipicamente retangulares, com dimensão de vários centímetros de um lado e o espaçamento entre as ranhuras (fendas) é da ordem de micrômetros. A densidade de ranhuras (ou seja, ranhuras por unidade de comprimento) varia, dependendo da resolução que queremos, mas redes típicas usadas em espectrômetros podem ter densidade de ranhuras de 600 a 2400  $\text{mm}^{-1}$ .

Para determinar a figura de intensidades observada em uma rede de difração, vamos começar aumentando o número de fendas progressivamente e vendo o que ocorre, como é mostrado na figura 6.27

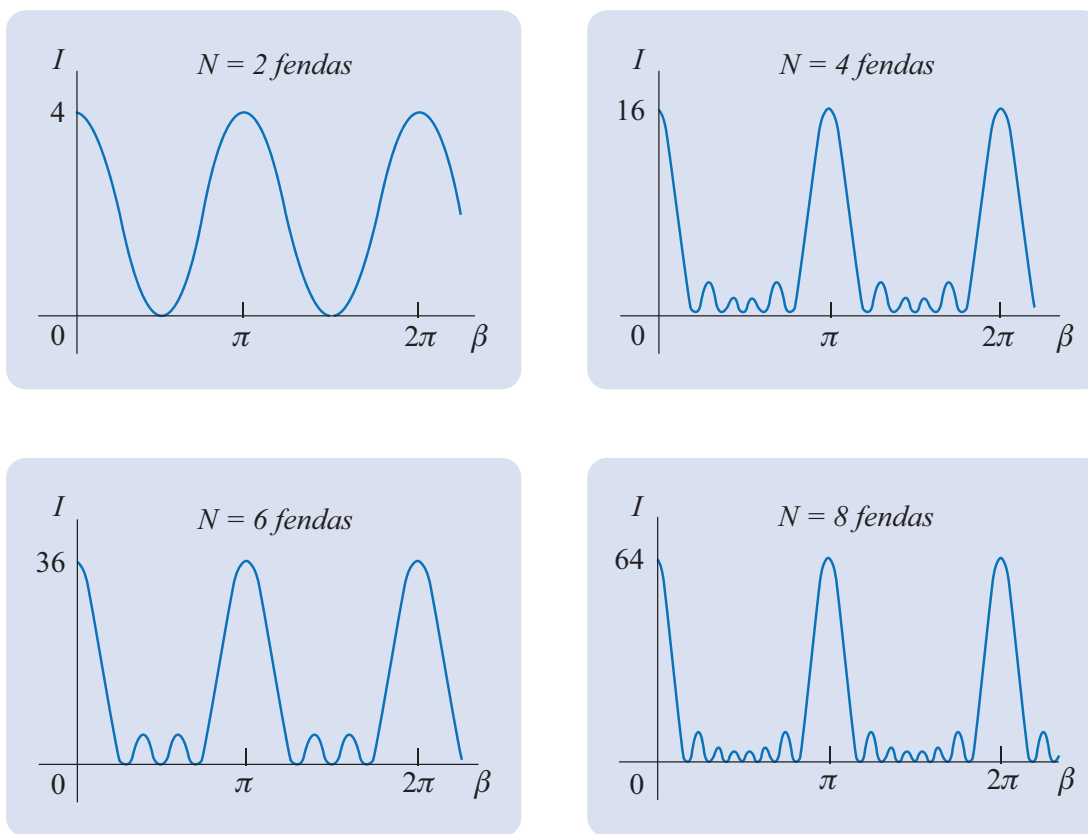


Figura 6.27 – Distribuição de intensidade para diversas fendas.

Podemos ver claramente a diferença entre a distribuição de intensidades para duas fendas e para mais de duas fendas, separadas igualmente por uma distância  $d$ , onde neste caso começam a aparecer franjas de intensidade menor, chamadas de máximos secundários, entre as franjas de intensidade maior, que chamamos agora de máximos principais. Além disto, os máximos principais têm uma intensidade muito maior à medida que aumenta o número de fendas e sua

largura ( $L$ ) diminui. Os máximos secundários diminuem sua intensidade com o aumento do número de fendas, de tal forma que quando temos muitas fendas (rede de difração), não conseguimos mais visualizar os máximos secundários e obtemos a distribuição de intensidades mostrada na figura 6.28. Neste caso a curva de intensidades produzida é constituída de picos muito estreitos, que chamamos de *linhas* e que são rotuladas pelo número de ordem,  $m$ . Nesta figura temos as linhas de ordem zero, de primeira ordem ( $m = 1, \beta = \pi$ ) e de segunda ordem ( $m = 2, \beta = 2\pi$ ).

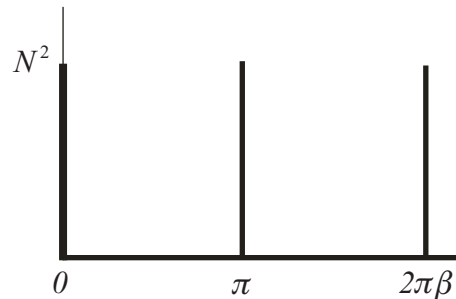


Figura 6.28 – Padrão de intensidade para uma luz passando por uma rede com um número muito grande de fendas, gerando um espectro de linhas.

Para determinar estas figuras, vamos de novo fazer uso de fasores, como é mostrado na figura 6.29 abaixo:

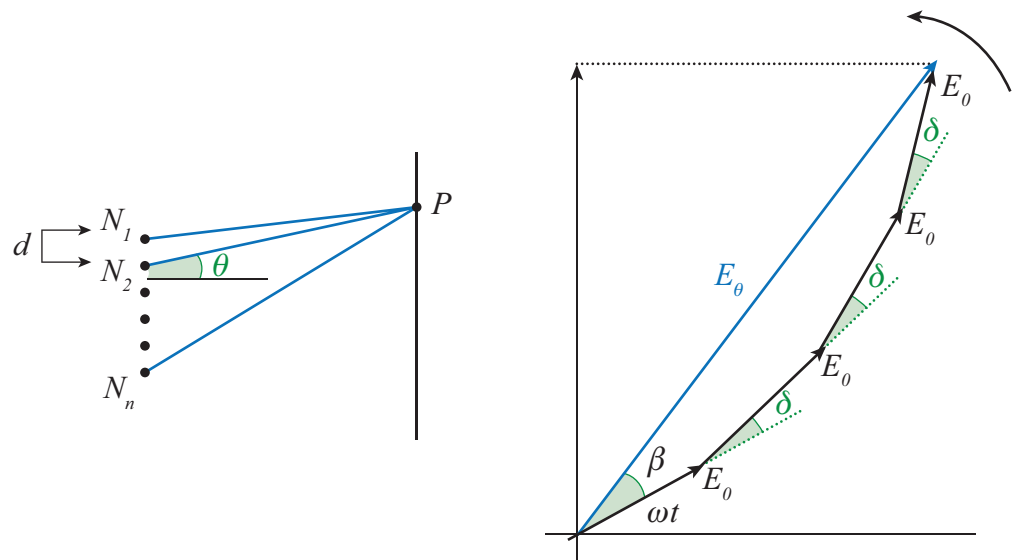


Figura 6.29 –  $N$  fontes separadas por uma distância  $d$  e a representação com fasores para os campos emitidos por estas  $N$  fontes, com diferença de fase  $\delta$  entre eles.

Desta vez não vamos fazer o cálculo detalhado, mas apenas indicá-lo a começar pela posição dos picos de máximos de intensidade, ou seja, as franjas ou linhas claras. No ponto  $P$  o máximo será definido por:

$$d \sin\theta_m = m \lambda \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.26)$$

Considerando agora a figura 6.29, a amplitude resultante  $E_\theta$  para  $N$  fendas será dada pela soma dos  $N$  fasores, e seguindo o mesmo raciocínio no cálculo de intensidade para fenda simples (secção 6.4.1) podemos escrever

$$E_\theta = \frac{E_o \text{sen}(N\delta/2)}{\text{sen}(\delta/2)} \Rightarrow \frac{I_\theta}{I_o} = \left( \frac{E_\theta}{E_o} \right)^2 = \frac{\text{sen}^2(N\delta/2)}{\text{sen}^2(\delta/2)} \Rightarrow \beta = \frac{\delta}{2}$$

$$\Rightarrow I_\theta = I_o \frac{\text{sen}^2(N\beta)}{\text{sen}^2(\beta)} \quad (6.27)$$

Analisando esta expressão podemos ver que para uma diferença de fase igual a  $m\pi$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), onde teremos os máximos de interferência

$$\left[ \frac{\text{sen}^2(N\beta)}{\text{sen}^2(\beta)} \right]_{\beta \rightarrow 0} = N^2$$

E, portanto,  $I_\theta = N^2 I_o$ .

Vamos agora analisar a largura das franjas quando  $N$  aumenta, de acordo com a figura 6.30 abaixo. Vemos que o primeiro mínimo ocorre quando  $\text{sen } N\beta = 0$  e portanto para  $N\beta = \pi$ , ou  $\beta = \pi/N$ .

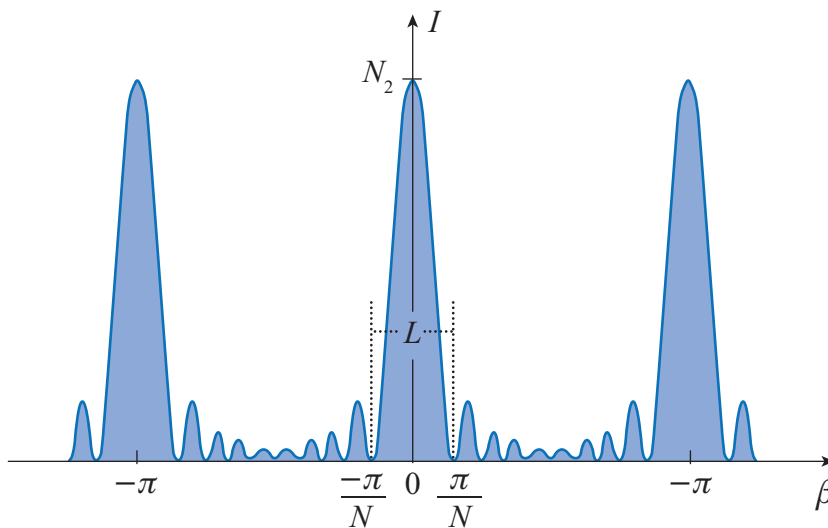


Figura 6.30 – Distribuição de intensidades para  $N$  fendas.

Deste modo podemos definir a largura da linha, em função da diferença de fase para o máximo central, como

$$\Delta\beta = \frac{2\pi}{N}$$

Considerando  $N \gg 1$ , podemos aproximar  $\Delta\beta \approx d\beta = \frac{2\pi}{N}$ . Sabendo que  $\beta = \frac{\phi}{2} = \frac{\pi d \sin\theta_m}{\lambda}$  e diferenciando esta expressão, temos:

$$d\beta = \frac{\pi d \cos\theta_m}{\lambda} d\theta = \frac{2\pi}{N}$$

Definimos a largura de linha, no entanto, como função de  $\theta$  (lembrando: o ângulo de incidência no anteparo e que nos dá a ordem  $m$  da linha), então teremos

$$L = d\theta = \Delta\theta = \frac{2\lambda}{Nd \cos\theta_m} \quad (6.28)$$

Na expressão acima podemos ver que a largura de linha é inversamente proporcional ao número de fendas  $N$ , isto é, quanto maior o número de fendas, menor a largura da linha!

**Exemplo 6.8:** Vamos supor que temos uma fonte que emite apenas dois comprimentos de onda discretos,  $\lambda_{vi} = 400$  nm (violeta) e  $\lambda_{ve} = 750$  nm (vermelho), onde a diferença entre estes dois comprimentos de onda para a mesma ordem  $m = 1$  é dada por  $\Delta\lambda = \lambda_{ve} - \lambda_{vi} = 350$  nm. Vamos imaginar que estas duas cores são emitidas com a mesma intensidade. Na figura 6.31 temos uma representação gráfica da intensidade versus  $\theta$ , do que é observado num anteparo, quando esta fonte incide numa rede com  $d = 1,7 \mu\text{m}$ . Para  $m = 0$  ( $\theta = 0$ ), no centro do anteparo, teremos uma mistura das duas cores, e a cor observada será igual a da luz incidente. Entretanto, os máximos de primeira ordem ( $m = 1$ ) de cada lado de  $\theta = 0$  estarão separados espacialmente em violeta e vermelho.

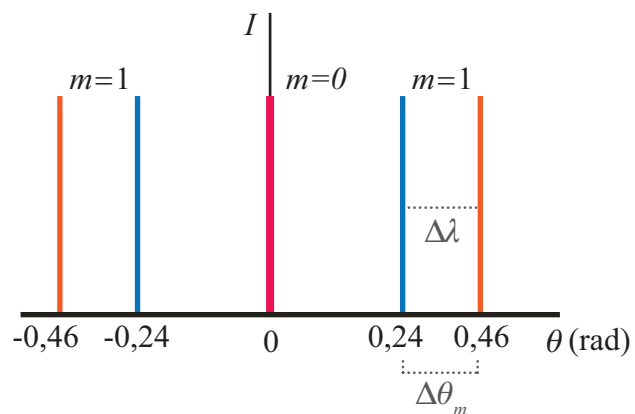


Figura 6.31 – Espectro de linhas (máximos de interferência de primeira ordem) para luz de uma fonte que emite apenas dois comprimentos de onda (violeta e vermelho), com a mesma intensidade, vista através de uma rede de difração com  $d = 1,7 \mu\text{m}$ .

Determine a posição angular de cada linha em primeira ordem e a sua separação angular.

**Solução:** A posição angular das linhas para  $\lambda_{vi} = 400 \text{ nm}$  (violeta) e  $\lambda_{ve} = 750 \text{ nm}$  (vermelho) são dadas pela equação  $d \sin \theta_m = m \lambda$

- $m = 1$  e  $\lambda_{vi} = 400 \text{ nm}$

$$\sin \theta_{vi} = \frac{\lambda}{d} = \frac{0,4 \mu\text{m}}{1,7 \mu\text{m}} \Rightarrow \theta_{vi} = \arcsen 0,237 = 0,24 \text{ rad}$$

- $m = 1$  e  $\lambda_{ve} = 750 \text{ nm}$

$$\sin \theta_{ve} = \frac{\lambda}{d} = \frac{0,75 \mu\text{m}}{1,7 \mu\text{m}} \Rightarrow \theta_{ve} = \arcsen 0,441 = 0,46 \text{ rad}$$

O espaçamento angular entre estas duas linhas para  $m = 1$  é dado por

$$\Delta \theta_{m=1} = \theta_{ve} - \theta_{vi} = 0,22 \text{ rad}$$

Aproveitando o exemplo acima, vamos definir a **dispersão  $D$**  de uma rede, ou seja, o poder de uma rede de dispersar um feixe de luz espacialmente de acordo com o comprimento de onda

$$D = \frac{\Delta \theta_m}{\Delta \lambda} \quad (6.29)$$

onde  $\Delta \theta_m$  é o espaçamento angular entre os máximos de interferência de ondas que diferem por uma quantidade  $\Delta \lambda$ , na mesma ordem. No exemplo acima, seria na ordem  $m = 1$ .

Podemos deduzir outra expressão para a dispersão  $D$ , diferenciando a expressão  $d \sin \theta_m = m \lambda$  com  $\theta_m$  e  $\lambda$  como variáveis

$$\begin{aligned} d \cos \theta_m d\theta_m &= m d\lambda \Rightarrow \frac{d\theta_m}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta_m} \\ \Rightarrow D &= \frac{\Delta \theta_m}{\Delta \lambda} = \frac{m}{d \cos \theta_m} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Como o espaçamento entre as ranhuras  $d$  está no denominador, a expressão 6.30 mostra que quanto menor  $d$ , maior a dispersão para um mesmo  $\Delta \lambda$ , ou seja, as linhas estarão mais separadas entre si, a separação angular  $\Delta \theta_m$  será maior.

Vimos na secção 6.4.2 o critério de resolução de Rayleigh, onde definiu-se o limite de resolução para duas fontes próximas. Vamos aplicar este mesmo critério aqui, para determinar por exemplo, qual a melhor rede de difração para separar dois comprimentos de onda muito pró-

ximos. Chamamos esta condição de Poder de Resolução  $R$  da rede e esta grandeza é definida como

$$R = \frac{\langle \lambda \rangle}{\Delta \lambda} \quad (6.31)$$

onde  $\langle \lambda \rangle = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$  é o comprimento de onda médio e  $\Delta \lambda$  é a diferença de comprimento de onda entre as duas linhas que queremos resolver. Na figura 6.32 é mostrado um gráfico da situação no limite de resolução, onde  $L$  é a largura da linha e  $\Delta \theta_{\min}$  é a separação angular mínima entre as duas linhas e que deve ser igual a  $L/2$ , ou seja, recaímos no critério de Rayleigh: duas linhas podem ser resolvidas quando o máximo de difração de uma linha coincide com o primeiro mínimo de difração da outra linha.

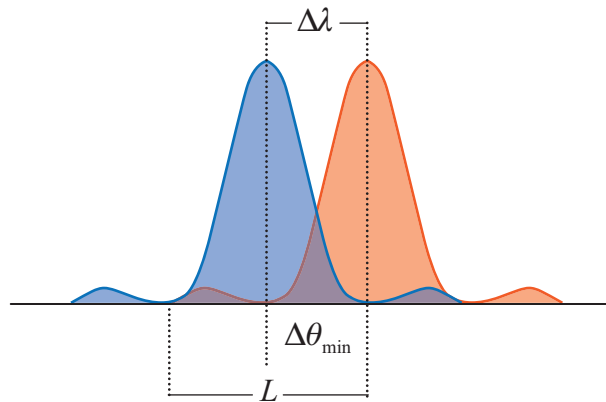


Figura 6.32 – Critério de Rayleigh aplicado para a resolução de duas linhas numa rede de difração.

Usando agora a expressão para o espaçamento angular entre duas linhas dado por  $\Delta \theta_m$ , de acordo com a equação (6.30), onde

$$\Delta \theta_m = \frac{m \Delta \lambda}{d \cos \theta_m}$$

e a expressão para a meia-largura de linha (6.28)

$$\frac{L}{2} = \frac{\lambda}{N d \cos \theta_m}$$

podemos escrever, que no limite de resolução temos:

$$\Delta \theta_{\min} \geq \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{m \Delta \lambda}{d \cos \theta_m} \geq \frac{\lambda}{N d \cos \theta_m}$$

e considerando  $\lambda$  como  $\langle \lambda \rangle$ , podemos escrever:

$$mN \geq \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \Rightarrow R = \frac{\langle \lambda \rangle}{\Delta\lambda} \leq mN \quad (6.32)$$

onde  $m$  é a ordem que vamos observar e  $N$  é o número de fendas iluminadas. Esta expressão nos diz que uma rede terá maior resolução quando tiver mais fendas iluminadas e quando olharmos numa ordem maior. Então duas linhas podem ser resolvidas quando  $\Delta\lambda \geq \frac{\langle \lambda \rangle}{mN}$ .

## Resumo

Em Óptica Física consideramos que quando a luz interage com obstáculos cujo tamanho seja da ordem do comprimento de onda temos efeitos de difração e interferência, que só podem ser explicados se tratarmos a luz como uma onda.

**Princípio de Huygens:** todo ponto de uma frente de onda pode ser visto como a fonte de pequeninas ondas, que se propagam no mesmo sentido da frente e com a velocidade desta. A nova frente de onda é a curva que envolve as pequenas frentes de onda.

**Difração:** propriedade que a onda tem de contornar obstáculos.

**Interferência:** superposição de duas ou mais ondas.

**Coerência:** duas ondas são ditas coerentes se a diferença de fase entre elas permanecer constante no tempo.

**Experimento de Fenda Dupla de Young:** luz incide sobre duas fendas e produz um padrão de interferência num anteparo à frente delas. Este padrão apresenta máximos e mínimos de intensidade, que chamamos de franjas de interferência. A posição destas franjas no anteparo depende da diferença de caminho  $\Delta r$  percorrido pelas duas ondas que emergem de cada fenda. Esta diferença de caminho pode ser dada em função de comprimentos de onda  $\lambda$  ou da diferença de fase  $\phi$ . A relação entre estas duas grandezas é dada por:

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\Delta r}{\lambda}$$

Para **interferência construtiva (máximos)** temos

$$d \sin \theta = m \lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Para **interferência destrutiva (mínimos)** temos

$$d \sin \theta = \left( m + \frac{1}{2} \right) \lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

onde  $d$  é a separação entre as fendas e  $\theta$  é o ângulo que define a posição da franja no anteparo e é medido em relação a um eixo central, perpendicular ao anteparo.

A **intensidade do padrão de interferência** é dado por:

$$I_{\theta} = 4I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2}, \quad \phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

onde  $I_0$  é a intensidade de cada onda individual.

**Interferência em Películas Finas:** quando luz incide num filme fino e transparente, ela reflete na parte superior (onda  $r_1$ ) e inferior (onda  $r_2$ ) deste filme, gerando duas ondas que irão interferir. As condições para interferência construtiva ou destrutiva dependem:

- da mudança de fase na reflexão, que depende do índice de refração dos meios envolvidos e
- da diferença de caminho entre as duas ondas.

1) Mudança de fase devido a reflexão:

- quando a reflexão ocorre num meio com índice de refração maior, a onda refletida inverte a fase;
- quando ocorre num meio com índice de refração menor não inverte a fase;
- quando a onda é refratada não inverte a fase.

2) Mudança de fase devido ao caminho percorrido pela onda  $r_2$ , dentro do filme com espessura  $L$ , e índice de refração  $n$ , considerando incidência normal:

$$2L = m \lambda_n, \quad r_2 \text{ não inverte a sua fase } (m = 1, 2, 3, \dots)$$

$$2L = \left( m + \frac{1}{2} \right) \lambda_n, \quad r_2 \text{ inverte a sua fase } (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} \text{ é o comprimento de onda dentro do filme.}$$



Para determinar qual das equações acima devemos utilizar no caso de interferência construtiva ou destrutiva, precisamos antes fazer uma análise das mudanças de fase das ondas na reflexão e aí escolher qual das duas equações deve ser aplicada em cada caso.

**Interferômetro de Michelson:** instrumento que permite determinar distâncias muito pequenas em termos de comprimentos de onda. A luz é dividida em dois feixes que percorrem distâncias diferentes e são recombinadas, gerando um padrão de interferência. Variando a distância percorrida de um dos feixes, muda-se o padrão de interferência, deslocando-se as franjas e esta distância pode ser medida apenas contando-se o deslocamento das franjas observadas num anteparo. É usado para medir distâncias muito pequenas (até  $\lambda/4$ ).

**Difração em Fenda Única:** luz passando numa fenda única de largura  $a$  produz um padrão de difração num anteparo à frente da fenda, onde observamos um máximo central. A posição dos **mínimos de difração** em função do ângulo  $\theta$  é dado por:

$$a \operatorname{sen}\theta = m \lambda$$

onde  $m = 1, 2, 3, \dots$

A **intensidade do padrão de difração** para qualquer ângulo  $\theta$  é dada pela equação:

$$I_{\theta} = I_m \left( \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \right)^2, \quad \alpha = \frac{\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda}$$

onde  $\alpha$  é a diferença de fase entre as ondas difratadas nas bordas da fenda.

**Difração em abertura circular:** o primeiro mínimo para um ângulo  $\theta$  é dado por:

$$\operatorname{sen}\theta = 1,22 \frac{\lambda}{d}$$

**Crítério de Rayleigh:** dois objetos vistos através de um microscópio ou telescópio estão no limite de resolução quando o máximo de difração observado para um objeto coincide com o mínimo de difração observado para o outro objeto. A separação angular em que isto vai ocorrer é dada pelo ângulo

$$\theta_R = 1,22 \frac{\lambda}{d}$$

onde  $d$  é o diâmetro da lente.

**Difração por Duas Fendas:** as duas fendas são separadas por uma distância  $d$  e as fendas possuem uma largura  $a$  que vai fazer com que a difração causada pela largura das fendas diminua a intensidade das franjas de interferência produzidas pelas duas fendas. O padrão de intensidade observado é dado pela equação:

$$I_{\theta} = I_m \cos^2 \frac{\phi}{2} \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

$$\text{onde } \frac{\phi}{2} = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \text{ e } \alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

**Fendas Múltiplas e Redes de Difração:** difração em  $N$  fendas produz um padrão de interferência onde a posição dos máximos é dada por:

$$d \sin \theta_m = m \lambda \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

e a intensidade é dada por:  $I_{\theta} = I_o \frac{\sin^2(N\beta)}{\sin^2(\beta)}$

$$\beta = \frac{\pi d \sin \theta_m}{\lambda}$$

onde  $\beta$  é a diferença de fase resultante entre as ondas que saem da primeira fenda e da última fenda.

A largura destes máximos, que para um número grande de fendas (redes de difração) ficam muito finos e chamamos de linhas, é dada por:

$$L = \frac{2L}{Nd \cos \theta_m}$$

A rede de difração é caracterizada por dois parâmetros, **dispersão** e **poder de resolução** dados por:

- Dispersão  $D = \frac{\Delta \theta_m}{\Delta \lambda} = \frac{m}{d \cos \theta_m}$

onde  $\Delta \theta_m$  é a separação angular entre duas linhas com diferença de comprimentos de onda  $\Delta \lambda$ , na mesma ordem  $m$ .

- Poder de Resolução  $R = \frac{\langle \lambda \rangle}{\Delta \lambda} \leq mN$

onde  $\langle \lambda \rangle$  é o comprimento de onda médio entre dois comprimentos de onda que queremos resolver, e cuja diferença é o  $\Delta \lambda$ .

## Problemas resolvidos

1) Duas fendas separadas por uma distância de 0,10 mm estão a uma distância da tela de 1,20 m. O comprimento de onda da fonte é de 500 nm (luz verde). Qual a distância entre os picos de intensidade máxima na tela?

**Solução:** Para  $d = 0,10 \text{ mm} = 10^{-4} \text{ m}$  e um comprimento de onda de  $\lambda = 500 \text{ nm} = 500 \times 10^{-9} \text{ m}$ , com uma distância à tela de  $L = 1,20 \text{ m}$ , temos que o pico de primeira ordem ( $m = 1$ ) ocorre no ângulo determinado por

$$\sin \theta_1 = m\lambda / d = \frac{1 \times 500 \times 10^{-9}}{1 \times 10^{-4}} = 5 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Trata-se claramente de um ângulo muito pequeno. Neste caso vale a aproximação  $\sin \theta_1 \approx \tan \theta_1 \approx \theta_1$  e usando a relação determinada a partir da figura 6.11 temos:

$$y \approx L\theta_1 = (1,20 \text{ m}) \times (5 \times 10^{-3}) = 6 \text{ mm}$$

2) Uma pessoa, ao observar uma bolha de sabão, vê que no ponto da superfície da bolha mais próximo a ele há um brilho verde ( $\lambda = 540 \text{ nm}$ ). O índice de refração da bolha é 1,35. Qual a menor espessura do filme para que isto ocorra? Assuma que o índice de refração do ar é 1.

**Solução:** No ponto mais próximo ao observador a luz é refletida perpendicularmente. Vamos fazer primeiro a análise da mudança de fase da onda pela reflexão:

- na superfície exterior da bolha a onda sofre uma mudança de fase de  $\pi$  rad (reflete no meio com  $n$  maior);
- na superfície interna não ocorre inversão de fase (a reflexão se dá num meio com  $n$  menor);
- para se ter um máximo de interferência precisamos mudar a fase da onda refletida na parte interna da bolha, e para isto vamos usar a equação:

$$2Ln = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

onde a menor espessura ocorre para  $m = 0$ , assim

$$L = \frac{\lambda}{4n} = \frac{540 \text{ nm}}{4 \times 1,35} = 100 \text{ nm}$$

3) Uma importante aplicação da interferência ocorre em filmes finos aplicados sobre lentes de máquinas fotográficas ou óculos. O que se procura é criar lentes “antireflexo”, pois em se diminuindo a reflexão aumenta-se o quanto de luz entra na lente. Em geral o filme é de  $\text{MgF}_2$  ( $n_f = 1,38$ ) e o que se faz então é colocar uma camada deste filme com determinada espessura, de tal modo que o raio refletido pela primeira superfície interfira destrutivamente com a segunda. Qual deve ser a espessura mínima da camada de  $\text{MgF}_2$  para eliminar a reflexão da luz de comprimento de 550 nm quando incide perpendicularmente sobre um vidro de  $n_v = 1,50$ ?

**Solução:** Nesta situação tanto a onda refletida sobre a superfície externa quanto a onda refletida na superfície interna do filme sofrem uma mudança de fase de  $\pi$  rad, pois ambos refletem em superfícies com índice de refração maior. Na superfície externa, a onda reflete no filme de  $\text{MgF}_2$  ( $n_f = 1,38$ ) e na superfície interna a onda reflete no vidro ( $n_v = 1,50$ ). Portanto, para termos uma interferência destrutiva, temos que inverter a fase da onda refletida na superfície interna e para isto vamos usar de novo a equação  $2Ln_f = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$ , que irá inverter a fase da onda refletida no vidro e a menor espessura do filme para que isto ocorra será para  $m = 0$ , então

$$L = \frac{\lambda}{4n_f} = \frac{550 \text{ nm}}{4 \times 1,38} = 99,6 \text{ nm}$$

4) Os faróis de um carro estão separados por uma distância  $y = 1,4\text{m}$ . Considere que são fontes pontuais emitindo luz com comprimento de onda de 500 nm. Se o diâmetro da pupila do olho é de 3 mm, qual é a máxima distância para a qual conseguimos resolvê-los? Veja figura 6.33 abaixo.

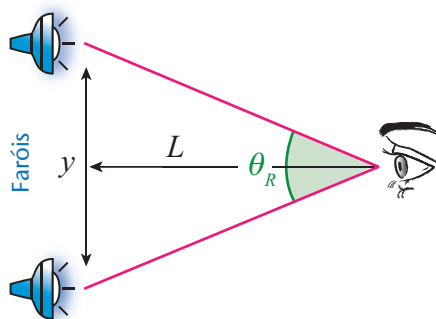


Figura 6.33 – Afastamento dos faróis de um carro visto por um observador.

**Solução:** Pelo critério de Rayleigh temos que estes dois pontos podem ser resolvidos no limite em que a separação angular entre eles é dada pelo ângulo:

$$\theta_R = 1,22 \frac{\lambda}{d} = 1,22 \frac{500 \times 10^{-9}}{3 \times 10^{-3}} = 2,03 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

Olhando a figura 6.33 temos que:

$$y = L\theta_R \Rightarrow L = \frac{y}{\theta_R} = \frac{1,4}{2,03 \times 10^{-4}} = 6900 \text{ m} = 6,9 \text{ km}$$

5) Uma rede de difração tendo 8000 ranhuras/cm é iluminada por luz com comprimento de onda de 589 nm. Quais são todas as ordens observadas e em que ângulos?

**Solução:** O espaçamento  $d$  desta rede é dado por:

$$d = \frac{1 \text{ cm}}{8000} = 1,25 \times 10^{-4}$$

O número máximo de ordens que podemos observar pode ser obtido da equação 6.26, fazendo  $\sin\theta \approx 1$ :

$$d \sin\theta_m = m\lambda \Rightarrow m \cong \frac{d}{\lambda} = \frac{1,25 \times 10^{-6} \text{ m}}{589 \times 10^{-9} \text{ m}} = 2,12$$

Portanto a ordem máxima que pode aparecer é a segunda ordem ( $m = 2$ ).

A posição angular dos máximos de primeira e segunda ordem são definidos por:

$$m = 1 \quad d \sin\theta_1 = \lambda \Rightarrow \sin\theta_1 = \frac{\lambda}{d} = 0,4712 \Rightarrow \theta_1 = 28,1^\circ$$

$$m = 2 \quad d \sin\theta_2 = 2\lambda \Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{2\lambda}{d} = 0,9433 \Rightarrow \theta_2 = 70,6^\circ$$

## Problemas propostos com respostas

### 6.3.2 Experimento da Fenda Dupla de Young

1) Em um experimento de Young observa-se que, para uma onda de comprimento de 610nm, o máximo de terceira ordem é observado num ângulo de 18 graus. Qual a distância entre as fendas?

Resposta:  $5,9 \times 10^{-6}$  m.

2) Um feixe de um laser de He-Ne ( $\lambda = 656$  nm) incide sobre fendas separadas por uma distância de 0,06 mm. Qual a distância entre os dois máximos mais ao centro de uma tela colocada a uma distância de 3,6 m das fendas?

Resposta: 3,9 cm

3) Observou-se que num aparato experimental de fendas duplas, que uma luz azul de comprimento de onda de 460 nm produz, num determinado ponto da tela, um máximo de 2ª ordem. Qual o comprimento de onda de luz visível que no mesmo aparato produziria neste ponto um mínimo?

Resposta: 613 nm

### 6.3.4 Interferência em Películas Finas

4) Que cor observamos no ponto do meio de uma bolha de sabão de 120 nm de espessura, quando ela é iluminada perpendicularmente por uma luz branca? Assuma  $n = 1,34$ .

Resposta: laranja-vermelho.

5) Um filme fino reduz a reflexão sobre uma superfície a zero para  $\lambda = 550$  nm. De qual fator as reflexões para os comprimentos de onda de  $\lambda = 450$ nm e  $\lambda = 650$ nm serão reduzidas utilizando-se o mesmo filme? Assuma que a incidência da luz é perpendicular ao filme.

Resposta: 0,47 e 0,23.

### 6.3.5 Interferômetro de Michelson

6) Qual a distância que devemos mover o espelho no interferômetro de Michelson para que por um ponto de referência passem 750 máximos de uma luz de  $\lambda = 589 \text{ nm}$ ?

Resposta: 0,221 mm.

### 6.4.1 Fenda Simples

7) Um anteparo está localizado a 50,0 cm de uma fenda única, que é iluminada com luz de 690 nm. Se a distância entre o primeiro e terceiro mínimos no padrão de difração é de 3 mm, qual a largura da fenda?

Resposta: 0,230 mm.

8) Uma onda sonora com uma frequência de 650 Hz vinda de uma fonte distante, atravessa uma porta com 1,10 m de largura localizada numa parede que absorve totalmente o som. Encontre o número e as direções aproximadas (ângulos) dos máximos de difração ouvidos no espaço além da entrada.

Resposta: 3 máximos, localizados a  $0^\circ$ , e aproximadamente  $46^\circ$  para a direita e esquerda.

### 6.4.2 Aberturas Circulares e Resolução

9) Um laser de He-Ne emite luz com comprimento de onda de 632,8 nm. A abertura circular através da qual o feixe emerge tem um diâmetro de 0,500 cm. Estime o diâmetro do feixe a 10,0 km de distância da abertura.

Resposta: 3,09 m.

10) Os revestimentos acústicos colocados no teto de salas possuem pequenos orifícios separados por 6,0 mm. (a) Com luz de comprimento de onda de 500 nm, a que distância deste revestimento você poderia resolver estes orifícios? Considere o diâmetro da pupila como 5 mm. (b) A resolução dos orifícios seria melhor com luz vermelha ou com luz violeta?

Resposta: (a) 49,18 m; (b) luz violeta.

**11)** A Lua está aproximadamente a 400 0000 km da Terra. Considere um telescópio na superfície terrestre que tenha uma lente com 15 cm de diâmetro. Suponha que você está observando em condições ideais e com luz de comprimento de onda de 700 nm. (a) Duas crateras lunares distantes 50 km uma da outra, podem ser resolvidas por este telescópio? (b) E as crateras distantes 1 km uma da outra, também podem ser resolvidas?

Resposta: (a) Sim; (b) Não.

**12)** Um observador planeja usar um telescópio para resolver dois pontos numa montanha distante 160 km. Estes pontos estão separados por 2 m. Qual é o menor diâmetro possível da lente do telescópio para resolver estes dois pontos, supondo que a observação é feita com luz de comprimento de onda de 500 nm?

Resposta: 4,88 cm.

### 6.4.3 Difração por Duas Fendas

**13)** A envoltória central de difração por duas fendas contém 11 franjas claras. Suponha que os primeiros mínimos coincidem com as franjas claras. Quantas franjas claras existem entre o primeiro e segundo mínimos da envoltória?

Resposta: 5.

**14)** Luz com comprimento de onda de 550 nm incide em duas fendas de largura  $a = 30,0 \mu\text{m}$ , com  $d = 0,150 \text{ mm}$ . (a) Quantas franjas claras serão observadas entre os primeiros mínimos da envoltória de difração, à direita e à esquerda do máximo central? (b) Qual é a razão entre as intensidades da terceira franja clara e da franja central?

Resposta: (a) 9; (b) 0,255.

### 6.4.4 Fendas Múltiplas e Redes de Difração

**15)** Uma lâmpada de sódio emite luz de 589 nm, que ilumina uma rede de difração com 5000 ranhuras/cm. Supondo que o feixe ilumine 1 cm da rede, calcule o desvio angular do feixe para as linhas de primeira e segunda ordens.

Resposta:  $17,1^\circ$  e  $36^\circ$ .



**16)** Uma rede de difração tem 600 ranhuras/mm e 5 mm de largura. Toda a rede é iluminada por uma luz de 500 nm. (a) Qual o menor intervalo de comprimento de onda que esta rede pode resolver na ordem  $m=3$ ? (b) Quantas ordens acima da terceira ordem podem ser observadas?

Resposta: (a) 0,056 nm; (b) nenhuma.

**17)** Uma rede de difração com 15000 ranhuras por polegada (1 polegada = 2,54 cm) produz um espectro de uma lâmpada de mercúrio. A linha verde deste espectro tem um comprimento de onda de 546,1 nm. Qual é a separação angular entre as linhas verde de primeira e segunda ordem.

Resposta: 21,4°.

## Referências

TIPLER, P. A. **Física para Cientistas e Engenheiros**. 4. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física 4 - Ótica e Física Moderna**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC.

SERWAY, R. **Princípios de Física – Óptica e Física Moderna**. 3.ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning.

KELLER, F. J.; GETTYS, W. E.; SKOVE, M. J. **Física**, vol. 2. Makron Books: 1999.